

STATISTICA MATEMATICA
30 Gennaio 2012

VERSIONE ITALIANA

1. Sia $\underset{\sim}{Z}$ una matrice aleatoria $n \times p$ in cui le righe costituiscono un campione i.i.d. per una $N_p(\underline{0}, \Sigma)$ e sia \underline{a} un vettore colonna deterministico in \mathbb{R}^n . Si mostri che

$$\underset{\sim}{Z}^T \underline{a} \sim N_p(\underline{0}, \underline{a}^T \underline{a} \Sigma).$$

2. Siano

$$\underline{Y}_{11}, \dots, \underline{Y}_{1,n_1} \quad i.i.d. \sim N_p(\underline{\mu}_1, \Sigma)$$

$$\underline{Y}_{21}, \dots, \underline{Y}_{2,n_2} \quad i.i.d. \sim N_p(\underline{\mu}_2, \Sigma)$$

due campioni di vettori aleatori fra loro indipendenti, aventi la stessa matrice di covarianza. Si imposti un test di ipotesi per verificare

$$H_0 : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$$

contro tutte le alternative.

3. Si consideri il modello di regressione lineare multivariato

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{B} + \Xi, \\ \underline{Y}_i^T \sim N_p(\underline{X}_i^T \underset{\sim}{B}, \Sigma), \quad i = 1, \dots, n \\ Cov(\underline{Y}_i, \underline{Y}_j) = 0, \quad \text{se } i \neq j \end{array} \right. \quad (1)$$

dove $\underset{\sim}{Y}$ e Ξ sono matrici aleatorie $n \times p$, $\underset{\sim}{X}$ è una matrice deterministica $n \times (q+1)$, $\underset{\sim}{B} = [\beta_{ij}]$ è una matrice $(q+1) \times p$ di parametri, e \underline{Y}_i^T e \underline{X}_i^T sono l' i -esima riga di $\underset{\sim}{Y}$ e $\underset{\sim}{X}$, rispettivamente.

Si determini un intervallo di fiducia a livello $1 - \alpha$ per il generico elemento β_{ij} di $\underset{\sim}{B}$, basato sullo stimatore dei minimi quadrati di $\underset{\sim}{B}$.

ENGLISH VERSION

1. Let \tilde{Z} be an $n \times p$ random data matrix in which the rows form an i.i.d. sample for a $N_p(\underline{0}, \tilde{\Sigma})$ and let \underline{a} be a deterministic vector in \mathbb{R}^n . Show that

$$\tilde{Z}^T \underline{a} \sim N_p(\underline{0}, \underline{a}^T \tilde{\Sigma} \underline{a}).$$

2. Let

$$\underline{Y}_{11}, \dots, \underline{Y}_{1,n_1} \text{ i.i.d. } \sim N_p(\underline{\mu}_1, \tilde{\Sigma})$$

$$\underline{Y}_{21}, \dots, \underline{Y}_{2,n_2} \text{ i.i.d. } \sim N_p(\underline{\mu}_2, \tilde{\Sigma})$$

be two independent samples of random vectors, having the same covariance matrix. Describe a method to test

$$H_0 : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$$

against all alternatives.

3. Consider the multivariate linear regression model

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{X}\tilde{B} + \tilde{\Xi}, \\ \underline{Y}_i^T \sim N_p(\underline{X}_i^T \tilde{B}, \tilde{\Sigma}), \quad i = 1, \dots, n \\ Cov(\underline{Y}_i, \underline{Y}_j) = 0, \quad \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

where \tilde{Y} and $\tilde{\Xi}$ are $n \times p$ random matrices, \tilde{X} is an $n \times (q+1)$ deterministic matrix, $\tilde{B} = [\beta_{ij}]$ is a $(q+1) \times p$ matrix of parameters, and \underline{Y}_i^T and \underline{X}_i^T are the i -th row of \tilde{Y} and \tilde{X} , respectively.

Find a confidence interval at the level $1 - \alpha$ for the general element β_{ij} of \tilde{B} , based on the least squares estimator of \tilde{B} .