Capitolo 6

Equazioni differenziali del primo ordine

6.1 Generalità

L'espressione "equazione differenziale" è attualmente utilizzata per indicare una vasta gamma di problemi relativi all'Analisi Matematica. Partendo da una presentazione classica e relativamente semplice, affermiamo che si tratta di un'equazione in cui l'incognita è una funzione $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x})$; l'aggettivo "differenziale" indica che nell'equazione è presente almeno una derivata della funzione incognita. Altri vincoli, sul modo in cui $\underline{y}$ appare nell'equazione, possono essere introdotti. La funzione incognita è, in generale, definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, e ha valori in $\mathbb{R}^m$.
Lo scopo di questi appunti è di introdurre i primi concetti legati alle equazioni differenziali, e quindi ci limitiamo a considerare il caso più semplice, quello in cui la funzione incognita dipende da una sola variabile reale x, e assume valori reali $(n = m = 1)$. In letteratura, la scelta $n = 1$ equivale allo studio delle equazioni differenziali **ordinarie**, mentre il caso $n > 1$ porta allo studio delle equazioni differenziali **alle derivate parziali**.
Il termine **ordine** dell'equazione differenziale indica il massimo ordine di derivazione della funzione incognita presente nell'equazione.
Così, un'equazione differenziale ordinaria di ordine k può essere espressa con la scrittura

$$G(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}) = 0 \tag{6.1}$$

dove G è una funzione reale di $k + 2$ variabili reali.

Esempio 1 *Una particella di massa m posta in vicinanza della superficie terrestre è soggetta ad una forza di attrazione diretta verso il suolo, di intensità costante e pari a $F = mg$, dove $g \simeq 9.8\ m/s^2$. Se y indica l'altezza dal suolo, ed x il tempo, questa relazione è perciò espressa dall'equazione differenziale del secondo ordine $y'' + g = 0$. In questa equazione non sono presenti le derivate di ordine zero e uno della funzione incognita y.* ▲

Esempio 2 *In un circuito elettrico costituito da una resistenza R, un'induttanza L, un condensatore di capacità C, applichiamo una forza elettromotrice $V(x)$ funzione del tempo x. La differenza di potenziale $y(x)$ ai capi del condensatore soddisfa l'equazione differenziale del II ordine*

$$CLy'' + CRy' + y + V = 0\ .$$

La risoluzione dell'equazione permetterà di ricavare informazioni utili per ottimizzare le prestazioni del circuito. ▲

L'espressione in (6.1) può essere difficilmente trattabile ma spesso, nelle applicazioni, può essere ricondotta ad un'espressione più comoda, in cui la derivata di ordine massimo $y^{(k)}$ viene comodamente isolata. Questo è il caso delle equazioni **in forma normale,** che hanno l'aspetto

$$y^{(k)} = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)}) \ . \tag{6.2}$$

Il resto del capitolo è dedicato ad alcune considerazioni sulle equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine, in forma normale.

6.2 Equazioni del primo ordine; il problema di Cauchy

La generica equazione differenziale ordinaria in forma normale, del I ordine, può essere scritta come

$$y' = f(x, y) \tag{6.3}$$

dove f è una funzione reale definita in un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definizione 6.1 *Sia* $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Diciamo che una funzione* $y = y(x)$ *è soluzione, nell'intervallo* $I \subseteq \mathbb{R}$, *dell'equazione differenziale (6.3) se*

1) *y è derivabile in ogni punto $x \in I$;*

2) *per ogni $x \in I$ si ha $(x, y(x)) \in E$;*

3) *per ogni $x \in I$ si ha $y'(x) = f(x, y(x))$.*

Osservazione Le prime due richieste servono in realtà per poter scrivere la terza. Di fatto, perchè y sia soluzione in I richiediamo di ottenere una identità, sostituendo a y e a y' nella scrittura (6.3) i valori $y(x)$ e $y'(x)$ della funzione e della sua derivata.
Notiamo che un caso molto particolare di equazione (6.3) si ha quando la funzione f dipende dalla sola variabile $x \in I$. Risolvere la

$$y' = f(x)$$

equivale allora a trovare una primitiva, in I, della funzione f.
I problemi fisici, chimici, biologici,...che si traducono in modelli matematici con equazioni differenziali non richiedono, in genere, di trovare tutte le soluzioni, ma solo quella o quelle soddisfacenti condizioni ulteriori. Per le equazioni del primo ordine molto spesso si presenta la necessità di determinare la soluzione (o le soluzioni) dell'equazione che, in un punto fissato dell'intervallo, assume un valore assegnato.
Formalmente scriviamo questo problema, che chiamiamo **problema di Cauchy**, nella forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.4}$$

dove $(x_0, y_0) \in E$. Diciamo che $y = y(x)$ è soluzione di (6.4) sull'intervallo I se y è soluzione dell'equazione differenziale (6.3) su I, se $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$.
Una parte molto importante della teoria delle equazioni differenziali è dedicata allo studio della esistenza, e dell'unicità, per soluzioni del problema di Cauchy; in queste note, ci limitiamo ad enunciare il seguente risultato che garantisce, in ipotesi di regolarità, l'esistenza e l'unicità **locale** della soluzione.

