corso di laurea in Matematica (F7X)

ANALISI MATEMATICA 2

19/11/2012 prof. M.Vignati vers. a

Durata: **120 minuti**. Di tutti gli esercizi svolti va motivata la risposta.

1a] (7 punti) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 > xy^2\}$, e sia $f : E \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + x^2 - xy^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \in E \setminus \{\mathbf{0}\} \\ 1/3 & \text{se } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Determinare tutti i versori $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ per i quali esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.

2a] (9 p.ti) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) := \begin{cases} a_k & \text{se } x = k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\} \\ \dfrac{x(x-2)\log x}{\sin(\pi x)} & \text{se } x \notin \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

i) Per quali $k \in \mathbb{N}_0$ e quali $a_k \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = k$?

ii) Per quali $k \in \mathbb{N}_0$ e quali $a_k \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $x = k$?

3a] (7 p.ti) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} e^{\left(a^2+a-2\right)x} \log\left(1 + e^{ax}\right)\, dx$$

è convergente.

4a] (7 p.ti) Sia f la funzione reale di due variabili reali definita come

$$f(x,y) := \log\left(1 - \sqrt{x}\left(y - \sqrt{x}\right)\right) .$$

Determinare il valore $R > 0$ per il quale la misura 2−dimensionale ("area") dell'insieme

$$E_R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < R,\ f(x,y) < 0\right\}$$

vale 8.

corso di laurea in Matematica (F7X)

ANALISI MATEMATICA 2

19/11/2012 prof. M.Vignati vers. b

Durata: **120 minuti**. Di tutti gli esercizi svolti va motivata la risposta.

1b] (7 punti) Sia f la funzione reale di due variabili reali definita come

$$f(x,y) := \log\left(1 - \sqrt{x}\left(y - \sqrt{x}\right)\right) .$$

Determinare il valore $R > 0$ per il quale la misura 2−dimensionale ("area") dell'insieme

$$E_R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < R\,,\ f(x,y) < 0\right\}$$

vale 5.

2b] (7 p.ti) Stabilire per quali valori del parametro $b \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} e^{\left(b^2+b-2\right)x} \log\left(1+e^{bx}\right)\, dx$$

è convergente.

3b] (7 p.ti) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+1 > xy^2\}$, e sia $f : E \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(1+x^2-xy^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \in E \setminus \{\mathbf{0}\} \\[2ex] 1/4 & \text{se } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Determinare tutti i versori $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ per i quali esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.

4b] (9 p.ti) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) := \begin{cases} b_n & \text{se } x = n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\} \\[2ex] \dfrac{x(x-2)\log x}{\sin(\pi x)} & \text{se } x \notin \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

i) Per quali $n \in \mathbb{N}_0$ e quali $b_n \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = n$?

ii) Per quali $n \in \mathbb{N}_0$ e quali $b_n \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $x = n$?