Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 7.4.2003

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x+x^2}-x, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-\log x)}{\log x}.$$

(2) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $x^5-x-1=0$ e determinare ciascuna di esse con una cifra decimale esatta.

(3) Studiare il grafico della funzione:

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x-3}.$$

(Eventuali asintoti obliqui e convessità inclusi).

(4) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{x^2-1}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2-4}.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-17}{1+x+3x^3}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} x\cdot\sin\Big(\frac{1}{x^2+5}\Big)\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \Big[\sin\Big(\frac{1}{x}\Big)-\frac{1}{x}\Big]\,dx.$$

(6) Sia $f(x,y)=e^x-xe^y$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} 3y''-2y'-y=(5x-8)e^x \\ y(0)=2 \\ y'(0)=2. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x=0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y'=3\sqrt{y}(1-\sqrt{y})\sqrt{x} \\ y(0)=1/4. \end{cases}$$

Suggerimento: l'equazione è a variabili separabili e l'equazione (**non** il P.C.) ammette due soluzioni costanti.

1. Soluzioni

(1) • Calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3}$.

Consideriamo la funzione $\frac{1-\cos(x^2)}{x^3}$. Per $x \to 0^+$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. Dal noto sviluppo $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ si ottiene:

$$\frac{1-\cos(x^2)}{x^3} = \frac{1 - 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^3} \sim \tfrac{x}{2}.$$

Il limite è dunque 0.

• Calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x+x^2} - x$.

Consideriamo la funzione $\sqrt{1+x+x^2} - x$. Per $x \to +\infty$ entrambi gli addendi divergono; occorre quindi stabilire la "velocità" con cui essi divergono. Raccogliendo x^2 sotto radice si ha:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x+x^2} - x &= x\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - x = x\Big(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} - 1\Big) = x\Big(\big(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\big)^{1/2} - 1\Big)\\ &= x\Big(1 + \frac{1}{2}\big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\big) + o\big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\big) - 1\Big) = x\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\big) + o\big(\frac{1}{x}\big)\Big)\\ &= x\Big(\frac{1}{2x} + o\big(\frac{1}{x}\big)\Big) = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Si noti che $1/x + 1/x^2 \sim 1/x$ quando x diverge e che quindi $o(1/x + 1/x^2) = o(1/x)$.

• Calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-\log x)}{\log x}$.

Consideriamo la funzione $\frac{\log(x-\log x)}{\log x}$. E' noto che x diverge più rapidamente di $\log x$, di conseguenza raccogliendo x a numeratore si ottiene che:

$$\frac{\log(x-\log x)}{\log x} = \frac{\log(x(1-\frac{\log x}{x}))}{\log x} = \frac{\log x + \log(1 - \frac{\log x}{x})}{\log x} = \frac{\log x + o(1)}{\log x} = 1 + o(1) \to 1.$$

(2) Scriviamo l'equazione nella forma $x^5 = x + 1$. Dal confronto del grafico di x^5 con la retta $x+1$ si scopre che esiste un'unica soluzione, che chiameremo α, e che appartiene all'intervallo $(1,2)$. Per localizzare α utilizziamo il metodo di bisezione. Sia $f(x) = x^5 - x - 1$, allora

$$\begin{aligned}&f(3/2) > 0 \text{ e } f(1) < 0 &&\Longrightarrow \alpha \in (1, 3/2)\\ &f(5/4) > 0 &&\Longrightarrow \alpha \in (1, 5/4)\\ &f(9/8) < 0 &&\Longrightarrow \alpha \in (9/8, 5/4)\\ &f(19/16) > 0 &&\Longrightarrow \alpha \in (9/8, 19/16)\end{aligned}$$

e dato che $9/8 = 1,125$ e che $19/16 = 1,1875$, abbiamo la rappresentazione decimale di $\alpha = 1,15 \pm 0,03$.
Usando invece il metodo di Newton si ottiene: $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = x_0 - (x_0^5 - x_0 - 1)/(5x_0^4 - 1)$:

$$\begin{aligned}&x_1 = 1,125000 \qquad &&x_2 = 1,178459 \qquad &&x_3 = 1,167537\\ &x_4 = 1,167304 &&x_5 = 1,167303 &&x_6 = 1,167303\end{aligned}$$

possiamo quindi ritenere "con sicurezza" che $\alpha = 1,167303 \pm 10^{-6}$.

