Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 18.9.2003

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+x^4}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\cdot\log\left(1-\tfrac{1}{x}\right).$$

(2) Stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione

$$x\sin x = \frac{1}{2}.$$

Quante di queste appartengono all'intervallo $(0,\frac{\pi}{2})$?

(3) Studiare il grafico della funzione:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

(Eventuali asintoti obliqui e convessità inclusi).

(4) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int \frac{x}{2+x^2}\,dx, \qquad \int x\sin(x)\,dx, \qquad \int \frac{x+3}{2x-4}\,dx.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x+x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty}\left[\log\left(1+\tfrac{1}{x}\right)-\tfrac{1}{x}\right]dx.$$

(6) Sia $f(x,y) = x^4+4xy-y^4$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - 9y = 8e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y' = 2xy + \dfrac{e^{(x^2+x)}}{1+e^x} \\ y(0) = \log 2. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) • Calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x}$.

Consideriamo la funzione $\frac{x^3}{\sin x}$. Per $x \to 0$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. Dato che $\sin x \sim x$ si ottiene:

$$\frac{x^3}{\sin x} \sim \frac{x^3}{x} = x^2.$$

Il limite è dunque 0^+.

• Calcolo di $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+x^4}}$.

Consideriamo la funzione $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+x^4}}$. Per $x \to +\infty$ a numeratore prevale x mentre a denominatore è x^4 a divergere più rapidamente. Raccogliendo quindi questi termini si ha:

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+x^4}} = \frac{x^{1/2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} \sim \frac{x^{1/2}}{x} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Il limite è dunque 0^+.

• Calcolo di $\lim_{x\to +\infty} x \cdot \log\bigl(1 - \frac{1}{x}\bigr)$.

Consideriamo la funzione $x \cdot \log\bigl(1 - \frac{1}{x}\bigr)$. Per $x \to +\infty$ il primo fattore diverge mentre il secondo, $\log\bigl(1 - \frac{1}{x}\bigr)$, tende a zero. Per poter stabilire il comportamento è dunque necessario stabilire l'esatto ordine di annullamento del secondo fattore. Usando lo sviluppo noto $\log(1+\epsilon) \sim \epsilon$, valido per $\epsilon \to 0$, otteniamo che:

$$x \cdot \log\bigl(1 - \tfrac{1}{x}\bigr) \sim x \cdot \bigl(-\tfrac{1}{x}\bigr) = -1 \to -1.$$

(2) Scriviamo l'equazione nella forma $\sin x = \frac{1}{2x}$. Dal confronto del grafico di $\sin x$ con la curva $\frac{1}{2x}$ si scopre che esistono **infinite** soluzioni. Osserviamo poi che la funzione di sinistra assume il valore 0 in $x = 0$ mentre quella di destra diverge a $+\infty$ per $x \to 0^+$. Inoltre, la funzione di sinistra assume il valore 1 nel punto $\pi/2$ mentre la funzione di destra vi assume il valore $1/\pi < 1$. Da queste considerazioni segue che l'equazione ha un'unica soluzione nell'intervallo $(0, \pi)$. Chiamiamo α tale punto.

Anche se non richiesto dal testo, determiniamo la soluzione α con qualche decimale esatto. Sappiamo già che $\alpha \in (0, \pi/2)$. Per meglio localizzare α utilizziamo il metodo di bisezione. Sia $f(x) = \sin x - \frac{1}{2x}$, allora

$$\begin{aligned}
&f(\pi/4) > 0 \text{ e } f(0^+) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (0, \pi/4)\\
&f(\pi/8) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (\pi/8, \pi/4)\\
&f(3\pi/16) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (3\pi/16, \pi/4)\\
&f(7\pi/32) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (7\pi/32, \pi/4)\\
&f(15\pi/64) < 0 && \Longrightarrow \alpha \in (15\pi/64, \pi/4)\\
&f(31\pi/128) > 0 && \Longrightarrow \alpha \in (15\pi/64, 31\pi/128)
\end{aligned}$$

e dato che $15\pi/64 = 0,7363$ e che $31\pi/128 = 0,7608$, abbiamo la rappresentazione decimale di $\alpha = 0,74 \pm 0,02$.
Usiamo invece il metodo di Newton. La legge ricorsiva è

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - (2x_n \sin(x_n) - 1)/(2\sin(x_n) + 2x_n\cos(x_n))$$

che partendo da $x_0 = 1$ fornisce i valori

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 0,7528748 \quad x_2 = 0,7408970 \quad x_3 = 0,7408409 \quad x_4 = 0,7408409.$$

Possiamo quindi ritenere "con sicurezza" che $\alpha = 0,7408409 \pm 10^{-7}$.

