Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 21.9.2004

Il candidato risolva **interamente almeno due** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = -1$.

(2) Sia $f(x, y) = x^3 - xy + y$. Determinare tutti i punti stazionari di questa funzione. Stabilire poi se si tratta di punti di minimo, massimo o sella, relativi.

(3) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = (2x - 1)e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(4) Sia $f(x, y) = xy^4 - 3x^2y^2 + x + y$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y).$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{x^2 + 1}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x + x^2}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \Big(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - 1\Big)\,dx.$$

(6) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 1\,dx, \qquad \int \frac{2x - 1}{x + 1}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\,dx.$$

(7) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x + 1}{y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa -1 è:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1).$$

Dato che $f'(x) = (1+2x)/(2\sqrt{1+x-x^2})$, ne segue che

$$f(-1) = \sqrt{1} = 1, \quad f'(-1) = -1/2,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = 1 - 1(x+1)/2, \quad \text{ovvero} \quad y = -x/2 + 1/2.$$

(2) Anzitutto calcoliamo le derivate prime e seconde di $f(x, y)$, ottenendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

I punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione $\operatorname{grad} f = 0$ ovvero del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ -x + 1 = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} y = 3x^2 \\ x = 1. \end{cases}$$

Vi è quindi un unico punto stazionario, il punto $(1, 3)$. Il polinomio Hessiano in $(1, 3)$ è

$$P_{(1,3)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,3)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,3)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,3)Y^2 = 6X^2 - 2XY.$$

Il discriminante è $(-1)^2 - 6 \cdot 0 = 1 > 0$ quindi si tratta di un **punto di sella**.

(3) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - y' - 2y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' - y' - 2y = (2x-1)e^x$. Dato che a destra compare una funzione della forma $p(x)e^x$ dove $p(x)$ è un polinomio di primo grado, cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = (ax - b)e^x$ con a e b parametri da determinarsi.

$$y(x) = (ax+b)e^x \implies y'(x) = (ax+a+b)e^x \implies y''(x) = (ax+2a+b)e^x$$

e quindi l'equazione porta a

$$\begin{aligned} (2x-1)e^x &= y'' - y' - 2y \\ &= (ax+2a+b)e^x - (ax+a+b)e^x - 2(ax+b)e^x \\ &= (-2ax + a - 2b)e^x \end{aligned}$$

da cui

$$2x - 1 = -2ax + a - 2b \iff \begin{cases} 2 = -2a \\ -1 = a - 2b, \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Quindi $y(x) = xe^x$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - xe^x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 0 = y(0) &= A + B \\ 1 = y'(0) &= -A + 2B - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B &= 0 \\ -A + 2B &= 2 \end{cases} \iff A = -2/3,\ B = 2/3.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = -\frac{2}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} - xe^x$.

(4) Nell'eseguire le derivate si tenga presente che l'ordine non ha nessuna importanza poiché $f(x, y)$ è una funzione evidentemente differenziabile ad ogni ordine. Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^4 - 6xy^2 + 1,\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^4 - 6xy^2 + 1) = 4y^3 - 12xy,\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4y^3 - 12xy) = -12y,\\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-12y) = -12.
\end{aligned}$$

(5) • Esistenza di $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x^2+1}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[2, +\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x^2+1}$ è continua su tale dominio, quindi dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x^2+1} \sim \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x^2} \sim \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

Dato che $\frac{2}{x}$ non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[0, 1]$ ma l'integranda è continua solo su $(0, 1]$ di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}$ per $x \to 0$.

$$x \to 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+x^2} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Dato che la funzione $1/x^{1/2}$ è integrabile in 0 deduciamo che l'integrale **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - 1\right) dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - 1$. Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Ricordando lo sviluppo di Taylor

$$\sqrt{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{1/2} = 1 + \epsilon/2 + o(\epsilon)$$

scopriamo che

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - 1 = 1 + \frac{5}{2x^2} + O(\frac{1}{x^2}) - 1 = \frac{5}{2x^2} + O(\frac{1}{x^2}) = \frac{5}{2x^2}(1 + O(1)) \sim \frac{5}{2x^2}$$

Dato che la funzione $5/x^2$ è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **esiste**.