(3) Osserviamo che la funzione è definita in $D := \mathbb{R}\backslash\{3\}$ ed essendo una funzione razionale ammette derivate di ogni ordine in ogni punto del suo dominio D. Osserviamo che $f(x) = (x^2 - x)/(x-3) \sim 6/(x-3)$ per $x \to 3$ e che quindi f presenta in $x = 3$ un asintoto verticale. Sempre dalla formula $f(x) = (x^2 - x)/(x-3) \sim 6/(x-3)$ per $x \to 3$ segue che f assume valori positivi per $x \to 3^+$ e negativi per $x \to 3^-$. E' facile constatare che la funzione diverge quando $x \to \infty$; è quindi possibile che il suo grafico presenti degli

asintoti obliqui; per determinarli si hanno a disposizione vari metodi, ma in questo caso (f è una funzione razionale) un metodo particolarmente rapido è dato dalla divisione del numeratore per il denominatore, grazie alla quale si ottiene l'identità

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 3} = x + 2 + \frac{6}{x - 3}$$

che nell'ipotesi di $x \to \infty$ dà:

$$f(x) = x + 2 + o(1)$$

da cui segue immediatamente che la retta $y = x + 2$ fa da asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

Consideriamo ora $f'(x)$. Applicando note proprietà della derivata si ottiene

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(x - 3) - (x^2 - x)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 3}{(x - 3)^2}$$

quindi gli unici punti stazionari (ovvero le soluzioni di $f'(x) = 0$) sono i punti $x_1 = 3-\sqrt{6}$ e $x_2 = 3 + \sqrt{6}$; è facile verificare che f' cambia segno nell'attraversare x_1 ed x_2 che quindi devono essere degli effettivi estremanti; di fatto, dalle informazioni precedenti sul comportamento di f nell'intorno del punto $x = 3$ e per $x \to \infty$ segue che x_1 è un **massimo relativo** ed x_2 un **minimo relativo**.

Consideriamo infine $f''(x)$. Si ottiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x - 6)(x - 3)^2 - (x^2 - 6x + 3)2(x - 3)}{(x - 3)^4} = \frac{(2x - 6)(x - 3) - 2(x^2 - 6x + 3)}{(x - 3)^3} \\ &= \frac{12}{(x - 3)^3} \end{aligned}$$

quindi f'' non si annulla in alcun punto del dominio e tuttavia cambia segno nell'attraversare $x = 3$: precisamente, risulta negativa per $x < 3$ e positiva per $x > 3$; concludendo, la funzione f non è globalmente né concava né convessa, ma nella regione $x < 3$ ha un grafico concavo e nella regione $x > 3$ ha un grafico convesso.

(4)

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx = 2 \int \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = 2 \sin(\sqrt{x}) + c.$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\ dx = \tfrac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1}\ dx = \tfrac{1}{2} \log|x^2 - 1| + c.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \tfrac{1}{4} \int \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}\ dx = \tfrac{1}{4}[\log|x - 2| - \log|x + 2|] + c = \tfrac{1}{4} \log\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + c.$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{x-17}{1+x+3x^3}\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x-17}{1+x+3x^3}$ è continua su tale dominio, di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x - 17}{1 + x + 3x^3} \sim \frac{x}{3x^3} = \frac{1}{3x^2}.$$

Dato che $\frac{1}{3x^2}$ è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+5}\right)\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ e l'integranda è continua su tale dominio di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di

$f(x)$ per $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = x \cdot \sin\Big(\frac{1}{x^2+5}\Big) \sim x \cdot \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x}.$$

Dato che la funzione $1/x$ non è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **non esiste**.

- Esistenza di $\int_1^{+\infty} [\sin(1/x) - 1/x] \ dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sin(1/x) - 1/x$. Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che l'argomento di della funzione seno è infinitesima; utilizzando quindi la relazione $\sin \epsilon = \epsilon - \epsilon^3/6o(\epsilon^3)$ (valida per ogni infinitesimo ϵ) abbiamo che

$$f(x) = \sin(1/x) - 1/x = 1/x - 1/(6x^3) + o(1/x^3) - 1/x = -1/(6x^3) + o(1/x^3) \sim -\frac{1}{6x^3}$$

l'integrale proposto quindi **esiste**.

(6) $f(x, y)$ è differenziabile in ogni punto del piano. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} e^x - e^y = 0, \\ -xe^y = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è risolta da $x = 0$, quindi

$$\begin{cases} e^y = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

C'è quindi un unico punto stazionario: $(0, 0)$. Per stabilire se si tratta di un estremante utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xe^y,$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X, Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = X^2 - 2XY.$$

Il discriminante è $(-1)^2 - 0 = 1 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto è un **punto di sella**.

