Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Prima prova: 11.12.2002

Il candidato risolva **almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-(\cos x)^2}{x^2-x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-\sqrt{x^3}+x-1}{x^2+x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x+\ln\ln x}{x}.$$

(2) Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{xe^x-\sin x}{x^2} & \text{per } x\neq 0\\ 1 & \text{per } x=0,\end{cases}$$

calcolare $f'(x)$ per ogni possibile valore di x (in particolare, si vuole sapere se $f'(0)$ esiste ed in caso di risposta affermativa se ne vuole conoscere il valore).

(3) Della seguente funzione determinare l'equazione delle **eventuali** rette asintotiche per $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$:

$$f(x)=\frac{x^3-x+1}{x^2+4}.$$

(4) Sviluppare in $x_0=0$ ed al 4° ordine la funzione $f(x)=\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)$. Determinare poi il valore di $f^{(4)}(0)$.

(5) Studiare la funzione

$$f(x)=-x+\frac{2x}{x+2}.$$

È richiesto lo studio della sua convessità.

(6) Si consideri l'equazione $2x^3+4x-1=0$. Determinare il numero di soluzioni di questa equazione e stimarne il valore con una cifra decimale esatta.

(7) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^2 x+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\,dx,\qquad \int_0^1\frac{x^2+x+2}{x+1}\,dx.$$

(1) • Calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-(\cos x)^2}{x^2-x}$.

Consideriamo la funzione $\frac{e^{2x}-(\cos x)^2}{x^2-x}$. Per $x \to 0$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. Di fatto il denominatore si comporta come x, quindi usando la relazione di asintotico abbiamo:

$$\frac{e^{2x}-(\cos x)^2}{x^2-x} \sim -\frac{e^{2x}-(\cos x)^2}{x}$$

introducendo gli sviluppi al primo ordine abbiamo

$$\begin{aligned} &= -\frac{1+2x+o(x)-(1+o(x^2))^2}{x} = -\frac{1+2x+o(x)-1+o(x^2)}{x} \\ &= -\frac{2x+o(x)}{x} = -2+o(1). \end{aligned}$$

Il limite è dunque -2.

• Calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-\sqrt{x^3}+x-1}{x^2+x}$.

Consideriamo la funzione $\frac{x^3-\sqrt{x^3}+x-1}{x^2+x}$. Per $x \to +\infty$ il termine x^3 è dominante a numeratore mentre a denominatore è dominante x^2; è quindi sicuramente una buona idea raccogliere x^3 a numeratore e x^2 a denominatore, ottenendo:

$$\frac{x^3-\sqrt{x^3}+x-1}{x^2+x} = \frac{x^3}{x^2}\,\frac{1-\frac{\sqrt{x^3}}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{x}{x^2}} = x\,\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}} = x(1+o(1)) \to +\infty.$$

• Calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x+\ln\ln x}{x}$.

Dividendo ogni addendo a numeratore per x otteniamo:

$$\frac{x+\ln x+\ln\ln x}{x} = 1+\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln\ln x}{x}.$$

Siccome è noto che $(\ln x)/x \to 0$ quando $x \to \infty$, a maggior ragione $(\ln\ln x)/x \to 0$, quindi il limite è 1.

(2) Sia $x_0 \neq 0$. Allora $f(x)$ coincide in un intorno di x_0 con la funzione $\frac{xe^x-\sin x}{x^2}$ che sul suo dominio è sicuramente derivabile in quanto quoziente di funzioni derivabili di conseguenza in tali punti la derivata coincide con quella ottenuta con manipolazioni formali a partire da tale funzione:

$$f'(x_0) = \frac{((1+x_0)e^{x_0}-\cos x_0)\cdot x_0^2 - 2x_0(x_0e^{x_0}-\sin x_0)}{x_0^4} = \frac{(x_0^2-x_0)e^{x_0}-x_0\cos x_0+2\sin x_0}{x_0^3}.$$

Sia ora invece $x_0 = 0$. In ogni intorno di questo punto $f(x)$ è data da due espressioni diverse, di conseguenza l'esistenza stessa di $f'(0)$ non è garantita. Per scoprire se essa esiste utilizziamo la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}, \quad \text{purché il limite esista, finito.}$$

Ma

$$\begin{aligned}
\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \frac{\frac{he^h-\sin h}{h^2}-1}{h} \\
&= \frac{he^h-\sin h-h^2}{h^3} \\
&= \frac{h(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2))-h+\frac{h^3}{6}+o(h^3)-h^2}{h^3} \\
&= \frac{h+h^2+\frac{h^3}{2}+o(h^3)-h+\frac{h^3}{6}+o(h^3)-h^2}{h^3} \\
&= \frac{\frac{2}{3}h^3+o(h^3)}{h^3} = \frac{2}{3}+o(1) \to \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-x)e^x - x\cos x + 2\sin x}{x^3} & \text{per } x \neq 0 \\ \frac{2}{3} & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

(3) Otteniamo l'informazione cercata sviluppando la funzione per $x \to \pm\infty$. A numeratore prevale x^3 ed a denominatore x^2. Raccogliendo questi termini abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{x^3-x+1}{x^2+4} &= \frac{x^3}{x^2}\,\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}} \\
&= x\,\Big(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\Big)\Big(1+\frac{4}{x^2}\Big)^{-1} \\
&= x\,\Big(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\Big)\Big(1-\frac{4}{x^2}+o\big(\frac{1}{x^2}\big)\Big) \\
&= x\,\Big(1-\frac{5}{x^2}+o\big(\frac{1}{x^2}\big)\Big) \\
&= x-\frac{5}{x}+o\big(\frac{1}{x}\big).
\end{aligned}$$

Esiste dunque una retta, $y = x$, che fa da retta asintotica sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Dallo sviluppo risulta poi che il grafico della funzione si trova al di sotto di tale retta per $x \to +\infty$ ed al di sopra per $x \to +\infty$.

