Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 12.1.2004

Il candidato risolva **interamente almeno due** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln x}{x-\ln x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-\cos(x)}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{20}-e^x}{\sqrt[100]{x}+e^x}.$$

(2) Stabilire se le seguenti funzioni sono convesse:

$$f(x)=x^3+\ln x, \qquad g(x)=x\ln x.$$

(3) Determinare gli **eventuali** asintoti obliqui a $\pm\infty$ della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{|x|^3-1}{x^2+1}.$$

(4) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int \sqrt{x}\ln(x)\ dx, \qquad \int x\sin(x)\ dx, \qquad \int \frac{x^2}{x^2-1}\ dx.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+\sqrt{1+x^3}}{1+x^3}\ dx, \qquad \int_1^{+\infty} (x-1)\sin\Big(\frac{1}{1+x^3}\Big)\ dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\ dx.$$

(6) Sia $f(x,y)=x^2+e^{xy}$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y''+y=1 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=-1. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'=-y+x \\ y(0)=0. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) • Calcolo di $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln x}{x-\ln x}$.

Consideriamo la funzione $\frac{x+\ln x}{x-\ln x}$. Per $x \to 0^+$ il termine x tende evidentemente a 0 mentre il termine $\ln x$ diverge a $-\infty$ quindi sia a numeratore che a denominatore il termine $\ln x$ è dominante; raccogliendolo si ottiene che:

$$\frac{x+\ln x}{x-\ln x} = \frac{\ln x}{-\ln x} \cdot \frac{1+\frac{x}{\ln x}}{1-\frac{x}{\ln x}} = -1 + o(1) \to -1.$$

• Calcolo di $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-\cos(x)}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$.

Consideriamo la funzione $\frac{e^x-\cos(x)}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$. Per $x \to 0^+$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. A numeratore utilizziamo gli sviluppi asintotici $e^x = 1 + x + o(x)$, $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ mentre a denominatore possiamo usare la relazione asintotica $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$, ottenendo:

$$\frac{e^x-\cos(x)}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} = \frac{1+x+o(x)-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x\sin(\sqrt{x})} \sim \frac{x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = 1.$$

Il limite è dunque 1.

• Calcolo di $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{20}-e^x}{\sqrt[100]{x}+e^x}$.

Consideriamo la funzione $\frac{x^{20}-e^x}{\sqrt[100]{x}+e^x}$. Per $x \to +\infty$ i termini x^{20}, e^x ed $\sqrt[100]{x}$ sono tutti divergenti a $+\infty$ ma è noto che i termini esponenziali crescono più rapidamente di ogni potenza per cui raccogliendo e^x si ottiene che:

$$\frac{x^{20}-e^x}{\sqrt[100]{x}+e^x} = \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{\frac{x^{20}}{e^x}-1}{\frac{\sqrt[100]{x}}{e^x}+1} = \frac{o(1)-1}{o(1)+1} = -1 \to -1.$$

(2) Sia f che g sono funzioni derivabili ad ogni ordine sul proprio dominio che è l'insieme $(0, +\infty)$. Per stabilirne la convessità possiamo dunque utilizzare il criterio della derivata seconda. Abbiamo:

$$f'(x) = 3x^2 + \tfrac{1}{x}, \qquad g'(x) = \ln x + 1,$$
$$f''(x) = 6x - \tfrac{1}{x^2}, \qquad g''(x) = \tfrac{1}{x}.$$

Dalle espressioni trovate è subito chiaro che $g''(x) > 0$ per ogni x appartenente al dominio e che quindi g **è convessa**.

Il segno di f'' non è invece evidente per cui occorre risolvere la disequazione

$$f''(x) > 0, \quad \Leftrightarrow \quad 6x - \tfrac{1}{x^2} > 0, \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{6x^3-1}{x^2} > 0, \quad \Leftrightarrow \quad x^3 > \tfrac{1}{6}, \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}.$$

Quindi $f''(x)$ è positiva quando $x > \sqrt[3]{1/6}$ e negativa quando $x < \sqrt[3]{1/6}$. Di conseguenza la restrizione di f al dominio $(0, \sqrt[3]{1/6})$ è concava e la restrizione di f al dominio $(\sqrt[3]{1/6}, +\infty)$ è convessa, **ma f sul proprio dominio non è né concava né convessa**.

(3) Otteniamo l'informazione cercata sviluppando la funzione per $x \to \pm\infty$. A numeratore prevale $|x|^3$ ed a denominatore x^2. Raccogliendo questi termini abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{|x|^3 - 1}{x^2 + 1} &= \frac{|x|^3}{x^2} \, \frac{1 - \frac{1}{|x|^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\
&= |x| \, \big(1 - \tfrac{1}{|x|^3}\big)\big(1 + \tfrac{1}{x^2}\big)^{-1} \\
&= |x| \, \big(1 - \tfrac{1}{|x|^3}\big)\big(1 - \tfrac{1}{x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\big) \\
&= |x| \, \big(1 - \tfrac{1}{x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\big) \\
&= |x| - \tfrac{1}{|x|} + o(\tfrac{1}{|x|}) \\
&= |x| + o(1).
\end{aligned}$$

Supponiamo che $x \to +\infty$. Allora x è definitivamente positivo e lo sviluppo precedente diventa

$$\frac{|x|^3 - 1}{x^2 + 1} = x + o(1);$$

esiste dunque una retta, $y = x$, che fa da retta asintotica a $+\infty$. Supponiamo invece che $x \to -\infty$. Allora x è definitivamente negativo e lo sviluppo precedente diventa

$$\frac{|x|^3 - 1}{x^2 + 1} = -x + o(1);$$

è dunque la retta $y = -x$ a fare da retta asintotica a $-\infty$.