Teorema 6.2 *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *un insieme aperto,* (x_0, y_0) *un punto di* Ω *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Se* f *e* $\partial f/\partial y$ *sono continue in* Ω *(in particolare, se* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$*) esiste un intervallo aperto contenente* x_0 *in cui il problema di Cauchy (6.4) ha una ed una sola soluzione.*

6.3 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono equazioni differenziali del primo ordine, in forma normale, in cui la derivata prima della funzione incognita si scrive come prodotto di una funzione della sola variabile indipendente x e di una funzione della sola incognita y:

$$\boxed{y' = h(x) \cdot k(y)}$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = h(x) \cdot k(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in cui h e k siano funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di x_0 e di y_0 rispettivamente; allora la funzione $f(x, y) = h(x) \cdot k(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno Ω di (x_0, y_0) e quindi il problema ha una ed una sola soluzione definita in un intervallo aperto contenente x_0, per il Teorema 6.2.
Per cercare di determinare la soluzione, operiamo nel seguente modo: osserviamo, prima di tutto, che se $k(y_0) = 0$ la funzione costante $y(x) = y_0$ è una (quindi l'unica) soluzione locale.
Se invece $k(y_0) \neq 0$, per continuità si ha anche $k(y) \neq 0$ in un intorno V di y_0; quindi, tenuto conto che $y(x) \in V$ se x appartiene ad un opportuno intorno U di x_0 (perchè y deve essere continua), possiamo dire che per ogni $s \in U$ si ha

$$\frac{y'(s)}{k(y(s))} = h(s) \, .$$

Se integriamo entrambi i membri dell'uguaglianza precedente nell'intervallo di estremi x_0 e $x \in U$ otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{k(y(s))} \, ds = \int_{x_0}^{x} h(s) ds \; ,$$

vale a dire

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{k(u)} = \int_{x_0}^{x} h(s) ds.$$

In questo modo giungiamo ad un'eguaglianza tra una funzione della variabile $y(x)$ e una della variabile x. Se poi siamo in grado di ricavare $y(x)$ in funzione di x, otteniamo una forma esplicita della soluzione; altrimenti, occorreranno metodi differenti (che esulano dagli scopi di queste note) per studiare la soluzione.

Esempio 3 *Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x^3}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

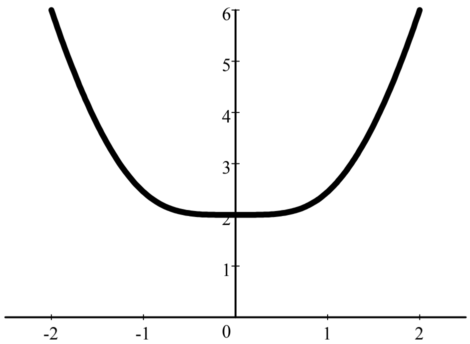
In questo caso $h(x) = 4x^3$, $k(y) = 1/y$ *e ovviamente non esistono soluzioni costanti. Quindi se* y *è la soluzione locale del problema, si ha*

$$\int_2^{y(x)} u du = \int_0^x 4s^3 ds \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^2(x)}{2} - 2 = x^4$$

Quindi $y^2(x) = 2x^4 + 4$, *da cui si ricava (si ricordi che* $y(x) > 0$*)*

$$y(x) = \sqrt{2x^4 + 4}$$

che risulta definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.



Esempio 4 *Determinare le soluzioni locali* y_a *dei problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = e^{x-y} \\ y(0) = a \qquad\qquad a \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{PC_a}$$

In questo caso $h(x) = e^x$ *e* $k(y) = e^{-y} \neq 0$ *per ogni* y. *Quindi se* $y = y_a$ *è la soluzione locale di* (PC_a), *si ha*

$$\int_a^{y(x)} e^u \, du = \int_0^x e^s \, ds \quad \Longrightarrow \quad e^{y(x)} - e^a = e^x - 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{y(x)} = e^x + e^a - 1 \, .$$

Si ottiene perciò

$$y_a(x) = \log(e^x + e^a - 1)$$

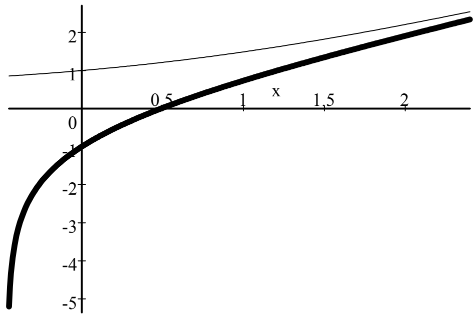
che rappresenta la soluzione del problema di Cauchy assegnato; questa soluzione è definita nel più ampio intervallo I *contenente* $x_0 = 0$ *in cui*

$$e^x + e^a - 1 > 0 \, . \tag{6.5}$$

Nel caso $a < 0$ *abbiamo*

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x > \log(1 - e^a)\} = (\log(1 - e^a), +\infty)$$

mentre se $a \geq 0$ *la (6.5) è vera per ogni* $x \in \mathbb{R}$.



