Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova in itinere del 17.11.2009

COGNOME:.. NOME: ....

N. MATRICOLA:..................... Corso di Laurea: ....

1] *(3 punti)* Le soluzioni della disequazione

$$\sqrt{4 \arcsin\left(2-x^2\right)-\pi}+\log_4|x|>0$$

sono: ....

2] *(5 punti)* Sia

$$A=\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \quad \text{dove} \quad x_n=\frac{(-1)^n(3n-2)}{n 2^{n(1+\cos n\pi)}}.$$

Allora

$\sup A=$ ....; $\inf A=$ ....; $\limsup_{n\to+\infty} x_n=$ ....; $\liminf_{n\to+\infty} x_n=$ ....

Breve giustificazione:

3] *(4 punti)* Le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$i z^3 \bar{z}=|z|^2+2$$

sono: ....

4] *(4 punti)* Sia

$$a_n = \frac{\log^3\left(\mathrm{Ch}\dfrac{1}{n}\right)}{1+\cos\left(\pi\sqrt{9+1/n^3}\right)}.$$

Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Breve giustificazione:

5] *(5 punti)* Rappresentare nel piano complesso le immagini dei seguenti insiemi.

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) > 0,\ \mathrm{Re}\,(z) < 0 \right\};$$

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \ : \ w = \left(1 + i\sqrt{3}\right) z, \quad z \in A \right\};$$

$$C = \left\{ t \in \mathbb{C} \ : \ t^2 = \frac{1}{w}, \quad w \in B \right\}.$$

6] *(4 punti)* Ordinati i razionali di $\mathbb{R}$ in una successione $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$, sia

$$S = \left\{ \left(r_n, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2, \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Individuare il derivato di S rispetto alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$ motivando la risposta.

7] *(5 punti)* Al variare del parametro reale α, determinare, ove esista,

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha^n \frac{(-3)^n \log(2^n + 1) - 2^n n^6}{3^{n/2} \log(n^2 + 1) + 5n}.$$

(*Scrivere uno svolgimento completo*).

8] Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x+\operatorname{sgn}(x-1/2)$ e sia d_f la metrica in $\mathbb{R}$ definita da

$$d_f(x,y)=|f(x)-f(y)| \qquad \text{per ogni } x,y\in\mathbb{R}.$$

a) *(3 punti)* Nello spazio metrico $(\mathbb{R},d_f)$ sia $B(p,r)$ l'intorno circolare di p di raggio r. Determinare, al variare del raggio $r>0$, gli intorni $B(1,r)$.

b) *(5 punti)* Sia

$$S=\left\{x=\frac{k}{2^n}\ :\ k,n\in\mathbb{N} \text{ e } 1\le k<2^n\right\}.$$

Determinare gli insiemi S°, ∂S, $\overline{S}$ sia relativamente alla metrica euclidea di $\mathbb{R}$ sia relativamente a d_f. (Si ricorda che: $\operatorname{sgn}(t)=t/|t|$ se $t\neq0$, $\operatorname{sgn}(0)=0$.)

(*Scrivere uno svolgimento completo*).

Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M. Salvatori e C. Zanco)

Prova in itinere del 17.11.2009

COGNOME:.. NOME: ....

N. MATRICOLA:..................... Corso di Laurea: ....

1] *(3 punti)* Le soluzioni della disequazione

$$\sqrt{\pi - 3\arcsin\left(x^2-2\right)} + \log_3|x| > 0$$

sono: ....

2] *(5 punti)* Sia

$$A = \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \quad \text{dove} \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}(4n-1)}{n3^{n(1-\cos n\pi)}}.$$

Allora

$\sup A = ...$; $\inf A = ...$; $\limsup_{n\to+\infty} x_n = ...$; $\liminf_{n\to+\infty} x_n = ...$

Breve giustificazione:

3] *(4 punti)* Le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^3\overline{z} = i\left(|z|^2 + 2\right)$$

sono: ....

4] *(4 punti)* Sia

$$a_n = \frac{1+\cos\left(\pi\sqrt{9+1/n^2}\right)}{\log^2\left(\mathrm{Ch}\frac{1}{n}\right)}.$$

Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Breve giustificazione:

5] *(5 punti)* Rappresentare nel piano complesso le immagini dei seguenti insiemi.

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; \mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) < 0, \; \mathrm{Re}\,(z) > 0 \right\} ;$$

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \; : \; w = \left(1 - i\sqrt{3}\right) z, \quad z \in A \right\} ;$$

$$C = \left\{ t \in \mathbb{C} \; : \; t^2 = \frac{1}{w}, \quad w \in B \right\} .$$

6] *(4 punti)* Ordinati i razionali di $\mathbb{R}$ in una successione $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$, sia

$$S = \left\{ \left(r_n, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Individuare il derivato di S rispetto alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$ motivando la risposta.

7] *(5 punti)* Al variare del parametro reale α, determinare, ove esista,

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha^n \frac{5^{n/2} \log(5^n + 1) - 2^n n^5}{(-5)^n \log(n^5 + 1) + 3n}.$$

(*Scrivere uno svolgimento completo*).

8] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \operatorname{sgn}(x - 1/3)$ e sia d_f la metrica in $\mathbb{R}$ definita da

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) *(3 punti)* Nello spazio metrico $(\mathbb{R}, d_f)$ sia $B(p, r)$ l'intorno circolare di p di raggio r. Determinare, al variare del raggio $r > 0$, gli intorni $B(1, r)$.

b) *(5 punti)* Sia

$$S = \left\{ x = \frac{k}{3^n} : \ k, n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq k < 3^n \right\}.$$

Determinare gli insiemi S°, ∂S, $\overline{S}$ sia relativamente alla metrica euclidea di $\mathbb{R}$ sia relativamente a d_f. (Si ricorda che: $\operatorname{sgn}(t) = t/|t|$ se $t \neq 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$.)

(*Scrivere uno svolgimento completo*).