corso di laurea in Matematica (F7X)

ANALISI MATEMATICA 2

03/07/2012 prof. M.Vignati vers. a

Durata della prova scritta: **120 minuti**.
Di tutti gli esercizi svolti va motivata la risposta.

1a] (8 punti) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-2}-1}{\sqrt{x+1}\,(x-1)^{\alpha-1}}\,dx$$

è convergente?

2a] (6 p.ti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) := \frac{x^2-y^2-4xz+4z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

e, per $R>0$, sia $E_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.
Calcolare

$$m(R) := \inf_{E_R} f \qquad \text{e} \qquad M(R) := \sup_{E_R} f\,.$$

3a] (6 p.ti) Calcolare, al variare del parametro reale β, il valore di

$$L_\beta := \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left|\dfrac{e}{x-1}\right| - e^x}{\beta x^3 - 4x^\beta}\,.$$

4a] (4 p.ti) Discutere l'invertibilità della funzione reale di variabile reale

$$F(x) := \int_1^x \frac{\log\left(\frac{1}{2}+t^2\right)}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$$

in un intorno del punto $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5a] (6 p.ti) Calcolare l'area della regione piana

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2y < 2x;\ 1 < xy < 3\right\}.$$

corso di laurea in Matematica (F7X)

ANALISI MATEMATICA 2

03/07/2012 prof. M.Vignati vers. b

Durata della prova scritta: **120 minuti**.
Di tutti gli esercizi svolti va motivata la risposta.

1b] (8 punti) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-3}-1}{\sqrt{x+2}\,(x-1)^{\alpha-2}}\,dx$$

è convergente?

2b] (6 p.ti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) := \frac{x^2 - y^2 - 6xz + 9z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

e, per $R > 0$, sia $E_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Calcolare

$$m(R) := \inf_{E_R} f \qquad \text{e} \qquad M(R) := \sup_{E_R} f\,.$$

3b] (6 p.ti) Calcolare, al variare del parametro reale β, il valore di

$$L_\beta := \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - \log\left|\dfrac{e}{x-1}\right|}{\beta x^3 - x^\beta}\,.$$

4b] (4 p.ti) Discutere l'invertibilità della funzione reale di variabile reale

$$F(x) := \int_2^x \frac{e^t - 2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

in un intorno del punto $x_0 = \log 2$.

5b] (6 p.ti) Calcolare l'area della regione piana

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 3y < 3x;\ 2 < xy < 3\right\}.$$

corso di laurea in Matematica (F7X)

ANALISI MATEMATICA 2

03/07/2012 prof. M.Vignati vers. C

Durata della prova scritta: **120 minuti**.
Di tutti gli esercizi svolti va motivata la risposta.

1c] (8 punti) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-2}-1}{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x}-1\right)^{2\alpha-1}}\,dx$$

è convergente?

2c] (6 p.ti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) := \frac{y^2 - x^2 - 2yz + z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

e, per $R > 0$, sia $E_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.
Calcolare

$$m(R) := \inf_{E_R} f \qquad \text{e} \qquad M(R) := \sup_{E_R} f \,.$$

3c] **(**6 p.ti) Calcolare, al variare del parametro reale β, il valore di

$$L_\beta := \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \log\left|\dfrac{x-1}{e}\right|}{\beta x^3 - 2x^\beta}\,.$$

4c] **(**4 p.ti) Discutere l'invertibilità della funzione reale di variabile reale

$$F(x) := \int_{-1}^{x} \frac{\sqrt[3]{2t^2-1}}{\arctan(1+t^2)}\,dt$$

in un intorno del punto $x_0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5c] (6 p.ti) Calcolare l'area della regione piana

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4y < 4x;\ 1 < xy < 5\Big\}.$$