linea sottile: $a = 1$ *; linea marcata:* $a = -1$

Esempio 5 *Determinare le soluzioni locali* y_b *dei problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y(y+1)x \\ y(0) = b \qquad\qquad b \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{PC_b}$$

In questo caso $h(x) = x$ *e* $k(y) = y(y+1)$*; quindi tra le soluzioni dell'equazione differenziale vi sono le funzioni costanti* $y(x) = 0$ *e* $y(x) = -1$*, che sono soluzioni del problema di Cauchy nei casi* $b = 0$ *e* $b = -1$*.*
Grazie all'unicità della soluzione locale (vd. Teorema 6.2), per $b \neq 0$ *e* $b \neq -1$ *nessuna altra soluzione* y_b *può assumere i valori* 0 *e* -1*, per cui i grafici delle soluzioni non intersecano mai le due rette orizzontali. Così:*

$$\int_b^{y(x)} \frac{du}{u(u+1)} = \int_0^x s\,ds \qquad \Longrightarrow \qquad \int_b^{y(x)} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{x^2}{2}$$

e tenendo presente che la funzione y_b *e il dato* $y(0) = b$ *hanno localmente lo stesso segno,*

$$\frac{x^2}{2} = \log\frac{y(x)}{b} - \log\frac{y(x)+1}{b+1} = \log\frac{(b+1)y(x)}{b(y(x)+1)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y(x)}{y(x)+1} = \frac{b}{b+1}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

da cui

$$y_b(x) = \frac{\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{b+1}{b} - \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1 + \frac{1}{b} - \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)}\,. \tag{6.6}$$

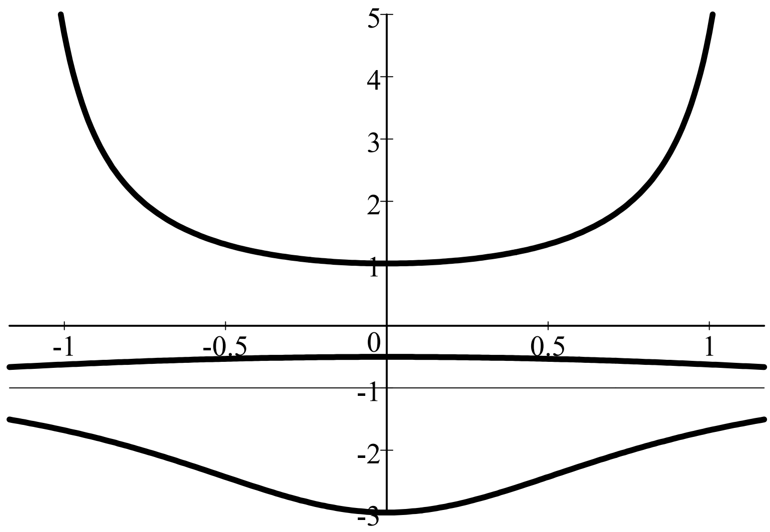
L'intervallo I *di definizione di tale soluzione è il più ampio intervallo contenente* $x = 0$ *in cui il denominatore nella (6.6) non si annulla. Poichè la funzione* $e^{x^2/2}$ *assume tutti i valori di* $[1, +\infty)$*, se*

$$1 + \frac{1}{b} < 1 \qquad \textit{cioè se} \quad b < 0$$

si ha $I = \mathbb{R}$*, mentre se*

$$1 + \frac{1}{b} > 1 \qquad \textit{cioè se} \quad b > 0$$

si ha $I = \left(-\sqrt{\log(1+\frac{1}{b})}, \sqrt{\log(1+\frac{1}{b})}\right)$.



linee sottili: $b = 0$, $b = -1$; *linee marcate:* $b = -3, b = -\frac{1}{2}, b = 1$

Esempio 6 *Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{ye^y} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Si ha

$$\int_3^{y(x)} ue^u \, du = \int_1^x 2s \, ds$$

cioè

$$e^{y(x)}(y(x) - 1) - 2e^3 = x^2 - 1$$

da cui non è possibile ricavare la variabile $y(x)$ algebricamente. ▲

6.4 Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale **lineare** del primo ordine ha la forma

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \tag{6.7}$$

dove p e q (i coefficienti dell'equazione) sono funzioni reali definite in un intervallo I di $\mathbb{R}$.
Si tratta di equazioni di fatto in forma normale, che rientrano nella formulazione (6.3) con $E = I \times \mathbb{R}$ e

$$f(x, y) \equiv -p(x)y + q(x)$$

Sotto opportune ipotesi sui coefficienti, per queste equazioni è possibile non solo dare informazioni complete sul problema di Cauchy ma scrivere anche tutte le soluzioni.