(4) Dato che $\ln(1+\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{4} + o(\epsilon^4)$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln\big(\frac{1+x^2}{1-x}\big) &= \ln(1+x^2) - \ln(1-x) \\
&= x^2 - \tfrac{x^4}{2} + o(x^4) + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^4}{4} + o(x^4) \\
&= x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + o(x^4)
\end{aligned}$$

.

Dal teorema di Taylor sappiamo poi che il coefficiente del termine di ordine 4 dello sviluppo è di fatto $f^{(4)}(0)/24$; otteniamo quindi che

$$\frac{f^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{4} \quad \text{da cui} \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

(5) Osserviamo che la funzione è definita in $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ e trattandosi di una funzione razionale (cioè quoziente di polinomi) tale funzione ammette sicuramente derivata di ogni ordine in D.

Osserviamo poi che $f(x) = 0$ se e solo se $-x(x+2)+2x = 0$ ovvero se e solo se $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty.$$

All'infinito, invece, abbiamo

$$f(x) = -x + \frac{2x}{x+2} = -x + 2\big(1 + \frac{2}{x}\big)^{-1} = -x + 2\big(1 - \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})\big) = -x + 2 - \frac{4}{x} + o(\frac{1}{x}),$$

di conseguenza $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ma, cosa più importante, scopriamo che $f(x)$ presenta ha la retta $y = -x + 2$ come asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre, dal segno del termine successivo dello sviluppo scopriamo che la funzione si trova al di sotto di tale retta per $x \to +\infty$ ed al di sopra di tale retta per $x \to -\infty$.

Dalle informazioni in nostro possesso possiamo anticipare che deve esistere almeno un massimo relativo in $x > -2$ ed almeno un minimo relativo in $x < -2$. Per localizzare questi estremanti (e gli altri eventuali) consideriamo $f'(x)$:

$$f'(x) = -1 + \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = -1 + \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Gli estremanti sono localizzati negli zeri di $f'(x)$ ovvero sono tra le soluzioni di $(x+2)^2 = 4$ ovvero $x = -4$ ed $x = 0$. Dato che gli zeri sono solamente due, essi sono gli estremanti la cui esistenza era già stata prevista in precedenza, di conseguenza -4 è il punto di massimo e 0 è quello di minimo.

Dalle informazioni in nostro possesso non possiamo prevedere l'esistenza il numero di eventuali flessi, quindi consideriamo $f''(x)$:

$$f''(x) = -\frac{8}{(x+2)^3}.$$

Dall'espressione appena trovata scopriamo che $f''(x)$ non ha zeri, tuttavia è positiva quando $x < -2$ e negativa quando $x > -2$; ne segue che $f(x)$ è convessa in $(-\infty, -2)$ e concava in $(-2, +\infty)$. Dall'insieme di dati raccolti ricaviamo che il grafico di $f(x)$ é il seguente:

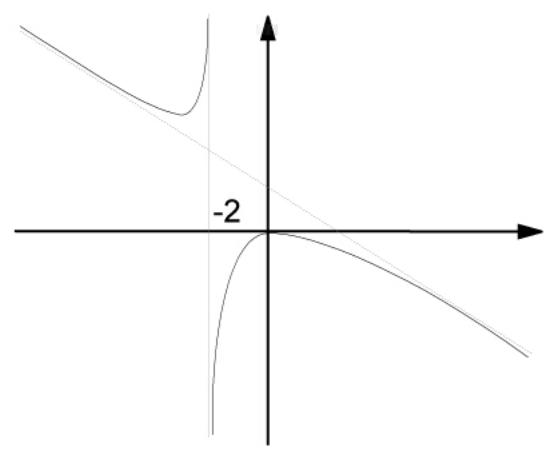

Figure 1. Funzione $f(x)$.

(6) Scriviamo l'equazione nella forma $2x^3 = 1 - 4x$. Dal confronto grafico di $2x^3$ ed $1 - 4x$ scopriamo immediatamente che esiste una sola soluzione $\alpha \in (0, 1/4)$.

Per localizzare α utilizziamo il metodo di bisezione. Sia $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$, allora

$$\begin{aligned} &f(1/8) < 0 \text{ e } f(1/4) > 0 && \Longrightarrow \alpha \in (1/8, 1/4) \\ &f(3/16) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (3/16, 1/4) \\ &f(7/32) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (7/32, 1/4) \end{aligned}$$

e dato che $7/32 = 0,21875$ e che $1/4 = 0,25$ anche la rappresentazione decimale di $\alpha = 0,23 \pm 0,02$.

Usando invece il metodo di Newton si ottiene: $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = x_0 - (2x_0^3 + 4x_0 - 1)/(6x_0^2 + 4)$:

$x_1 = 0,25$	$x_2 = 0,24431818$	$x_3 = 0,24313995$
$x_4 = 0,24290048$	$x_5 = 0,24285201$	$x_6 = 0,24284221$

possiamo quindi ritenere "con sicurezza" che $\alpha = 0,2428 \pm 10^{-5}$.

(7)

$$\begin{aligned}\int_1^2 x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\ dx &= \int_1^2 x + 2x^{-2} - x^{-3}\ dx = \frac{x^2}{2} - 2x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}\Big|_1^2 \\ &= (2 - 1 + \frac{1}{8}) - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{17}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}\ dx &= \int_0^1 x + \frac{2}{x+1}\ dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x+1|\Big|_0^1 \\ &= (\frac{1}{2} + 2\ln 2) - (0 + 0) = \frac{1}{2} + 2\ln 2.\end{aligned}$$