

I seguenti quesiti ed il relativo svolgimento sono coperti dal diritto d'autore, pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale senza autorizzazione esplicita e scritta dell'autore. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Test alla prima prova: 11.12.2002

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

- (1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x^3 + x}}{x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} - x}{e^x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3) \cdot \cos(x) - x^3}{x^4}.$$

- (2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} & \text{per } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

calcolare $f'(x)$ per ogni possibile valore di x (in particolare, si vuole sapere se $f'(0)$ esiste ed in caso di risposta affermativa se ne vuole conoscere il valore).

- (3) Della seguente funzione determinare l'equazione delle **eventuali** rette asintotiche per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + \ln x}{x^2 + 1}.$$

- (4) Sviluppare in $x_0 = 0$ ed al 4° ordine la funzione $f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{1 - 2x^2}$.

- (5) Studiare la funzione

$$f(x) = x - \frac{2}{x - 1}.$$

È richiesto lo studio della sua convessità.

- (6) Si consideri l'equazione $x^2 - \sqrt{x + 1} = 0$. Determinare il numero di soluzioni di questa equazione e stimarne il valore con una cifra decimale esatta. [Dal confronto dei grafici si scopre che ci sono due radici, α e β . Usando l'algoritmo di bisezione 5 volte sull'intervallo $[-1, 0]$ si ottiene che $\alpha \in [-\frac{3}{4}, -\frac{23}{32}]$ ovvero che $\alpha = -0,73 \pm 0,02$. Usando invece l'algoritmo della tangente (punto iniziale -0.5) si ottiene in 5 passi che $\alpha = -0.72449 \dots$

Usando l'algoritmo di bisezione 5 volte sull'intervallo $[1, 2]$ si ottiene che $\beta \in [\frac{39}{32}, \frac{5}{4}]$ ovvero che $\beta = 1,23 \pm 0,02$. Usando invece l'algoritmo della tangente (punto iniziale 2) si ottiene in 5 passi che $\beta = 1.220744 \dots$].

- (7) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^2 x^4 - \frac{2}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 2} dx.$$