Teorema 6.3 *Siano p e q funzioni continue nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, e siano $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.8}$$

ha una ed una sola soluzione, definita nell'intervallo I, data dalla funzione

$$y(x) = \left[\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)\right] \cdot \left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} p(s)ds\right) dt\right\} . \tag{6.9}$$

Inoltre, tutte le soluzioni in I dell'equazione

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{6.10}$$

sono

$$y(x) = \left[\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)\right] \cdot \left\{c + \int_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} p(s)ds\right) dt\right\}$$

dove x_0 è un punto qualsiasi (fissato) dell'intervallo I e c è una costante reale arbitraria.

Dim. Tenendo conto della continuità di p e q, è sufficiente derivare l'espressione in (6.9) per verificare che risolve il problema di Cauchy (6.8).
Sia poi $y = y(x)$ una soluzione in I dell'equazione (6.10); per ogni $t \in I$ si ha

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$$

e moltiplicando per la funzione (mai nulla) $h(t) = \exp\left(\int_{x_0}^{t} p(s)ds\right)$ si ha

$$y'(t)h(t) + p(t)y(t)h(t) = q(t)h(t) . \tag{6.11}$$

La funzione h è derivabile in I, con $h'(t) = p(t)h(t)$, e la (6.11) può essere scritta come

$$\frac{d}{dt}\{yh\}(t) = q(t)\,h(t) .$$

Integrando rispetto a t nell'intervallo di estremi x_0 e $x \in I$, e tenendo conto del fatto che $h(x_0) = 1$, si ottiene

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) \cdot \left\{y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} p(s)ds\right) dt\right\} . \tag{6.12}$$

Perciò, ogni soluzione di (6.10) in I è espressa dalla formula (6.12), dove x_0 è un punto fissato in I; in particolare, essa è univocamente determinata dal valore che assume in x_0. Ponendo $y(x_0) = c$ otteniamo tutte le soluzioni, in I, della (6.10). ■

Osservazione Data l'arbitrarietà della scelta del punto x_0 e del valore c, spesso l'insieme di tutte le soluzioni di (6.10) è indicato con la scrittura

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx \tag{6.13}$$

in cui gli integrali coinvolti sono indefiniti. Questa formula va letta con attenzione. Se P indica una primitiva di p nell'intervallo I, il simbolo $\int p(x)dx$ indica tutte le funzioni del tipo $P(x)+b$, con $b \in \mathbb{R}$. Notiamo però che la scelta della costante b è ininfluente in quanto

$$y(x) = e^{-[P(x)+b]} \int q(x)\, e^{[P(x)+b]}\, dx = e^{-P(x)} \int q(x)\, e^{P(x)}\, dx = e^{-P(x)} [H(x)) + c]$$

dove H indica una primitiva della funzione $q(x)\, e^{P(x)}$, e c è una qualsiasi costante reale.

Esempio 7 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + 2xy = x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Per il teorema precedente, la soluzione esiste (unica) in $\mathbb{R}$ *ed è la funzione*

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp\left(-\int_0^x 2tdt\right) \cdot \left\{1 + \int_0^x t^3 \exp\left(\int_0^t 2sds\right) dt\right\} = \\ &= e^{-x^2}\left\{1 + \int_0^x t^3 e^{t^2}\, dt\right\} = e^{-x^2}\left\{1 + \frac{1}{2}\int_0^{x^2} ue^u\, du\right\} = \\ &= e^{-x^2}\left\{1 + \left[\frac{e^u(u-1)}{2}\right]_{u=0}^{u=x^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-x^2}\left\{3 + e^{x^2}(x^2-1)\right\} = \frac{3}{2}e^{-x^2} + \frac{x^2-1}{2} \end{aligned}$$

. ▲

Esempio 8 *Consideriamo l'equazione differenziale*

$$y' + \frac{y}{x} - 4x = 0 \tag{6.14}$$

e scriviamone tutte le soluzioni definite nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Seguendo la (6.13), una primitiva di $p(x) = 1/x$ *è* $P(x) = \log x$, *per cui*

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot \int 4xe^{\int \frac{dx}{x}}\, dx = e^{-\log x} \int 4xe^{\log x} dx = \\ &= \frac{1}{x}\int 4x^2 dx = \frac{1}{x}\left(\frac{4}{3}x^3 + c\right) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.
Se volessimo scrivere tutte le soluzioni per l'intervallo $(-\infty, 0)$, *con gli stessi calcoli, ma utilizzando* $P(x) = \log|x|$, *arriveremmo a*

$$y(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{c'}{|x|}$$

con $c' \in \mathbb{R}$; *per l'arbitrarietà della costante* c' *possiamo ancora scrivere*

$$y(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{d}{x}, d \in \mathbb{R}\,.$$

. ▲

Esempio 9 *Vogliamo determinare la soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + (\tan x)y = 3\sin x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

