Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta d'esame del 15.06.2010

COGNOME:.. NOME: ....

N. MATRICOLA:..................... Corso di Laurea: ....

1] *(3 punti)* Sia

$$f(x) = \begin{cases} -\left|x+5\right| & \text{se } x < -1 \\ x-1 & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{1+x} & \text{se } x \geq 3 \end{cases} .$$

Determinare il più ampio intervallo che contiene zero dove f è invertibile.
(scrivere solo il risultato) :

2] *(6 punti)* Disegnare le immagini nel piano complesso dei seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \left|(1+i)\, z + (1-i)\, \overline{z}\right| < 2\} ;$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| < 1\} \cap \{w \in \mathbb{C} \ : \ w = i\,(z+1)\, , \ z \in A\} ;$$

$$C = \{u \in \mathbb{C} \ : \ u^2 \in B\} .$$

3] *(3 punti)* Sia

$$a_n = n\,(\pi - 2\arctan n) + \sqrt[n]{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n =$ ....
(Scrivere solo il risultato).

4] *(5 punti)* Dopo aver determinato l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x \exp\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^2}\right),$$

determinare le equazioni degli eventuali asintoti al suo diagramma .

Insieme di definizione:

Equazioni degli asintoti:

5] *(4 punti)* Al variare del parametro reale α, discutere il carattere delle serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n! + \arctan n}{n^\alpha\,(n-2)!\,\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n)! + \arctan n}{n^\alpha\,(n-2)!\,\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}\,.$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

6] *(4 punti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ sia

$$a_n = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Determinare il carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
(Scrivere uno svolgimento completo)

7] *(4 punti)* Determinare la classe limite nel campo complesso della successione

$$\left\{ \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \right\}_{n=1}^{+\infty}.$$

8] *(2+3 punti)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = t + \lfloor t \rfloor$, e per $x, y \in \mathbb{R}$, si ponga

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$

a) è completo?

b) è esprimibile come unione numerabile di suoi sottoinsiemi compatti?