Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 5.2.2003

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(x)}{x\sin(\sqrt{x})},\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\ln x}{e^x+\ln x},\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-e^x}{x+e^{x/2}}.$$

(2) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $x^4-x-1=0$ e determinare ciascuna di esse con una cifra decimale esatta.

(3) Determinare gli **eventuali** asintoti obliqui a $\pm\infty$ della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-|x|-1}.$$

(4) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int\frac{\ln(x)}{x}\,dx,\qquad \int(x^2-x)e^x\,dx,\qquad \int\frac{x^2+x}{x^2-1}\,dx.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x+\sqrt{1+x^3}}{1+x+2x^2+3x^3}\,dx,\qquad \int_1^{+\infty}(x+1)\sin\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\,dx,\qquad \int_1^{+\infty}\sqrt{x}\cdot\sin\Big(\frac{x}{x^3+2x+1}\Big)\,dx.$$

(6) Sia $f(x,y)=x^2-xy+2y^4$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} 3y''-2y'-y=x+1\\ y(0)=4\\ y'(0)=-1.\end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x=0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y'=xy+x\\ y(0)=1.\end{cases}$$

(1) • Calcolo di $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(\sqrt{x})}$.

Consideriamo la funzione $\frac{1-\cos(x)}{x\sin(\sqrt{x})}$. Per $x \to 0^+$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. A numeratore utilizziamo lo sviluppo $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ mentre a denominatore possiamo usare la relazione asintotica $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$, ottenendo:

$$\frac{1-\cos(x)}{x\sin(\sqrt{x})} = \frac{1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x\sin(\sqrt{x})} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Il limite è dunque 0.

• Calcolo di $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}$.

Consideriamo la funzione $\frac{e^x-\ln x}{e^x+\ln x}$. Per $x \to 0^+$ il termine e^x tende a 1 mentre il termine $\ln x$ diverge a $-\infty$ quindi sia a numeratore che a denominatore il termine $\ln x$ è dominante; raccogliendolo si ottiene che:

$$\frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x} = \frac{-\ln x}{\ln x} \cdot \frac{1 - \frac{e^x}{\ln x}}{1 + \frac{e^x}{\ln x}} = -1 + o(1) \to -1.$$

• Calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-e^x}{x+e^{x/2}}$.

Consideriamo la funzione $\frac{x^2-e^x}{x+e^{x/2}}$. Per $x \to +\infty$ i termini x^2, x, e^x ed $e^{x/2}$ sono tutti divergenti a $+\infty$ ma è noto che i termini esponenziali crescono più rapidamente di ogni potenza per cui raccogliendo e^x a numeratore e $e^{x/2}$ a denominatore si ottiene che:

$$\frac{x^2-e^x}{x+e^{x/2}} = \frac{e^x}{e^{x/2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{e^x} - 1}{\frac{x}{e^x} + 1} = e^{x/2} \cdot \frac{o(1)-1}{o(1)+1} = e^{x/2}(-1+o(1)) \to -\infty.$$

(2) Scriviamo l'equazione nella forma $x^4 = x+1$. Dal confronto del grafico di x^4 con la retta $x+1$ si scopre che esistono due soluzioni, che chiameremo α e β, la prima nell'intervallo $(-1,0)$ e la seconda in $(1,2)$. Per localizzare α utilizziamo il metodo di bisezione. Sia $f(x) = x^4 - x - 1$, allora

$$\begin{array}{ll}
f(-1) > 0 \text{ e } f(-1/2) < 0 & \Longrightarrow \alpha \in (-1,-1/2) \\
f(-3/4) > 0 & \Longrightarrow \alpha \in (-3/4,-1/2) \\
f(-5/8) < 0 & \Longrightarrow \alpha \in (-3/4,-5/8) \\
f(-11/16) < 0 & \Longrightarrow \alpha \in (-3/4,-11/16) \\
f(-23/32) < 0 & \Longrightarrow \alpha \in (-3/4,-23/32)
\end{array}$$

e dato che $-3/4 = -0,75$ e che $-23/32 = -0,71875$, abbiamo la rappresentazione decimale di $\alpha = -0,73 \pm 0,02$.
Usando invece il metodo di Newton si ottiene: $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = x_0 - (x_0^4 - x_0 - 1)/(4x_0^3 - 1)$:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = -1 & x_2 = -0,8 & x_3 = -0,7312335 \\
x_4 = -0,7245484 & x_5 = -0,7244919 & x_6 = -0,7244919
\end{array}$$

possiamo quindi ritenere "con sicurezza" che $\alpha = -0,72449 \pm 10^{-5}$.