Il più ampio intervallo, contenente il punto $x_0 = \pi$, in cui i coefficienti dell'equazione differenziale sono continui è $I = (\pi/2, 3\pi/2)$. Per la formula (6.9) la soluzione è quindi

$$y(x) = \exp\left(-\int_\pi^x \tan t dt\right) \cdot \left\{1 + 3\int_\pi^x \sin t \, \exp\left(\int_\pi^t \tan s \, ds\right) dt\right\} .$$

Per $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$ si ha

$$\int_\pi^x \tan t \, dt = \int_\pi^x \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = [-\log|\cos t|]_{t=\pi}^{t=x} = -\log|\cos x| = -\log(-\cos x)$$

e quindi

$$\begin{aligned} y(x) &= (-\cos x)\left\{1 - 3\int_\pi^x \frac{\sin t}{\cos t} \, dt\right\} = (-\cos x)\left\{1 + 3\left[\log|\cos t|\right]_{t=\pi}^{t=x}\right\} = \\ &= (-\cos x)\{1 + 3\log(-\cos x)\} \end{aligned}$$

. ▲

Esempio 10 *Vogliamo determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} + \sqrt{2-x} = 0 \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

Il più ampio intervallo di continuità dei coefficienti, contenente il punto iniziale $x_0 = 1$, è l'intervallo $(0, 2]$; quindi la soluzione per $x \in (0, 2]$ è data dalla formula

$$\begin{aligned} y(x) = \exp\left(-\int_1^x \frac{dt}{t}\right) \cdot \left\{4 - \int_1^x \sqrt{2-t}\exp\left(\int_1^t \frac{ds}{s}\right) dt\right\} = \\ = \frac{1}{x}\left\{4 - \int_1^x t\sqrt{2-t} \, dt\right\} = \frac{1}{x}\left\{4 + 2\int_1^{\sqrt{2-x}} (2-u^2)u^2 \, du\right\} = \\ = \frac{2}{x}\left\{2 + \left[\frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_{u=1}^{u=\sqrt{2-x}}\right\} = \frac{2}{x}\left\{\frac{23}{15} + \frac{2(2-x)^{3/2}}{3} - \frac{(2-x)^{5/2}}{5}\right\} . \end{aligned}$$

. ▲

6.5 Equazioni di Bernoulli

Si dà il nome di equazioni di Bernoulli alle equazioni del tipo

$$\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^\gamma = 0}$$

dove γ è un numero reale fissato e a,b sono funzioni definite in un comune intervallo I. Per non ricadere nel caso delle equazioni lineari, consideriamo $\gamma \neq 0$ e $\gamma \neq 1$.
Osserviamo che se $\gamma > 0$, tra le soluzioni dell'equazione vi è la funzione identicamente nulla.
Supponiamo che a e b siano continue in I, poniamo

$$f(x, y) = -a(x)y - b(x)y^\gamma$$

e denotiamo con E l'insieme di definizione di f.
(**N.B.**: l'insieme E contiene certamente tutti i punti della forma (x, y) con $x \in I$ e $y > 0$; per $y \leq 0$ invece, dipende dal particolare valore di γ. Ad esempio, per $\gamma = 2$ sono accettabili tutti gli $y \in \mathbb{R}$, per $\gamma = -2/3$ solo $y \neq 0$, per $\gamma = \pi$ solo $y \geq 0, ...$).
Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y + b(x)y^\gamma = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (x_0, y_0) \in E,\ y_0 \neq 0 \tag{6.15}$$

ha una ed una sola soluzione locale, per il Teorema (6.2).
Per il problema con $y_0 = 0$, sempre che sia ammissibile, vedremo caso per caso, negli esempi, cosa succede.
Per quanto riguarda il calcolo della soluzione, le equazioni di Bernoulli possono essere riportate ad equazioni lineari, mediante opportuni cambiamenti di variabile dipendente. Se $y = y(x)$ è soluzione di (6.15), y ha in un intorno U di x_0 lo stesso segno di y_0; possiamo quindi dividere l'equazione per $[y\,(x)]^\gamma$ ottenendo, per ogni $x \in U$

$$y'(x)y^{-\gamma}(x) + a(x)y^{1-\gamma}(x) + b(x) = 0$$

Poniamo

$$y^{1-\gamma}(x) = z(x) \tag{6.16}$$

da cui

$$(1-\gamma)y^{-\gamma}(x)y'(x) = z'(x)$$

Sostituendo, si ha che per ogni $x \in U$

$$\frac{z'(x)}{1-\gamma} + a(x)z(x) + b(x) = 0\ ;$$

cioè $z = z(x)$ è soluzione, in U, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{z'}{1-\gamma} + a(x)z + b(x) = 0 \\ z(x_0) = (y_0)^{1-\gamma} \end{cases} \qquad (x_0, y_0) \in E \quad y_0 \neq 0$$

in cui l'equazione differenziale è lineare. Si giunge alla soluzione del problema (6.15) invertendo, <u>con cura</u>, la (6.16).

