

Analisi Matematica 1
 Corso di Laurea in Matematica
 (proff. M.Salvatori e C. Zanco)

Prova scritta d'esame del 13.01.2010

COGNOME:..... NOME:

N. MATRICOLA:..... Corso di Laurea:

1] (3 punti) Le soluzioni della disequazione

$$\frac{3|x|}{\sqrt{x+2}+x} \geq 1$$

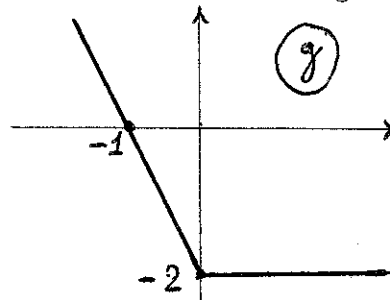
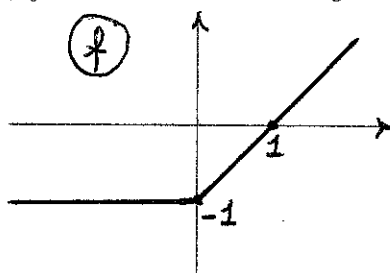
sono:

2] (4 punti) Scrivere, in forma algebrica, le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

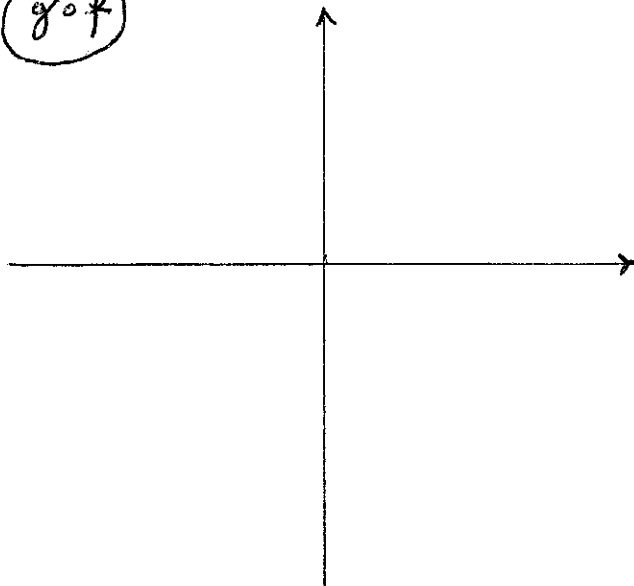
$$(z - 2i)^3 = 2(1 + i)^4.$$

Soluzioni:

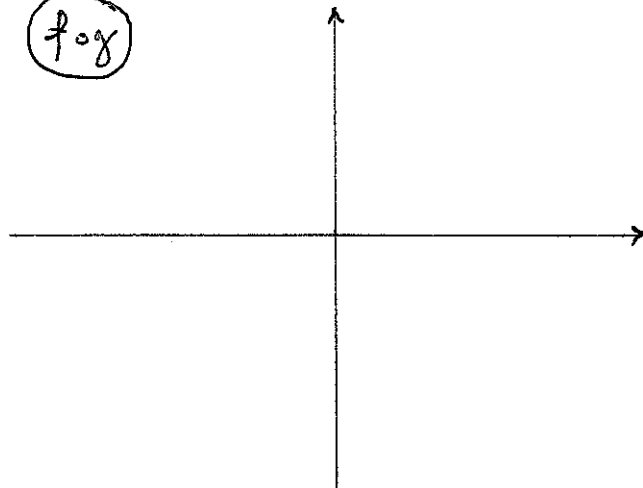
3] (4 punti) I diagrammi delle funzioni reali di variabile reale f e g sono quelli in figura: ciascuno è unione di due semirette, f è costante su \mathbb{R}^- e g è costante su \mathbb{R}^+ . Tracciare i diagrammi delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.



(g ∘ f)



(f ∘ g)



4] (3 punti) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}.$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

5] (5 punti) Determinare la classe limite della successione

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1} + \operatorname{tg} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \right)^n \quad n = 2, 3, \dots$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

6] (6 punti) Dopo aver determinato l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{x + \log(1 + e^{x^3})}{x + 4} \log\left(\frac{x + 3}{x + 1}\right),$$

determinare le equazioni degli eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) al suo diagramma (entrambi i logaritmi sono intesi in base "e").

(Può essere utile tenere presente che, per $t \rightarrow 0$, si ha $\log(1 + t) = t - t^2/2 + o(t^2)$.)

Insieme di definizione:

Equazioni degli asintoti:

7] (6 punti) Al variare del parametro reale positivo α , discutere il carattere semplice e assoluto della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^{3\alpha} + n^2 \log^{2\alpha} n}.$$

(Scrivere uno svolgimento completo)

8] (5 punti) Sia A un aperto di \mathbb{R}^2 dotato della metrica euclidea e sia S un segmento chiuso contenuto in A . Mostrare che esiste un rettangolo non banale contenuto in A e contenente S . L'affermazione continua a valere se S non è chiuso?