

Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta d'esame del 07.09.2010

COGNOME:..... NOME:

N. MATRICOLA:..... Corso di Laurea:

1] (5 punti) Siano

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{|x-1|} - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ 3 - |x-4| & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ \frac{1}{2}(x-3)^2 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$g(t) = \inf \{f(x) : x \geq t\} \quad \text{e} \quad h(t) = \sup \{f(x) : x \geq t\}.$$

Tracciare il grafico di f e il grafico di g e determinare il dominio di h , intesa quale funzione reale.

2] (3 punti) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan n}{2^{1/n} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.$$

(Scrivere solo il risultato) :

3] (3 punti) Stabilire se per $x \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$ il diagramma della funzione

$$f(x) = \frac{3x^2 + 7x + 2}{x + 3} + x^2 e^x$$

ammette asintoto obliquo, e, in caso affermativo, determinarne l'equazione.

(Scrivere solo il risultato) :

4] (4 punti) Scrivere in forma algebrica le soluzioni nel campo complesso di

$$\left[i^2 \left(\frac{1-2i}{2+i} \right) \right]^3 = (z-2i)^3$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

5] (4 punti) Al variare del parametro reale x , determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(1+n)}{1-n} \left(\sqrt{x^2-1} + x \right)^n.$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

6] (4 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale a è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2n^2}},$$

dove $b_n = a_n - a_{n+1}$ e $a_n = \frac{1}{n^a}$.

(Scrivere uno svolgimento completo)

7] (3 punti) L'insieme

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : 2010 \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{2010} \geq 2009 \right\}$$

è finito o ha cardinalità infinita?

(Scrivere uno svolgimento completo)

8] (*7 punti*) Siano (X, d) uno spazio metrico e Γ una sua copertura (di natura qualsiasi). Stabilire quali implicazioni valgono tra le seguenti affermazioni.

- a) Esiste un punto di X che appartiene ad infiniti elementi di Γ .
 - b) Esiste un punto di X ogni intorno del quale ha intersezione non vuota con infiniti elementi di Γ .
 - c) Esiste un sottoinsieme compatto di X che ha intersezione non vuota con infiniti elementi di Γ .
- (*Scrivere uno svolgimento completo*)