Esempio 11 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - y + xy^4 = 0 \\ y(0) = b \end{cases} \qquad b \in \mathbb{R}$$

La funzione $f(x,y) = y - xy^4$ *è di classe* $C^1(\mathbb{R}^2)$ *e quindi il problema ha una ed una sola soluzione locale; se* $b = 0$*, tale soluzione è la funzione identicamente nulla. Se* $b \neq 0$*, posto*

$$z(x) = \frac{1}{y^3(x)} \qquad , \qquad z'(x) = -\frac{3y'(x)}{y^4(x)} \ ,$$

si ottiene

$$\begin{cases} z' + 3z = 3x \\ z(0) = \dfrac{1}{b^3} \end{cases}$$

e quindi

$$z(x) = \exp\left(-\int_0^x 3dt\right)\left\{\frac{1}{b^3} + \int_0^x 3t\exp\left(\int_0^t 3ds\right)dt\right\} =$$

$$= e^{-3x}\left\{\frac{1}{b^3} + \int_0^x 3te^{3t}dt\right\} = e^{-3x}\left\{\frac{1}{b^3} + e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right\} .$$

Ne segue che la soluzione cercata per $b \neq 0$ *è la funzione*

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{z(x)}} = \frac{e^x}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{b^3} + e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}}}$$

definita nel più ampio intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$*, contenente* $x_0 = 0$*, in cui* $z(x) \neq 0$*. Poichè la funzione*

$$g(x) = e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

decresce da $1/3 = \lim_{x\to-\infty} g(x)$ *al minimo assoluto* $0 = g(0)$*, per poi crescere a* $+\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x)$*, la retta* $y = -b^{-3}$ *non incontra mai il grafico di* g *se* $b > 0$ *e quindi* $I = \mathbb{R}$*. Se invece* $0 < -b^{-3} < 1/3$*, la retta orizzontale incontra il grafico di* g *in due punti e quindi* I *è un intervallo limitato. Infine, se* $-b^{-3} \geq 1/3$*, la retta orizzontale incontra il grafico di* g *in un solo punto e* I *è un intervallo illimitato a sinistra.* ▲

Esempio 12 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + (\sin x)(y - y^3) = 0 \\ y(0) = b \end{cases} \qquad b \in \mathbb{R}$$

che, per il teorema (6.2), ha una ed una sola soluzione locale. Per $b = 0$ *la soluzione è la funzione nulla; per* $b \neq 0$ *poniamo*

$$z(x) = \frac{1}{y^2(x)} \qquad , \qquad z'(x) = -\frac{2y'(x)}{y^3(x)} \ .$$

Si ha

$$\begin{cases} z' - 2(\sin x)z = -2\sin x \\ z(0) = \dfrac{1}{b^2} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{2-2\cos x}\left\{\frac{1}{b^2} - 2\int_0^x e^{-2+2\cos t}\sin t\,dt\right\} = \\ &= e^{2-2\cos x}\left\{\frac{1}{b^2} + e^{-2+2\cos x} - 1\right\} = 1 + \left(\frac{1}{b^2} - 1\right)e^{2-2\cos x}\,. \end{aligned}$$

Ne segue che la soluzione del problema assegnato è la funzione

$$y(x) = \frac{\mathrm{signum}(b)}{\sqrt{z(x)}} = \frac{e^{\cos x - 1}}{\sqrt{e^{-2+2\cos x} - \left(1 - \dfrac{1}{b^2}\right)}}\,\mathrm{signum}(b)$$

nel più ampio intervallo I contenente $x = 0$ in cui $z(x) > 0$. Poichè la funzione

$$h(x) = e^{-2+2\cos x}$$

è una funzione periodica di periodo 2π a valori in $[e^{-4}, 1]$, se $(1 - 1/b^2) < e^{-4}$ l'intervallo I coincide con $\mathbb{R}$; quando invece $e^{-4} \le (1 - 1/b^2)$, I è un intervallo limitato e simmetrico rispetto a $x = 0$. ▲

Esempio 13 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x+1}y - \dfrac{1}{x^2-1}\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = b \end{cases} \qquad b > 0$$

Ovviamente consideriamo $-1 < x < 1$. La soluzione esiste, unica, localmente in $x = 0$, per il teorema 6.2. Posto

$$z(x) = \sqrt{y(x)} \qquad , \qquad z'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$$

si ottiene il nuovo problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' + \dfrac{1}{x+1}z = \dfrac{1}{2(x^2-1)} \\ z(0) = \sqrt{b} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} z(x) &= \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt\right)\left\{\sqrt{b} + \frac{1}{2}\int_0^x \exp\left(\int_0^t \frac{1}{s+1}\,ds\right)\frac{1}{t^2-1}\,dt\right\} = \\ &= \frac{1}{x+1}\left\{\sqrt{b} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt\right\} = \frac{1}{x+1}\left\{\sqrt{b} + \frac{1}{2}\log(1-x)\right\}\,. \end{aligned}$$

Ne segue che la soluzione del problema assegnato è la funzione

$$y(x) = \frac{\left\{\sqrt{b} + \frac{1}{2}\log(1-x)\right\}^2}{(x+1)^2} \tag{6.17}$$

nel più ampio intervallo I *contenente* $x_0 = 0$ *in cui* $z(x) > 0$*, cioè in* $(-1, 1 - e^{-2\sqrt{b}})$.

