

Corsi di laurea in Matematica e Matematica per le Applicazioni  
**Programma d'esame di Analisi Matematica I (a.a. 2008/09)**

Proff. Elide Terraneo e Maura Salvatori

**1. Campo reale.** Definizione di numero reale.  $\sqrt{2}$  non è razionale (\*). Insiemi totalmente ordinati. Estremo superiore ed inferiore; massimo e minimo di un insieme.  $\mathbf{R}$  e la proprietà del "sup". Densità dei razionali in  $\mathbf{R}$  (\*). Operazioni:  $\mathbf{R}$  è campo ordinato. Radice n-esima di un numero reale positivo. Numeri reali estesi.

**2. Numeri complessi.** Definizioni di numeri complessi e loro operazioni.  $\mathbf{C}$  è campo non ordinato. Forma algebrica. Coniugato e modulo di un numero complesso e loro proprietà (\*). Forma trigonometrica e operazioni in forma trigonometrica (\*), formula di De Moivre (\*) e radici n-esime di un numero complesso (\*). Teorema fondamentale dell'algebra.

**3. Insiemi.** Richiami di teoria elementare degli insiemi. Insiemi finiti, infiniti ed equipotenti. Insiemi numerabili. Sottoinsiemi finiti di insiemi numerabili, unioni numerabili e prodotto cartesiano di insiemi numerabili (\*). Potenza del continuo. Non numerabilità di  $\mathbf{R}$  (\*). Lo spazio euclideo  $\mathbf{R}^n$ , la norma euclidea e sue proprietà (\*).

**4. Spazi metrici.** Definizione di spazio metrico e intorno circolari. Esempi. Proprietà di Hausdorff (\*). Punti interni, esterni, di frontiera. Punti isolati, punti di accumulazione e loro caratterizzazione (\*). Insiemi aperti, insiemi chiusi e loro caratterizzazione (\*). Unioni e intersezioni di aperti (\*). Chiusura di un insieme. Insiemi limitati. Insiemi compatti e loro caratterizzazione. Teoremi di Heine-Borel e di Bolzano-Weierstrass.

**5. Successioni.** Successioni in spazi metrici e convergenza. Unicità del limite (\*). Limitatezza delle successioni convergenti (\*). Successioni a valori reali e loro comportamento. Operazioni in  $\mathbf{R}$  esteso e calcolo dei limiti. Forme d'indecisione. Teoremi della permanenza del segno e del confronto (\*). Successioni monotone e loro regolarità (\*). Il numero "e". I limiti fondamentali che si deducono da "e" (\*). Criterio del rapporto (\*). Confronto tra infiniti ed infinitesimi, relazioni di "asintotico" e "o piccolo". Sottosuccessioni estratte di una successione. Regolarità delle sottosuccessioni di una successione regolare (\*). Classe limite e proprietà; massimo e minimo limite e proprietà. Successioni di Cauchy in spazi metrici. Spazi metrici completi. Completezza di  $\mathbf{R}^n$ .

**6. Funzioni e limiti di funzioni.** Funzioni tra spazi metrici: definizione di limite ed esempi. Limiti di funzioni e limiti successionali (\*). Unicità del limite (\*). Funzioni reali di variabile reale. Definizioni di limiti. Funzioni limitate, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo di una funzione. Teoremi della permanenza del segno e del confronto. Limiti e operazioni. Limiti notevoli. Confronto tra infiniti ed infinitesimi, relazioni di "asintotico" e "o piccolo". Asintoti di funzioni.

**7. Continuità.** Continuità di funzioni tra spazi metrici. Caratterizzazione della continuità con le controimmagini di aperti (\*). Continuità delle funzioni composte. Continuità delle funzioni reali di variabile reale. Funzioni elementari e continuità. Continuità e operazioni. Classificazione delle discontinuità. Continuità e compattezza. Teorema di Weierstrass (\*). Teoremi degli zeri, dei valori intermedi e di Darboux (\*). Funzioni monotone e esistenza dei limiti (\*). Discontinuità delle funzioni monotone (\*). Continuità della funzione inversa. Uniforme continuità: definizione, teorema di Heine-Cantor.

**8. Calcolo differenziale.** Derivabilità: definizione e significato geometrico. Retta tangente. Derivabilità e continuità (\*). Derivate delle funzioni elementari. Derivate e operazioni. Derivabilità della funzione composta. Derivabilità della funzione inversa (\*). Punti di non derivabilità. Estremanti relativi. Teorema di Fermat (\*). Teoremi di Rolle e di Cauchy (\*). Teorema di Lagrange o dell'incremento finito (\*). Crescere e decrescere in un intervallo. Caratterizzazioni delle funzioni monotone, costanti e strettamente monotone in un intervallo (\*). Criterio per estremanti (\*). Derivata come limite di derivate. Discontinuità della funzione derivata. Teorema de l'Hôpital. Derivate successive. Formula di Taylor con resto secondo Peano (\*). Unicità dello sviluppo (\*). Formula di Taylor con resto secondo Lagrange. Convessità in un intervallo. Punti di flesso.

Degli argomenti contrassegnati con (\*) potrà essere richiesta la dimostrazione in sede di esame orale.

**Seminario integrativo:** Fuzioni uniformemente continue e successioni definite per ricorrenza.

**Testi consigliati:**

- P.M. Soardi *Lezioni di Analisi Matematica*, Città Studi Edizioni, 2006.
- W. Rudin. *Principi di Analisi Matematica*, Mc Graw Hill Libri, Italia.
- L. De Michele, G. L. Forti, *Analisi Matematica: problemi ed esercizi*, CLUP.
- E. Giusti, *Esercizi e complementi di Analisi Matematica*, Bollati.