# Corso di Matematica per CTF

**G. Molteni**

## Test alla prima prova: 11.12.2002

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^3+x}}{x^2+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}-x}{e^x+1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)\cdot\cos(x)-x^3}{x^4}.$$

(2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x\sin x} & \text{per } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

calcolare $f'(x)$ per ogni possibile valore di $x$ (in particolare, si vuole sapere se $f'(0)$ esiste ed in caso di risposta affermativa se ne vuole conoscere il valore).

(3) Della seguente funzione determinare l'equazione delle **eventuali** rette asintotiche per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{x^3-x^2+\ln x}{x^2+1}.$$

(4) Sviluppare in $x_0 = 0$ ed al 4° ordine la funzione $f(x) = \sin(x)\cdot\sqrt{1-2x^2}$.

(5) Studiare la funzione

$$f(x) = x - \frac{2}{x-1}.$$

È richiesto lo studio della sua convessità.

(6) Si consideri l'equazione $x^2 - \sqrt{x+1} = 0$. Determinare il numero di soluzioni di questa equazione e stimarne il valore con una cifra decimale esatta. [Dal confronto dei grafici si scopre che ci sono due radici, $\alpha$ e $\beta$. Usando l'algoritmo di bisezione 5 volte sull'intervallo $[-1,0]$ si ottiene che $\alpha \in [-\frac{3}{4}, -\frac{23}{32}]$ ovvero che $\alpha = -0,73 \pm 0,02$. Usando invece l'algoritmo della tangente (punto iniziale $-0.5$) si ottiene in 5 passi che $\alpha = -0.72449\ldots$.

Usando l'algoritmo di bisezione 5 volte sull'intervallo $[1,2]$ si ottiene che $\beta \in [\frac{39}{32}, \frac{5}{4}]$ ovvero che $\beta = 1,23 \pm 0,02$. Usando invece l'algoritmo della tangente (punto iniziale 2) si ottiene in 5 passi che $\beta = 1.220744\ldots$].

(7) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^2 x^4 - \frac{2}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3-x^2+x-1}{x-2}\,dx.$$