Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Test alla seconda prova d'esonero: 21.1.2003

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^3+1}}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+x-\sin x}{x^4+2x+1}\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{x\sin x - 1 + \cos x}{e^x-1}dx.$$

(2) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx.$$

(3) Stabilire se le seguenti funzioni sono continue nel punto $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2+\log(1+y)}{x\sin y + y + \cos y}, \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(4) Sia $f(x,y) = x^3\sin(xy)$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

(5) Data la funzione: $f(x,y) = xe^{x+y^2} - ye^{x^2+y}$, verificare che il punto $(1,1)$ è stazionario. Determinare poi se tale punto è di massimo o di minimo per $f(x,y)$.

(6) Determinare i punti di massimo e di minimo delle funzioni seguenti:

$$f(x,y) = (x+y)^5, \qquad g(x,y) = x^2 + x^3y.$$

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = (6x-1)e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$) e poi globalmente

$$\begin{cases} y' = y + \frac{x}{y} \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$