N.B.: *è interessante notare cosa succede per* $x \to x_1^-$*, dove* $x_1 \equiv \left(1 - e^{-2\sqrt{b}}\right)$*. La funzione* z *tende a* 0^+*, per poi diventare negativa a destra di* x_1*; l'espressione ottenuta per* $y\,(x)$ *ha ancora senso, e ha un minimo a quota* 0 *nel punto* x_1*. Lo studio di un nuovo problema di Cauchy, con la stessa equazione differenziale di partenza e con dato iniziale* $y\,(x_1) = 0$*, porta perciò ad avere, a destra di* x_1*, almeno due soluzioni continue: quella data da (6.17) e* $y\,(x) \equiv 0$*.*
Questo risultato non è in contrasto con quanto affermato nel Teorema 6.2, perchè il punto $(x_1, 0)$ *non è interno all'insieme* $E = (-1,1)\times[0,+\infty)$ *in cui la funzione* $f\,(x,y) = -\dfrac{2}{x+1}y + \dfrac{1}{x^2-1}\sqrt{y}$ *viene considerata, e non esiste un intorno aperto di* $(x_1, 0)$ *in cui* f *è di classe* $\mathcal{C}^1$*.*
Lo stesso discorso può essere applicato al problema di Cauchy di partenza, se la condizione iniziale è $y\,(0) = 0$*. Le quattro funzioni*

$$y_1\,(x) \equiv 0\,; \qquad y_2\,(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}\log^2(1-x)}{(x+1)^2} & \textit{se } x \geq 0 \\[2ex] 0 & \textit{se } x < 0 \end{cases};$$

$$y_3\,(x) = \frac{\frac{1}{4}\log^2(1-x)}{(x+1)^2}\,; \qquad y_4\,(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{4}\log^2(1-x)}{(x+1)^2} & \textit{se } x < 0 \end{cases}$$

sono soluzioni, in $(-1,1)$*, del problema di Cauchy iniziale, con* $b = 0$*.* ▲

6.6 Equazioni di Riccati

Sono note come equazioni di Riccati le equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0}$$

dove a, b, c sono tre funzioni definite in un comune intervallo I; se esse sono continue e $x_0 \in I$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione locale $y = y(x)$ per il Teorema 6.2.
Nel caso sia nota una soluzione particolare $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$ dell'equazione, ma non del problema di Cauchy (e quindi $y\,(x_0) \neq \widetilde{y}(x_0)$), mediante un cambiamento di variabile dipendente possiamo

ricondurci ad un nuovo problema di Cauchy in cui l'equazione differenziale è lineare. Infatti, ponendo

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + \frac{1}{z(x)} \qquad , \qquad y'(x) = \widetilde{y}'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

dall'equazione differenziale si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{y}'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} + a(x)\left(\widetilde{y}(x) + \frac{1}{z(x)}\right) + b(x)\left(\widetilde{y}(x) + \frac{1}{z(x)}\right)^2 + c(x) \\ &= -\frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{a(x)}{z(x)} + 2b(x)\frac{\widetilde{y}(x)}{z(x)} + \frac{b(x)}{z^2(x)} \end{aligned}$$

da cui

$$z'(x) - [a(x) + 2b(x)\widetilde{y}(x)]\, z(x) = b(x)\ ;$$

così, la funzione z è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' - [a(x) + 2b(x)\widetilde{y}(x)]\, z = b(x) \\ z(x_0) = \dfrac{1}{y_0 - \widetilde{y}(x_0)} \end{cases} .$$

Esempio 14 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \left(y^2 + y - \dfrac{3}{4}\right)\cos x = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

e osserviamo che tra le soluzioni dell'equazione vi sono le funzioni costanti $y(x) = c$ con c tale che $\left(c^2 + c - \frac{3}{4}\right) = 0$, cioè $c = 1/2$ e $c = -3/2$; esse sono ovviamente le soluzioni dei problemi di Cauchy con $y_0 = 1/2$ e $y_0 = -3/2$. Per determinare la soluzione negli altri casi, poniamo, ad esempio,

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{z(x)} \qquad , \qquad y'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

e quindi otteniamo

$$\begin{cases} z' - 2z\cos x = \cos x \\ z(0) = \dfrac{1}{y_0 - 1/2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z(x) &= \exp\left(\int_0^x 2\cos t\, dt\right) \cdot \left\{\frac{1}{y_0 - 1/2} + \int_0^x \exp\left(-\int_0^t 2\cos s\, ds\right)\cos t\, dt\right\} = \\ &= e^{2\sin x}\left\{\frac{1}{y_0 - 1/2} + \int_0^x e^{-2\sin t}\cos t\, dt\right\} = e^{2\sin x}\left\{\frac{1}{y_0 - 1/2} - \frac{\left(e^{-2\sin x} - 1\right)}{2}\right\} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3 + 2y_0}{2\,(2y_0 - 1)}e^{2\sin x} = \frac{e^{2\sin x} - \frac{2y_0 - 1}{2y_o + 3}}{2\frac{2y_0 - 1}{2y_o + 3}} . \end{aligned}$$