(3) Osserviamo che la funzione è di fatto un polinomio e quindi è definita in $\mathbb{R}$ e su tale dominio ammette derivate di ogni ordine. Osserviamo che $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \sim x^3$ quando x diverge e che quindi f diverge a $+\infty$ quando $x \to +\infty$ ed a $-\infty$ quando $x \to -\infty$. Dato che f diverge come x^3, non esiste retta asintotica né $+\infty$ né a $-\infty$.

Osservando che $f(0) = 0$, appare chiaro che non sarà difficile stabilire dove siano gi eventuali zeri di f: infatti fattorizzando troviamo che

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

e quindi f presenta tre zeri, nei punti di ascissa $0, 1, 2$.

Consideriamo ora $f'(x)$.

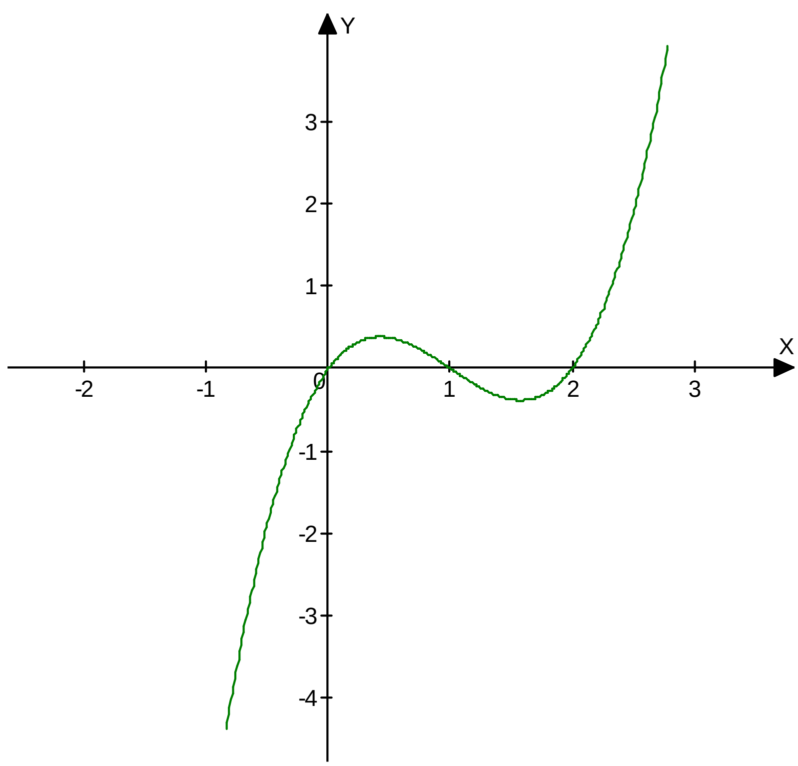
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

quindi gli unici punti stazionari (ovvero le soluzioni di $f'(x) = 0$) sono i punti $x_1 = 1 - 1/\sqrt{3}$ e $x_2 = 1 + 1/\sqrt{3}$; è facile verificare che f' cambia segno nell'attraversare x_1 ed x_2 che quindi devono essere degli effettivi estremanti; di fatto, dalle informazioni precedenti sul comportamento di f segue che x_1 è un **massimo relativo** ed x_2 un **minimo relativo**.

Consideriamo infine $f''(x)$. Si ottiene

$$f''(x) = 6x - 6$$

quindi f'' si annulla unicamente nel punto $x = 1$ e cambia segno nell'attraversare $x = 1$: precisamente, risulta negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$; concludendo, la funzione f non è globalmente né concava né convessa, ma nella regione $x < 1$ ha un grafico concavo e nella regione $x > 1$ ha un grafico convesso.



(4)

$$\int \frac{x}{2+x^2}\,dx \text{ ponendo } x^2 = u \text{ da cui } 2xdx = du \text{ abbiamo}$$
$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{2+u}\,du = \tfrac{1}{2}\log|2+u| = \tfrac{1}{2}\log|2+x^2| = \tfrac{1}{2}\log(2+x^2) + c.$$

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) - \int(-\cos(x))\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c.$$

$$\int \frac{x+3}{2x-4}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{x+3}{x-2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int 1 + \frac{5}{x-2}\,dx = \tfrac{1}{2}(x + 5\log|x-2|) + c.$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x+x^2}\,dx$.

Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$ è continua su tale dominio di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Dato che $\frac{1}{x}$ non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$.

Il dominio di integrazione è $[0, 1]$ mentre l'integranda è continua solo in $(0, 1]$, di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

$$x \to 0^+, \quad f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

La funzione $1/x^{1/2}$ è integrabile in $x \to 0$, quindi anche l'integrale proposto **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\,dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che sia il termine $log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ che $log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sono infinitesimi, tutta via questo di per sé non è sufficiente per stabilire se l'integrale esiste. Osserviamo però che lo sviluppo $\log(1 + \epsilon) = \epsilon - \epsilon^2/2 + o(\epsilon^2)$, valido per $\epsilon \to 0$, dà:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2x^2} + o\left(\tfrac{1}{x^2}\right) - \tfrac{1}{x} \\ &= -\tfrac{1}{2x^2} + o\left(\tfrac{1}{x^2}\right) \sim -\tfrac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

dal che possiamo dedurre che l'integrale proposto **esiste**.

(6) $f(x, y)$ è differenziabile in ogni punto del piano. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 + 4y = 0, \\ -4y^3 + 4x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 + y = 0, \\ x = y^3, \end{cases} \iff \begin{cases} y^9 + y = 0, \\ x = y^4. \end{cases}$$

Raccogliendo y nella prima equazione otteniamo $y(1 + y^8) = 0$, che ammette un'unica soluzione: $y = 0$. Vi è quindi un solo punto stazionario: $A \equiv (0, 0)$. Per stabilire se si tratta di un estremante utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2,$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 4XY.$$

Il discriminante è $2^2 - 0 = 4 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto è un **punto di sella**.

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 9y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 9 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' - 9y = 8e^x$. Dato che a destra compare una funzione del tipo $p(x)e^x$ con $p(x)$ polinomio di grado 0, sappiamo che deve esistere una soluzione anch'essa della forma $q(x)e^x$ dove $q(x)$ è un polinomio di grado al più 2. Cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = ae^x$ con a parametro da determinarsi.

$$y(x) = ae^x \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = ae^x \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = ae^x,$$

e quindi l'equazione porta a

$$8e^x = y'' - 9y = ae^x - 9ae^x = -8ae^x.$$

In questa uguaglianza possiamo dividere per il fattore comune e^x e sempre non nullo, ottenendo $a = -1$. Quindi $y(x) = -e^x$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x} - e^x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 1 = y(0) & = A + B - 1 \\ 1 = y'(0) & = 3A - 3B - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B & = 2 \\ 3A - 3B & = 2 \end{cases} \iff A = 4/3, \; B = 2/3.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}e^{-3x} - e^x$.

(8) Si tratta di un'equazione lineare, ovvero di un'equazione della forma $y' = A(x) \cdot y + B(x)$ con $A(x) = 2x$ e $B(x) = \frac{e^{(x^2+x)}}{1+e^x}$. Dato che i coefficienti A e B sono funzioni continue su $\mathbb{R}$, dal teorema di esistenza ed unicità per le equazioni lineari segue che esiste una ed una sola soluzione ad ogni P.C. e che tale soluzione risulta definita su $\mathbb{R}$.
Per determinarla, osserviamo che $K(x) := \int A(x)\, dx = x^2$ e che quindi la soluzione è data da

$$\begin{aligned} y(x) = e^{K(x)}\left[\int B(x)e^{-K(x)}\, dx + c\right] &= e^{x^2}\left[\int \frac{e^{(x^2+x)}}{1+e^x}\, e^{-x^2}\, dx + c\right] \\ = e^{x^2}\left[\int \frac{e^{(x^2+x-x^2)}}{1+e^x}\, dx + c\right] &= e^{x^2}\left[\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx + c\right] \\ = e^{x^2}\big(\log(1+e^x) + c\big). \end{aligned}$$

Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = \log 2$ determiniamo subito il valore di c:

$$\log 2 = e^0(\log 2 + c)$$

quindi $c = 0$ e dunque la funzione

$$y(x) = e^{x^2} \log(1 + e^x)$$

è soluzione del P.C. su $\mathbb{R}$.