Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 3.11.2003

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)},\qquad \lim_{x\to+\infty}(1-2x)\sin\big(\frac{1}{x+1}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}(x+x^2)\log\big(1+\frac{1}{x}\big).$$

(2) Sia $f(x)=x^4+x-1$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa 2.

(3) Studiare il grafico della funzione:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

(Eventuali asintoti obliqui e convessità inclusi).

(4) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int \sin(2x)\ dx,\qquad \int x+e^x+e^{-x}\ dx,\qquad \int\frac{x}{2x-4}\ dx.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{3+x+\sqrt{x}}\ dx,\qquad \int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\ dx,\qquad \int_1^{+\infty}x\Big[\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\Big]\ dx.$$

(6) Sia $f(x,y)=x^2-5xy+y^2+2$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y''-5y'+4y=16x\\ y(0)=0\\ y'(0)=0.\end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'=\frac{y}{1+x}+x\\ y(0)=1.\end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) • Calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)}$.

Consideriamo la funzione $\frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)}$. Per $x \to 0$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. Dato che $\sin x \sim x$ e che $\cos(x) \to 1$ si ottiene:

$$\frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)} \sim \frac{x^2}{x} = x.$$

Il limite è dunque 0.

• Calcolo di $\lim_{x\to+\infty}(1-2x)\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Consideriamo la funzione $(1-2x)\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$. Per $x \to +\infty$ la quantità $1/(x+1)$ è infinitesima, di conseguenza dallo sviluppo $\sin(\epsilon) \sim \epsilon$ (valido appunto per $\epsilon \to 0$) segue:

$$(1-2x)\sin\left(\tfrac{1}{x+1}\right) \sim (1-2x)\tfrac{1}{x+1} \sim \frac{-2x}{x} = -2$$

Il limite è dunque -2.

• Calcolo di $\lim_{x\to+\infty}(x+x^2)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Consideriamo la funzione $(x+x^2)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Per $x \to +\infty$ il primo fattore è asintotico ad x^2 mentre il secondo, $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, tende a zero. Per poter stabilire il comportamento è dunque necessario stabilire l'esatto ordine di annullamento del secondo fattore. Usando lo sviluppo noto $\log(1+\epsilon) \sim \epsilon$, valido per $\epsilon \to 0$, otteniamo che:

$$(x+x^2)\log\left(1+\tfrac{1}{x}\right) \sim x^2 \cdot \tfrac{1}{x} = x \to +\infty.$$

(2) In generale, se la funzione f è derivabile nel punto di ascissa x_0, la retta tangente è quella di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nel nostro caso la funzione in esame è $f(x) = x^4 + x - 1$ e quindi un polinomio. Esso è derivabile ovunque e la sua derivata è semplicemente $f'(x) = 4x^3 + 1$. di conseguenza la retta tangente nel punto di ascissa 2 è quella di equazione:

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \quad \text{ovvero} \quad y = 17 + 33(x-2).$$

(3) Osserviamo che la funzione è razionale e quindi ammette derivate di ogni ordine sul proprio dominio che è $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Osserviamo che la funzione è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$ e che inoltre presenta un asintoto verticale nel punto $x = 1$.

Osserviamo inoltre che la funzione può essere anche scritta come

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

e quindi ha la retta $y = x + 1$ quale asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Consideriamo ora $f'(x)$.

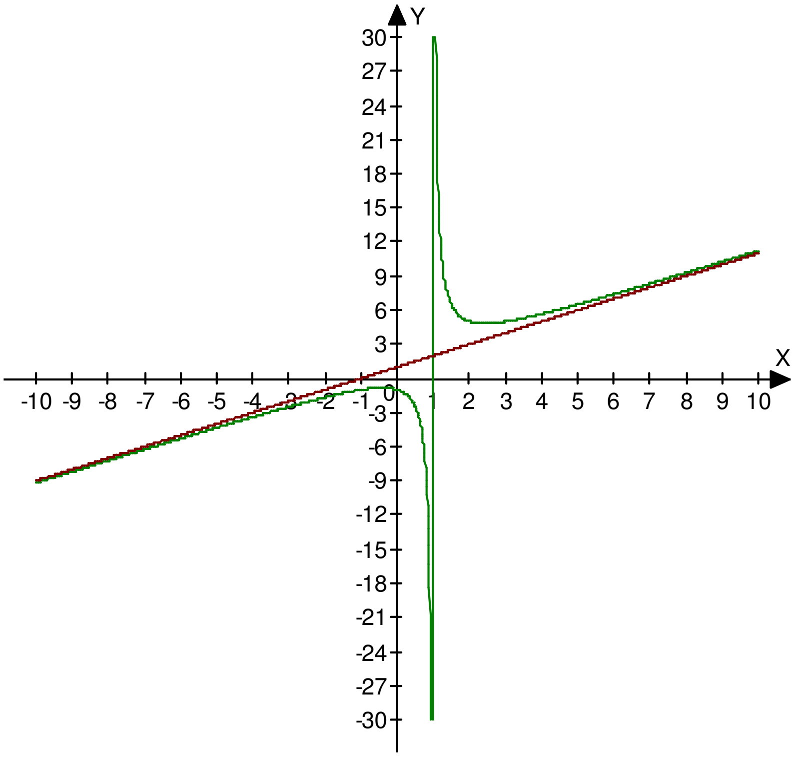
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

quindi gli unici punti stazionari (ovvero le soluzioni di $f'(x) = 0$) sono i punti $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; è facile verificare che f' cambia segno nell'attraversare x_1 ed x_2 che quindi devono essere degli effettivi estremanti; di fatto, dalle informazioni precedenti sul comportamento di f segue che x_1 è un **massimo relativo** ed x_2 un **minimo relativo**.