Perciò

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\frac{2y_0-1}{2y_o+3}}{e^{2\sin x} - \frac{2y_0-1}{2y_o+3}}\ ,$$

che è definita nel più ampio intervallo I contenente l'origine in cui $z(x) \neq 0$; poichè la funzione $g(x) = e^{-2\sin x}$ assume tutti e soli i valori dell'intervallo $[e^{-2}, e^2]$, se $\dfrac{2y_0-1}{2y_o+3} \notin [e^{-2}, e^2]$ la soluzione è definita in $\mathbb{R}$, mentre se $\dfrac{2y_0-1}{2y_o+3} \in [e^{-2}, e^2]$ la soluzione è definita in un intervallo limitato. ▲

Esempio 15 *L'equazione differenziale*

$$y' - y^2 + 2y\log x - \log^2 x - \frac{1}{x} = 0 \tag{6.18}$$

ammette la funzione $\widetilde{y}(x) = \log x$ come soluzione in $(0, +\infty)$. Cerchiamo poi la soluzione $y = y(x)$ dell'equazione 6.18 che soddisfa $y(1) = a \in \mathbb{R}$. Ovviamente per $a = 0$ abbiamo la $\widetilde{y}$. Se invece $a \neq 0$ poniamo $y(x) = \log x + \dfrac{1}{z(x)}$ ed otteniamo l'equazione lineare $z' = -1$, le cui soluzioni sono $z(x) = -x + c$, $c \in \mathbb{R}$, e quindi

$$y(x) = \log x + \frac{1}{1 + \frac{1}{a} - x} \tag{6.19}$$

è la soluzione cercata. Essa è definita nel più ampio intervallo $I \subseteq (0, +\infty)$, contenente il punto $x_0 = 1$, in cui il denominatore nella (6.19) non si annulla. In particolare la soluzione è definita in $(0, +\infty)$ se e solo se $-1 \leq a \leq 0$. ▲

6.7 Equazioni omogenee

Prendono il nome di equazioni omogenee le equazioni differenziali del tipo

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

dove g è una funzione reale di una sola variabile reale.
Rispetto alla nuova variabile dipendente $t(x) = y(x)/x$ abbiamo

$$y(x) = xt(x) \qquad , \qquad y'(x) = t(x) + xt'(x) \tag{6.20}$$

e questo ci permette di passare allo studio della equazione differenziale

$$t + xt' = g(t)$$

in cui le variabili possono essere separate.

Esempio 16 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \\ y(2) = 4 \end{cases} .$$

Per il Teorema 6.2 esiste un'unica soluzione locale. La sostituzione (6.20) porta al problema di Cauchy

$$\begin{cases} tt' = \frac{1}{x} \\ t(2) = 2 \end{cases}$$

che ha come soluzione la funzione

$$t(x) = \sqrt{4 + 2\log\frac{x}{2}}$$

definita nell'intervallo $\left(2e^{-2}; +\infty\right)$. *Così, la soluzione del problema di Cauchy assegnato è* $y(x) = x\sqrt{4 + 2\log\frac{x}{2}}$, *per* $x \in \left(2e^{-2}; +\infty\right)$. ▲

Esempio 17 *Consideriamo, per* $a \in \mathbb{R}$, *il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} xy' = y(1 + \log y - \log x) \\ y(1) = e^a \end{cases} .$$

Poichè la funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{x}\left(1 + \log\frac{y}{x}\right)$$

è di classe $\mathcal{C}^1$ *in* $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, *il problema ammette un'unica soluzione locale. Con la sostituzione (6.20) arriviamo a*

$$\begin{cases} t' = \frac{t\log t}{x} \\ t(1) = e^a \end{cases} .$$

La funzione costante $t(x) = 1$ *risolve questo problema nel caso* $a = 0$, *per cui* $y(x) = x$ *risolve il problema iniziale in* $(0, +\infty)$ *quando* $a = 0$. *Per* $a \neq 0$ *invece:*

$$\int_{e^a}^{t(x)} \frac{ds}{s\log s} = \int_1^x \frac{ds}{s}$$

da cui

$$\left|\frac{\log t(x)}{a}\right| = x .$$

Inoltre, la funzione $s \longmapsto \frac{1}{s\log s}$ *non è integrabile in un intorno di* $s = 1$, *per cui gli estremi di integrazione* e^a *e* $t(x)$ *devono essere entrambi maggiori di* 1, *oppure entrambi in* $(0,1)$. *Così,* $\log t(x)$ *ed* a *hanno lo stesso segno, e quindi* $t(x) = e^{ax}$, *il che porta alla soluzione* $y(x) = xe^{ax}$.▲