Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 25.6.2003

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{x+x^2}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^3+x\sqrt{1+x}}{1+x^2}.$$

(2) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $x\log x = 1$ e determinare ciascuna di esse con una cifra decimale esatta.

(3) Studiare il grafico della funzione:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}.$$

(Eventuali asintoti obliqui e convessità inclusi).

(4) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx,\qquad \int x^2e^x\,dx,\qquad \int\frac{x+1}{x-4}\,dx.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2}\,dx,\qquad \int_0^1\frac{\sin x}{x+x^2}\,dx,\qquad \int_1^{+\infty}\left[\sqrt{1+x^4}-x^2\right]\,dx.$$

(6) Sia $f(x,y)=x^5-y^5+5xy$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2e^x\\ y(0)=0\\ y'(0)=1.\end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'=y-2e^x\\ y(0)=2.\end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) • Calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$.

Consideriamo la funzione $\frac{\sin x}{x^3}$. Per $x \to 0$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. Dato che $\sin x \sim x$ si ottiene:

$$\frac{\sin x}{x^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Il limite è dunque $+\infty$.

• Calcolo di $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{x+x^2}}$.

Consideriamo la funzione $\frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{x+x^2}}$. Per $x \to +\infty$ a numeratore prevale x mentre a denominatore è x^2 a divergere più rapidamente. Raccogliendo quindi questi termini si ha:

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{x+x^2}} = \frac{x^{1/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \sim \frac{x^{1/3}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

Il limite è dunque 0^+.

• Calcolo di $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-x^3+x\sqrt{1+x}}{1+x^2}$.

Consideriamo la funzione $\frac{x-x^3+x\sqrt{1+x}}{1+x^2}$. Per $x \to +\infty$ a numeratore sembra debba prevalere x^3 mentre a denominatore è x^2 a divergere più rapidamente. Per verificare che la congettura sia corretta raccogliamo questi termini, ottenendo:

$$\frac{x-x^3+x\sqrt{1+x}}{1+x^2} = \frac{x^3(\frac{1}{x^2}-1+\sqrt{\frac{1+x}{x^4}})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} \sim \frac{-x^3}{x^2} = -x \to -\infty.$$

(2) Scriviamo l'equazione nella forma $\log x = \frac{1}{x}$. Dal confronto del grafico di $\log x$ con la curva $\frac{1}{x}$ si scopre che esiste un'unica soluzione, che chiameremo α, e che appartiene all'intervallo $(1, +\infty)$. In realtà, dato che $\log 2 > 1/2$, $\alpha \in (1, 2)$. Per meglio localizzare α utilizziamo il metodo di bisezione. Sia $f(x) = \log x - \frac{1}{x}$, allora

$$\begin{aligned}
&f(3/2) < 0 \text{ e } f(2) > 0 && \Longrightarrow \alpha \in (3/2, 2)\\
&f(7/4) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (7/4, 2)\\
&f(15/8) > 0 && \Longrightarrow \alpha \in (7/4, 15/8)\\
&f(29/16) > 0 && \Longrightarrow \alpha \in (7/4, 29/16)\\
&f(57/32) > 0 && \Longrightarrow \alpha \in (7/4, 57/32)
\end{aligned}$$

e dato che $7/4 = 1,75$ e che $57/32 = 1,78125$, abbiamo la rappresentazione decimale di $\alpha = 1,77 \pm 0,02$.
Usando invece il metodo di Newton si ottiene: $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = x_0 - (\log x_0 - \frac{1}{x_0})/(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2})$:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1,5 && x_2 = 1,7350814 && x_3 = 1,7629153\\
&x_4 = 1,7632227 && x_5 = 1,7622228 && x_6 = 1,7632228
\end{aligned}$$

possiamo quindi ritenere "con sicurezza" che $\alpha = 1,7632228 \pm 10^{-7}$.

(3) Osserviamo che la funzione è definita in $D := \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ed essendo una funzione razionale ammette derivate di ogni ordine in ogni punto del suo dominio D. Osserviamo che $f(x) = (x^2+1)/(x+1) \sim 2/(x+1)$ per $x \to -1$ e che quindi f presenta in $x = -1$ un asintoto verticale. Sempre dalla formula $f(x) = (x^2+1)/(x+1) \sim 2/(x+1)$ per $x \to -1$ segue che f assume valori positivi per $x \to -1^+$ e negativi per $x \to -1^-$. E' facile

constatare che la funzione diverge quando $x \to \infty$; è quindi possibile che il suo grafico presenti degli asintoti obliqui; per determinarli si hanno a disposizione vari metodi, ma in questo caso (f è una funzione razionale) un metodo particolarmente rapido è dato dalla divisione del numeratore per il denominatore, grazie alla quale si ottiene l'identità

