Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta d'esame del 07.07.2010

COGNOME:.. NOME: ....

N. MATRICOLA:...................... Corso di Laurea: ....

1] *(3 punti)* Sapendo che l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \;:\; 3^{-x} + x^3 \le 2\}$$

è un intervallo, determinarne l'estremo sinistro. L'intervallo A è limitato?
(scrivere solo il risultato) :

2] *(3 punti)* Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh(n^2+1) - \sinh n^2}{\left(e + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}.$$

(scrivere solo il risultato) :

3] *(4 punti)* Disegnare nel piano complesso le immagini dei seguenti insiemi.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |e^{2iz}| - (1 + e^{-2})\,|e^{iz}| + e^{-2} \le 0 \;;\; |e^z| \ge 1\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} \;:\; w^2 \in A\}\,.$$

(Si ricorda che $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ se $z = x + iy$).

4] *(4 punti)* Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{2n+1}{n-1} \right)^{1/n} - 2^{1/n} \right].$$

(Scrivere una breve spiegazione).

5] *(5 punti)* Per ciascuna delle seguenti tre funzioni determinare la classe limite per $x \to +\infty$.

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos x}; \qquad g(x) = e^{x} f\,(x)\,; \qquad h\,(x)\, e^{-x} f\,(x)\,.$$

6] *(6 punti)* Al variare del parametro reale a, discutere il carattere semplice e assoluto della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n\,(2n)!}{(n!)^2}.$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

7] *(3 punti)* Mostrare che nessun intervallo non vuoto dell'asse reale si può esprimere come unione di due intervalli **disgiunti**, entrambi aperti oppure entrambi chiusi.
(Scrivere uno svolgimento completo)

8] *(7 punti)* Siano f e g due funzioni a valori reali, definite su uno stesso intervallo reale I e mai nulle. La funzione f sia crescente e la funzione g decrescente. Quali delle seguenti funzioni

$$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

risultano necessariamente monotone in I?
Rispondere alla domanda anche sotto l'ulteriore ipotesi $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ per ogni $x \in I$.