Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica
(proff. M. Salvatori-C. Zanco)

Seconda prova parziale del 21.12.2009

COGNOME:.. NOME: ....

N. MATRICOLA:..................... Corso di Laurea: ....

1] *(5 punti)* Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\sin \dfrac{1}{n^4}}{1 - \cos \dfrac{1}{n}} \log\left(1 + 5^n\right).$$

Determinare il carattere delle seguenti serie.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + a_n^2\right)$ ....

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ ....

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \sinh\left(a_n\right)$ ....

(Breve spiegazione)

2] *(7 punti)* Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare, se esiste, l'asintoto obliquo a $+\infty$ e a $-\infty$:

(a) $f(x) = \log\left[3^x\left(\sqrt{1 + \mathrm{e}^{-x}} - 1\right)\right]$;

(b) $g(x) = x + 3 + \sin\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)$;

(c) $h(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2x^4} + x$.

(a) ....

(b) ....

(c) ....

3] *(4 punti)* Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ continua in ogni punto dell'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$.
Stabilire, motivando la risposta, se è sempre possibile estendere f con continuità a tutto $\mathbb{R}$.

4] *(6 punti)* Sia $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita

$$f\,(x) = \frac{x^3 \log(5^x + 3^{\frac{1}{x}})}{\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}} - \cos x}.$$

Stabilire se f può essere prolungata con continuità in $x = 0$.
(*Scrivere uno svolgimento completo*)

5] *(7 punti)* Stabilire, al variare del parametro reale a il carattere della seguente serie, distinguendo tra convergenza semplice e assoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \arctan\left(a^n\right).$$

(*Scrivere uno svolgimento completo*)

6] *(6 punti)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \operatorname{sgn}(x)$ e sia d_f la metrica in $\mathbb{R}$ definita da

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Siano C_e la classe dei sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ nella metrica euclidea e C_f la classe dei sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ nella metrica d_f.
Discutere eventuali relazioni di inclusione fra C_e e C_f.
Stabilire se $(\mathbb{R}, d_f)$ è completo.
(Si ricorda che: $\operatorname{sgn}(t) = t/|t|$ se $t \neq 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$.)

(*Scrivere uno svolgimento completo*)