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $3y'' - 2y' - y = 0$ la cui equazione caratteristica è $3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1/3$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x/3}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $3y'' - 2y' - y = (5x - 8)e^x$. Dato che a destra compare una funzione del tipo $p(x)e^x$ con $p(x)$ polinomio di grado 1, sappiamo che deve esistere una soluzione anch'essa della forma $q(x)e^x$ dove $q(x)$ è un polinomio di grado almeno 1 ed al più 3. Cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = (ax + b)e^x$ con a, b parametri da determinarsi.

$$y(x) = (ax + b)e^x \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = (ax + a + b)e^x \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = (ax + 2a + b)e^x,$$

e quindi l'equazione porta a

$$(5x - 8)e^x = 3y'' - 2y' - y = 3 \cdot (ax + 2a + b)e^x - 2 \cdot (ax + a + b)e^x - (ax + b)e^x = 4ae^x$$

è evidente che non esiste alcun valore di a per cui questa equazione valga per ogni valore di x quindi la soluzione non è del tipo $q(x)e^x$ con q di grado 1; dobbiamo dunque ripetere i passaggi precedenti assumendo questa volta che $q(x)$ sia un polinomio di grado 2:

$$\begin{aligned} y(x) &= (ax^2+bx+c)e^x \quad \Longrightarrow \\ y'(x) &= (ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x \quad \Longrightarrow \\ y''(x) &= (ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)e^x, \end{aligned}$$

e quindi l'equazione porta a

$$\begin{aligned} (5x-8)e^x &= 3y''-2y'-y \\ &= 3\cdot(ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)e^x - 2\cdot(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x - (ax^2+bx+c)e^x \\ &= (6ax+6a+4b)e^x \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{cases} 6a &= 5 \\ 6a+4b &= -8 \end{cases} \iff a=5/6, \quad b=-13/4.$$

Osserviamo che c risulta indeterminato: ciò significa che qualsiasi valore di c va bene: la nostra scelta è $c=0$. Quindi $y(x)=(5/6x^2-13/4x)e^x$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x)=Ae^x+Be^{-x/3}+(5/6x^2-13/4x)e^x, \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 2=y(0) &= A+B \\ 2=y'(0) &= A-\frac{B}{3}-\frac{13}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} A+B &= 2 \\ A-\frac{B}{3} &= \frac{21}{4} \end{cases} \iff A=\tfrac{71}{16},\ B=-\tfrac{39}{16}.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x)=\frac{71}{16}e^x-\frac{39}{16}e^{-x/3}+(\frac{5}{6}x^2-\frac{13}{4}x)e^x$.

(8) Come è detto nel testo, si tratta di un'equazione a variabili separabili: $y'=f(x)g(y)$ con $f(x)=3\sqrt{x}$ e $g(y)=\sqrt{y}(1-sqrty)$. Le soluzioni costanti sono quelle della forma $y(x)=c$ con $g(c)=0$ e quindi sono $y(x)=0$ e $y(x)=1$; queste sono soluzioni dell'equazione ma non risolvono il problema di Cauchy. Dato che sia f che g sono funzioni continue e dato che $g(1/4)\neq 0$, possiamo ottenere l'unica soluzione locale tramite la separazione della variabili:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

ovvero

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}(1-\sqrt{y})}=3\int\sqrt{x}dx+c \iff 2\int\frac{d(\sqrt{y})}{(1-\sqrt{y})}=2x^{3/2}+c \iff -2\log|1-\sqrt{y}|=2x^{3/2}+c.$$

Sostituendo la condizione iniziale $y(0)=1/4$ determiniamo subito il valore di c:

$$-2\log|1-\sqrt{1/4}|=c$$

e quindi $c=2\log 2$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} -2\log|1-\sqrt{y}| &= 2x^{3/2}+2\log 2 \\ \log|1-\sqrt{y}| &= -x^{3/2}-\log 2 \\ |1-\sqrt{y}| &= \frac{e^{-x^{3/2}}}{2}. \end{aligned}$$

Osserviamo poi che la condizione iniziale $y(0)=1/4$ si trova all'interno della striscia orizzontale delimitata dalle due soluzioni costanti $y=0$ e $y=1$ e quindi almeno in un intorno di $x = 0$ la soluzione deve restare in questa striscia ovvero la quantità $1 - \sqrt{y}$ deve essere positiva, per cui dalla relazione precedente abbiamo:

$$1 - \sqrt{y} = \frac{e^{-x^{3/2}}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{y} = 1 - \frac{e^{-x^{3/2}}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \left(1 - \frac{e^{-x^{3/2}}}{2}\right)^2 .$$

Quella appena determinata è la **soluzione** locale del problema di Cauchy. Essa fornirà la soluzione fino a che saranno valide le ipotesi che hanno portato ad essa, ovvero fino a che $y(x) \neq 0$ e $y(x) \neq 1$. E' immediato verificare che l'equazione

$$\left(1 - \frac{e^{-x^{3/2}}}{2}\right)^2 = 1$$

non ha soluzioni; l'altra equazione invece diventa

$$(1 - \frac{e^{-x^{3/2}}}{2})^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^{-x^{3/2}}}{2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-x^{3/2}} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^{3/2} = -\log 2$$

che non ha soluzioni poiché $x^{3/2}$ è sempre ≥ 0 mentre $-\log 2 < 0$. Possiamo così concludere che la funzione

$$y = \left(1 - \frac{e^{-x^{3/2}}}{2}\right)^2 .$$

è soluzione del P.C. sul dominio $x \geq 0$.