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 - \frac{2}{x+1}$$

che nell'ipotesi di $x \to \infty$ dà:

$$f(x) = x - 1 + o(1)$$

da cui segue immediatamente che la retta $y = x - 1$ fa da asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

Consideriamo ora $f'(x)$. Applicando note proprietà della derivata si ottiene

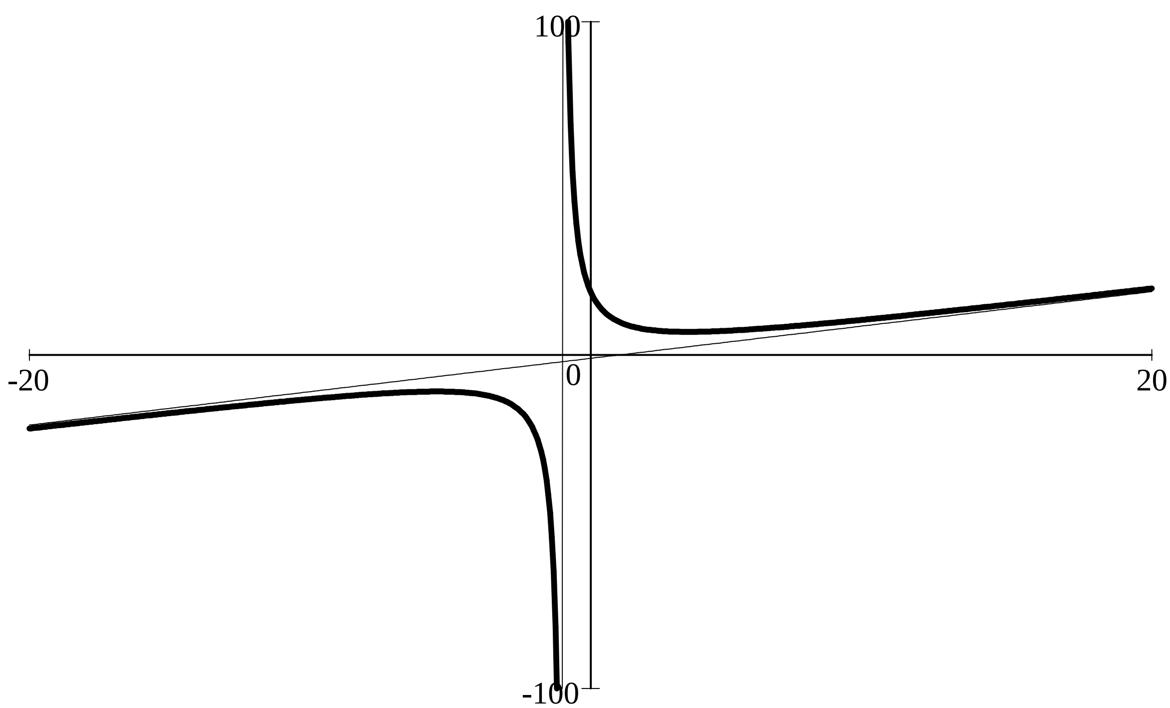
$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

quindi gli unici punti stazionari (ovvero le soluzioni di $f'(x) = 0$) sono i punti $x_1 = 1-\sqrt{2}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; è facile verificare che f' cambia segno nell'attraversare x_1 ed x_2 che quindi devono essere degli effettivi estremanti; di fatto, dalle informazioni precedenti sul comportamento di f nell'intorno del punto $x = -1$ e per $x \to \infty$ segue che x_1 è un **massimo relativo** ed x_2 un **minimo relativo**.

Consideriamo infine $f''(x)$. Si ottiene

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x^2+2x-1)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x-1)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{4}{(x+1)^3}$$

quindi f'' non si annulla in alcun punto del dominio e tuttavia cambia segno nell'attraversare $x = -1$: precisamente, risulta negativa per $x < -1$ e positiva per $x > -1$; concludendo, la funzione f non è globalmente né concava né convessa, ma nella regione $x < -1$ ha un grafico concavo e nella regione $x > -1$ ha un grafico convesso.



(4)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \text{ ponendo } x = u^2 \text{ da cui } dx = 2udu \text{ abbiamo}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{u}{1+u^2}\,2udu = 2\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = 2\int 1 - \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= 2u - 2\arctan(u) = 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x}) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x\,dx &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2[xe^x - \int e^x\,dx] \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = (x^2-2x+2)e^x + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x+1}{x-4}\,dx = \int 1 - \frac{5}{x-4}\,dx = x - 5\log|x-4| + c.$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2}\,dx$.

Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2}$ è continua su tale dominio (gli zeri del denominatore, che pure esistono, sono negativi), di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Dato che $\frac{1}{x^{3/2}}$ è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{\sin x}{x+x^2}\,dx$.