(4)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \ln(x) \; dx &= \tfrac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \int \tfrac{2}{3} x^{3/2} \cdot \tfrac{1}{x} \; dx \\
&= \tfrac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \int \tfrac{2}{3} x^{1/2} \; dx \\
&= \tfrac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \tfrac{4}{9} x^{3/2} + c.
\end{aligned}$$

$$\int x \sin(x) \; dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) \; dx = -x \cos(x) + \sin(x) + c.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2 - 1} \; dx = \int 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \; dx &= \int 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \; dx \\
&= x + \tfrac{1}{2} \ln|x - 1| - \tfrac{1}{2} \ln|x + 1| + c \\
&= x + \tfrac{1}{2} \ln\left|\tfrac{x-1}{x+1}\right| + c.
\end{aligned}$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{1+x^3}}{1+x^3} \; dx$.

Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{1+x^3}}{1+x^3}$ è continua su tale dominio, di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{1 + x^3}}{1 + x^3} \sim \frac{x^2 + \sqrt{1 + x^3}}{x^3} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}.$$

Dato che $\frac{1}{x}$ non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} (x - 1) \sin\big(\frac{1}{1+x^3}\big) \; dx$.

Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ e l'integranda $f(x)$ è continua su tale dominio di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = (x-1)\sin\Big(\frac{1}{1+x^3}\Big) \sim (x-1)\cdot\frac{1}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}.$$

Dato che la funzione $1/x^2$ è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **esiste**.

- Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$. Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x} \\ &= (1+1/x)^{1/2} - (1-1/x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2x} - 1 + \tfrac{1}{2x} + o(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x}) \sim \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

l'integrale proposto quindi **non esiste**.

(6) $f(x,y)$ è somma e composizione di funzioni differenziabili e quindi è anch'essa differenziabile in ogni punto del piano. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + ye^{xy} = 0, \\ xe^{xy} = 0. \end{cases}$$

Dato che l'esponenziale non si annulla mai, la seconda equazione ha come unica soluzione $x = 0$, quindi

$$\begin{cases} 2x + ye^{xy} = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

C'è quindi un unico punto stazionari0: $(0,0)$. Per scoprire se si tratta di un punto estremante utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + y^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1+xy)e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy},$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 2X^2 + 2XY.$$

Il discriminante è $1^2 - 2 \cdot 0 = 1 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto è un **punto di sella**.

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' + y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$. Il discriminante Δ di tale equazione è -4 e quindi non ci sono soluzioni reali. Dalla teoria generale sappiamo che questo caso l'equazione differenziale ammette due soluzioni oscillanti (non esponenziali) $\sin(\sqrt{-\Delta}x/2)$ e $\cos(\sqrt{-\Delta}x/2)$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = A\sin(x) + B\cos(x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' + y = 1$. Dato che a destra compare un polinomio di grado 0 sappiamo che deve esistere una soluzione anch'essa polinomiale di grado almeno 0 ed al più 2; cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = a$ con a da determinarsi.

$$y(x) = a \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = 0,$$

e quindi l'equazione porta a

$$1 = y'' + y = 3 \cdot 0 + a = a$$

dunque $a = 1$, quindi la funzione costante $y(x) = 1$ è una soluzione e la generica soluzione è così:

$$y(x) = A\sin(x) + B\cos(x) + 1, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 3 = y(0) & = B + 1 \\ -1 = y'(0) & = A \end{cases} \iff A = -1,\ B = 2.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = -\sin(x) + 2\cos(x) + 1$.

(8) Si tratta un'equazione lineare, $y' = A(x)y + B(x)$ con $A(x) = -1$ e $B(x) = x$. Siccome $A(x)$ e $B(x)$ sono continue in $\mathbb{R}$ la soluzione esisterà e sarà unica su $\mathbb{R}$ (a seguito del teorema sulle equazioni lineari). Inoltre

$$K(x) = \int A(x)\ dx = \int -\ dx = -x,$$

e perciò

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x}\Big[\int xe^x\ dx + c\Big] = e^{-x}\Big[xe^x - \int e^x\ dx + c\Big] = e^{-x}\Big[(x-1)e^x + c\Big] \\ &= x - 1 + ce^{-x}. \end{aligned}$$

Dato che $y(0) = 0$, abbiamo

$$0 = y(0) = -1 + c \qquad \Longrightarrow \qquad c = 1$$

e così la soluzione (su $\mathbb{R}$) cercata è

$$y(x) = x - 1 + e^{-x}.$$