Per localizzare β con il metodo di bisezione abbiamo:

$$\begin{array}{ll}
f(1) < 0 \text{ e } f(3/2) > 0 & \Longrightarrow \beta \in (1,3/2) \\
f(5/4) > 0 & \Longrightarrow \beta \in (1,5/4) \\
f(9/8) < 0 & \Longrightarrow \beta \in (9/8,5/4) \\
f(19/16) < 0 & \Longrightarrow \beta \in (19/16,5/4) \\
f(39/32) < 0 & \Longrightarrow \beta \in (39/32,5/4)
\end{array}$$

e dato che $39/32 = 1,21875$ e che $5/4 = 1,25$ anche la rappresentazione decimale di $\beta = 1,23 \pm 0,02$.
Usando invece il metodo di Newton si ottiene: $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = x_0 - (x_0^4 - x_0 - 1)/(4x_0^3 - 1)$:

$$x_1 = 1,33333333 \qquad x_2 = 1,23580786 \qquad x_3 = 1,22105899$$
$$x_4 = 1,22074422 \qquad x_5 = 1,22074408$$

possiamo quindi ritenere "con sicurezza" che $\beta = 1,22074 \pm 10^{-5}$.

(3) Otteniamo l'informazione cercata sviluppando la funzione per $x \to \pm\infty$. A numeratore prevale x^3 ed a denominatore x^2. Raccogliendo questi termini abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+x^2-1}{x^2-|x|-1} &= \frac{x^3}{x^2}\,\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{|x|}{x^2}-\frac{1}{x^2}} \\
&= x\,\left(1+\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x^3}\right)\left(1-\tfrac{|x|}{x^2}-\tfrac{1}{x^2}\right)^{-1} \\
&= x\,\left(1+\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x^3}\right)\left(1-\tfrac{1}{|x|}-\tfrac{1}{x^2}\right)^{-1} \\
&= x\,\left(1+\tfrac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\left(1+\tfrac{1}{|x|}+o(\tfrac{1}{x})\right) \\
&= x\,\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{|x|}+o(\tfrac{1}{x})\right) \\
&= x+1+\tfrac{x}{|x|}+o(1).
\end{aligned}$$

Supponiamo che $x \to +\infty$. Allora x è definitivamente positivo e lo sviluppo precedente diventa

$$\frac{x^3+x^2-1}{x^2-|x|-1} = x+2+o(1);$$

esiste dunque una retta, $y = x+2$, che fa da retta asintotica a $+\infty$. Supponiamo invece che $x \to -\infty$. Allora x è definitivamente negativo e lo sviluppo precedente diventa

$$\frac{x^3+x^2-1}{x^2-|x|-1} = x+1-1+o(1) = x+o(1);$$

è dunque la retta $y = x$ a fare da retta asintotica a $-\infty$.

(4)

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln(x)\,d(\ln(x)) = \tfrac{\ln^2 x}{2} + c.$$

$$\begin{aligned}
\int (x^2-x)e^x\,dx &= (x^2-x)e^x - \int (2x-1)e^x\,dx = (x^2-x)e^x - \left((2x-1)e^x - \int 2e^x\,dx\right) \\
&= (x^2-x)e^x - (2x-1)e^x + 2\int e^x\,dx = (x^2-x)e^x - (2x-1)e^x + 2e^x + c \\
&= (x^2-3x+3)e^x + c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}\,dx = \int \frac{x}{x-1}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= x + \ln|x-1| + c.
\end{aligned}$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{x+\sqrt{1+x^3}}{1+x+2x^2+3x^3}\,dx$.

Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x+\sqrt{1+x^3}}{1+x+2x^2+3x^3}\,dx$ è continua su tale dominio, di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x+\sqrt{1+x^3}}{1+x+2x^2+3x^3} \sim \frac{x+\sqrt{1+x^3}}{3x^3} \sim \frac{x^{3/2}}{3x^3} = \frac{1}{3x^{3/2}}.$$

Dato che $\frac{1}{3x^{3/2}}$ è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty}(x+1)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$.

Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ e l'integranda è continua su tale dominio di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = (x+1)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim (x+1)\cdot\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x}.$$

Dato che la funzione $1/x$ non è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **non esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{x^3+2x+1}\right)\,dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{x^3+2x+1}\right)$. Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che l'argomento di della funzione seno, ovvero la quantità $\frac{x}{x^3+2x+1}$ è asintotica ad $\frac{1}{x^2}$ ed è quindi infinitesima; utilizzando quindi la relazione $\sin\epsilon \sim \epsilon$ (valida per ogni infinitesimo ϵ) abbiamo che

$$f(x) = \sqrt{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{x^3+2x+1}\right) \sim \sqrt{x}\cdot\frac{x}{x^3+2x+1} \sim \sqrt{x}\cdot\frac{x}{x^3} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

l'integrale proposto quindi **esiste**.

(6) $f(x,y)$ è un polinomio quindi è differenziabile in ogni punto del piano. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0, \\ -x + 8y^3 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è risolta da $y = 2x$, quindi

$$\begin{cases} y = 2x, \\ -x + 8(2x)^3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x, \\ x(8^2x^2 - 1) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0,\ x = 1/8,\ x = -1/8 \\ y = 2x. \end{cases}$$

Ci sono quindi tre punti stazionari: $(0,0)$, $(1/8,1/4)$ e $(-1/8,-1/4)$. Per individuare tra questi i punti estremanti utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24y^2,$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 2X^2 - 2XY.$$

Il discriminante è $(-1)^2 - 2\cdot 0 = 1 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto è un **punto di sella**.

$$\begin{aligned} P_{(1/8,1/4)}(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1)Y^2 \\ &= 2X^2 - 2XY + \tfrac{3}{2}Y^2. \end{aligned}$$

Il discriminante è $(-1)^2 - 2\cdot\frac{3}{2} = -2 < 0$ e quindi si tratta di un polinomio definito e poiché il primo coefficiente è positivo si tratta di un polinomio definito positivo ed il punto è quindi un **minimo**.

$$P_{(-1/8,-1/4)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)Y^2 = 2X^2 - 2XY + \tfrac{3}{2}Y^2.$$

Si tratta del medesimo polinomio precedente quindi possiamo subito concludere che si tratta di un punto di **minimo**.

Osservazione: il fatto che i due punti $(-1/8, -1/4)$ e $(1/8, 1/4)$ siano entrambi dei minimi non è un caso; in fatti questa è una conseguenza del fatto che $f(-x, -y) = f(x, y)$, come può essere verificato direttamente. Questa uguaglianza mostra che il grafico di f deve essere simmetrico rispetto al punto $(0, 0)$ così che i punti simmetrici devono avere "la stessa natura".

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $2y'' - 5y' + 2y = 0$ la cui equazione caratteristica è $3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1/3$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x/3}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $3y'' - 2y' - y = x + 1$. Dato che a destra compare un polinomio di grado 1 sappiamo che deve esistere una soluzione anch'essa polinomiale di grado almeno 1 ed al più 3; cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = ax + b$ con a, b parametri da determinarsi.

$$y(x) = ax + b \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = a \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = 0,$$

e quindi l'equazione porta a

$$x + 1 = 3y'' - 2y' - y = 3 \cdot 0 - 2a - (ax + b) = -ax - b - 2a$$

e quindi

$$\begin{cases} -a & = 1 \\ -b - 2a & = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Quindi $y(x) = -x + 1$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x/3} - x + 1, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 4 = y(0) & = A + B + 1 \\ -1 = y'(0) & = A - \frac{B}{3} - 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A + B & = 3 \\ A - \frac{B}{3} & = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad A = 3/4,\ B = 9/4.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = \frac{3}{4}e^x + \frac{9}{4}e^{-x/3} - x + 1$.

(8) Si tratta un'equazione lineare, $y' = A(x)y + B(x)$ con $A(x) = x$ e $B(x) = x$; Siccome $A(x)$ e $B(x)$ sono continue in $\mathbb{R}$ la soluzione esisterà e sarà unica su $\mathbb{R}$ (a seguito del teorema sulle equazioni lineari). Inoltre

$$K(x) = \int A(x)\ dx = \int x\ dx = \tfrac{x^2}{2},$$

e perciò

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x^2/2}\Big[\int xe^{-x^2/2}\ dx + c\Big] = e^{x^2/2}\Big[-\int e^{-x^2/2}\ d\big(-\tfrac{x^2}{2}\big) + c\Big] \\ &= e^{x^2/2}\big[-e^{-x^2/2} + c\big] = -1 + ce^{x^2/2}. \end{aligned}$$

Dato che $y(0) = 1$, abbiamo

$$1 = y(0) = -1 + c \quad \Longrightarrow \quad c = 2$$

e così la soluzione (su $\mathbb{R}$) cercata è

$$y(x) = -1 + 2e^{x^2/2}.$$