Il dominio di integrazione è $[0,1]$ mentre l'integranda è continua solo in $(0,1]$, di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

$$x \to 0^+, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x+x^2} \sim \frac{x}{x+x^2} = \frac{1}{1+x}.$$

La funzione $1/(1+x)$ ha limite 1 per $x \to 0$, quindi di fatto $f(x)$ ha in $x = 0$ una singolarità eliminabile e quindi l'integrale **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \left[\sqrt{1+x^4} - x^2\right]\,dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{1+x^4} - x^2$. Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che sia il termine $\sqrt{1+x^4}$ che x^2 sono divergenti a $+\infty$. Raccogliamo dunque il termine x^4, ottenendo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x^4} - x^2 = x^2\sqrt{1+\tfrac{1}{x^4}} - x^2 \\ &= x^2((1+\tfrac{1}{x^4})^{1/2} - 1) = x^2(1 + \tfrac{1}{2x^4} + o(\tfrac{1}{x^4}) - 1) \sim \tfrac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

l'integrale proposto quindi **esiste**.

(6) $f(x,y)$ è differenziabile in ogni punto del piano. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^4 + 5y = 0, \\ -5y^4 + 5x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 + y = 0, \\ x = y^4, \end{cases} \iff \begin{cases} y^{16} + y = 0, \\ x = y^4. \end{cases}$$

Raccogliendo y nella prima equazione otteniamo $y(1+y^{15}) = 0$, le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y = -1$; vi sono quindi due punti stazionari: $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (1,-1)$. Per stabilire se si tratti di estremanti utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -20y^3,$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 10XY.$$

Il discriminante è $5^2 - 0 = 25 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto è un **punto di sella**.

$$P_{(1,-1)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)Y^2 = 20X^2 + 10XY + 20Y^2.$$

Il discriminante è $5^2 - 20 * 20 = -375 < 0$ e quindi si tratta di un polinomio definito. Dato che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 20 > 0$ il polinomio è definito negativo così che il punto è un **punto di massimo**.

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{+2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$. Dato che a destra compare una funzione del tipo $p(x)e^x$ con $p(x)$ polinomio di grado 0, sappiamo che deve esistere una soluzione anch'essa della forma $q(x)e^x$ dove $q(x)$ è un polinomio di grado al più 2. Cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = ae^x$ con a parametro da determinarsi.

$$y(x) = ae^x \implies y'(x) = ae^x \implies y''(x) = ae^x,$$

e quindi l'equazione porta a

$$2e^x = y'' - 3y' + 2y = ae^x - 3ae^x + 2ae^x = 0$$

è evidente che non esiste alcun valore di a per cui questa equazione valga per ogni valore di x quindi la soluzione non è del tipo $q(x)e^x$ con q di grado 0; dobbiamo dunque ripetere i passaggi precedenti assumendo questa volta che $q(x)$ sia un polinomio di grado 1:

$$y(x) = (ax+b)e^x \implies y'(x) = (ax+a+b)e^x \implies y''(x) = (ax+2a+b)e^x,$$

e quindi l'equazione porta a

$$\begin{aligned} 2e^x &= y'' - 3y' + 2y \\ &= (ax+2a+b)e^x - 3\cdot(ax+a+b)e^x + 2(ax+b)e^x \\ &= -ae^x \end{aligned}$$

e quindi $a = -2$. Il valore di b è indeterminato ovvero qualsiasi valore gli attribuiamo otteniamo sempre una soluzione: la nostra scelta è $b = 0$. Quindi $y(x) = -2xe^x$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} - 2xe^x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 0 = y(0) &= A + B \\ 1 = y'(0) &= A + 2B - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B &= 0 \\ A + 2B &= 3 \end{cases} \iff A = -3, \; B = 3.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = -3e^x + 3e^{2x} - 2xe^x$.

(8) Si tratta di un'equazione lineare, ovvero di un'equazione della forma $y' = A(x) \cdot y + B(x)$ con $A(x) = 1$ e $B(x) = -2e^x$. Dato che i coefficienti A e B sono funzioni continue su $\mathbb{R}$, dal teorema di esistenza ed unicità per le equazioni lineari segue che esiste una ed una sola soluzione ad ogni P.C., e che tale soluzione risulta definita su $\mathbb{R}$.

Per determinarla, osserviamo che $K(x) := \int A(x)\, dx = x$ e che quindi la soluzione è data da

$$y(x) = e^{K(x)} \Big[\int B(x) e^{-K(x)}\, dx + c \Big] = e^x \Big[\int -2e^x e^{-x}\, dx + c \Big] = e^x \Big[- \int 2\, dx + c \Big] = e^x(-2x + c).$$

Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 2$ determiniamo subito il valore di c:

$$2 = e^0(0 + c)$$

quindi $c = 2$ e dunque la funzione

$$y(x) = 2(1 - x)e^x$$

è soluzione del P.C. su $\mathbb{R}$.