Consideriamo infine $f''(x)$. Si ottiene

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

quindi f'' non si annulla mai ma cambia segno nell'attraversare $x = 1$: precisamente, risulta negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$. Concludendo, la funzione f non è globalmente né concava né convessa, ma nella regione $x < 1$ ha un grafico concavo e nella regione $x > 1$ ha un grafico convesso.



(4)

$$\int \sin(2x)\ dx = -\tfrac{1}{2}\cos(2x) + c.$$

$$\int x + e^x + e^{-x}\ dx = \frac{x^2}{2} + e^x - e^{-x} + c.$$

$$\int \frac{x}{2x-4}\ dx = \int \tfrac{1}{2} + \frac{1}{x-2}\ dx = \tfrac{x}{2} + \log|x-2| + c.$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{x}{3+x+\sqrt{x}}\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x}{3+x+\sqrt{x}}$ è continua su tale dominio di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x}{3+x+\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x} = 1.$$

Dato che la funzione costante 1 non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[0, 1]$ mentre l'integranda è continua solo in $(0, 1]$, di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di

$f(x)$ per $x \to 0^+$.

$$x \to 0^+, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

La funzione $1/x^{1/3}$ è integrabile in $x \to 0$, quindi anche l'integrale proposto **esiste**.

- Esistenza di $\int_1^{+\infty} x\Big[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\Big]\, dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = x\Big[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\Big]$. Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che

Osserviamo però che lo sviluppo $\log(1+\epsilon) = \epsilon - \epsilon^2/2 + o(\epsilon^2)$, valido per $\epsilon \to 0$, dà:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\Big[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\Big] = x \cdot \sqrt{x}\Big[\sqrt{1+1/x} - 1\Big] = x^{3/2}\Big[\sqrt{1+1/x} - 1\Big] \\ &= x^{3/2}\Big[1 + \tfrac{1}{2x} + o(\tfrac{1}{x}) - 1\Big] = x^{3/2}\Big[\tfrac{1}{2x} + o(\tfrac{1}{x})\Big] \sim x^{3/2} \cdot \tfrac{1}{2x} \\ &= -\tfrac{\sqrt{x}}{2} \end{aligned}$$

dal che possiamo dedurre che l'integrale proposto **non esiste**.

(6) $f(x,y)$ è differenziabile in ogni punto del piano. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ -5x + 2y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5}{2}y, \\ -5\frac{5}{2}y + 2y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Vi è quindi un solo punto stazionario: $A \equiv (0,0)$. Per stabilire se si tratta di un estremante utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -5, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 2X^2 - 10XY + 2Y^2.$$

Il discriminante è $(-5)^2 - 2 \cdot 2 = 21 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto è un **punto di sella**.

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 5y' + 4y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{4x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' - 5y' + 4y = 16x$. Dato che a destra compare un polinomio di grado 1, sappiamo che deve esistere una soluzione anch'essa polinomiale di grado al più 3. Cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = ax + b$ con a e b parametri da determinarsi.

$$y(x) = ax + b \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = a \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = 0,$$

e quindi l'equazione porta a

$$16x = y'' - 5y' + 4y = -5a + 4(ax + b) = 4ax - 5a + 4b.$$

Questa uguaglianza è valida se e solo se sono uguali i coefficienti dei polinomi di ugual grado. In particolare deve essere $4a = 16$ e $4b - 5a = 0$. Di conseguenza $a = 4$ e $b = 5$;

quindi $4x+5$ è soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^x + Be^{4x} + 4x + 5, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 0 = y(0) & = A + B + 5 \\ 0 = y'(0) & = A + 4B + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B & = -5 \\ A + 4B & = -4 \end{cases} \iff A = -16/3,\ B = 1/3.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = -\frac{16}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{4x} + 4x + 5$.

(8) Si tratta di un'equazione lineare, ovvero di un'equazione della forma $y' = A(x) \cdot y + B(x)$ con $A(x) = 1/(1+x)$ e $B(x) = x$. Dato che i coefficienti A e B sono funzioni continue su $(-1, +\infty)$, dal teorema di esistenza ed unicità per le equazioni lineari segue che esiste una ed una sola soluzione ad ogni P.C. e che tale soluzione risulta definita su $(-1, +\infty)$. Per determinarla, osserviamo che $K(x) := \int A(x)\ dx = \log|1+x|$. Dato che il P.C. è centrato nel punto di ascissa $x = 0$ e che quindi in questo punto la quantità $1 + x$ è positiva, possiamo eliminare il valore assoluto in $K(x)$, così che $K(x) = \log(1+x)$. La soluzione è data quindi da

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{K(x)}\Big[\int B(x)e^{-K(x)}\ dx + c\Big] = e^{\log(1+x)}\Big[\int xe^{-\log(1+x)}\ dx + c\Big] \\ &= (1+x)\Big[\int \tfrac{x}{x+1}\ dx + c\Big] = (1+x)\Big[\int 1 - \tfrac{1}{x+1}\ dx + c\Big] \end{aligned}$$

$$= (1+x)\big(x - \log|1+x| + c\big) = (1+x)\big(x - \log(1+x) + c\big).$$

Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ determiniamo subito il valore di c:

$$1 = (1+0)\big(0 - \log(1+0) + c\big)$$

quindi $c = 1$ e dunque la funzione

$$y(x) = (1+x)\big(x - \log(1+x) + 1\big)$$

è soluzione del P.C. su $(-1, +\infty)$.