(6)

$$\int \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 1\ dx = \int x^{1/2} - x^{-2} + 1\ dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{-1}}{-1} + x + c$$
$$= \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{x} + x + c.$$

$$\int \frac{2x-1}{x+1}\ dx = \int 2\ dx - \int \frac{3}{x+1}\ dx = 2x - 3\log|x+1| + c.$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\ dx =$$

cambiamento di variabile: $\sqrt{x} = \gamma$, quindi $x = \gamma^2$ da cui $dx = 2\gamma d\gamma$

$$= \int \frac{1}{\gamma^2+\gamma} 2\gamma\ d\gamma = \int \frac{2}{\gamma+1}\ d\gamma = 2\log|1+\gamma| + c = 2\log|1+\sqrt{x}| + c.$$

(7) La funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ è differenziabile ad ogni ordine (in quanto è razionale ed è definita su tutto l'asse reale) quindi possiamo ottenere le informazioni cercate dallo studio del segno di $f'(x)$ ed $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1+2x-x^2}{(x^2+1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{(2-2x)\cdot(x^2+1)^2 - (1+2x-x^2)(x^2+1)2\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{(x+1)(2x^2-8x+2)}{(x^2+1)^3}$$

In entrambe i casi il segno di $f'(x)$ e di $f''(x)$ dipende esclusivamente dal numeratore (poiché il numeratore è sempre positivo), di conseguenza Dato che

$$f'(x) > 0 \iff 1-2x-x^2 > 0 \iff x^2+2x-1 < 0 \iff -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2},$$

il punto $x = -1-\sqrt{2}$ sarà quindi un massimo locale mentre il punto $x = 1+\sqrt{2}$ sarà un minimo locale.

Analogamente,

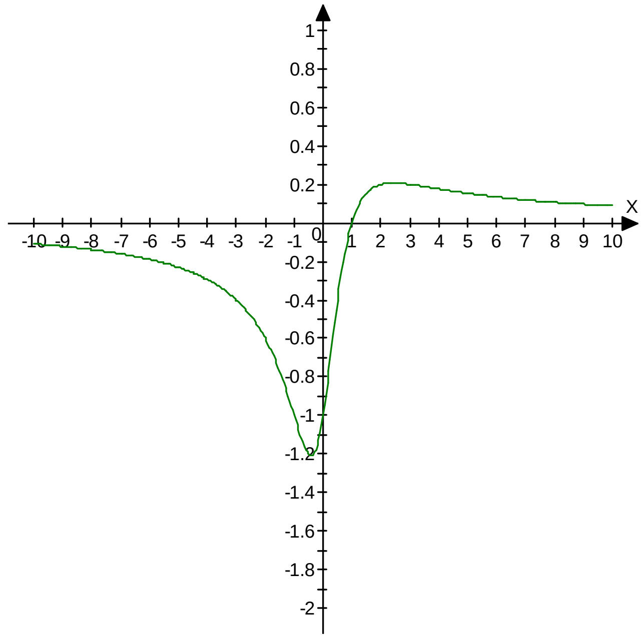
$$f''(x) > 0 \iff (x+1)(2x^2-8x+2) > 0.$$

Anzitutto determiniamo le soluzioni dell'equazione $(x+1)(2x^2-8x+2) = 0$. Il primo fattore si annulla in $x = -1$, il secondo si annulla in $2 \pm \sqrt{3}$. La funzione f'' quindi può essere scritta anche come

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

e da questa espressione si vede che essa cambia segno nell'intorno di ciascuno dei punti -1, $-2-\sqrt{3}$ e $-2+\sqrt{3}$ che quindi sono tutti *flessi* per la funzione $f(x)$.

Infine, osserviamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.



(8) Si tratta un'equazione a variabili separabili, $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = x+1$ e $g(x) = 1/y^2$; In un intorno del punto $x = 0$ la soluzione sarà quella fornita dalla separazione delle variabili, ovvero dovrà soddisfare l'identità

$$\int y^2 \, dy = \int x + 1 \, dx = x^2/2 + x + c \quad \Longrightarrow \quad y^3/3 = x^2/2 + x + c,$$

per una opportuna scelta del parametro c. Dalla condizione iniziale sappiamo che $y(0) = 1$, quindi

$$1^3/3 = 0^2/2 + 0 + c, \quad \Longrightarrow \quad c = 1/3,$$

così che $y^3/3 = x^2/2 + x + 1/3$ da cui

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3x + 1$$

e così

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x + 1}.$$

Per determinare su quale insieme questa funzione sia effettivamente la soluzione del P.C. osserviamo che come di consueto per equazioni a variabili separabili questo è il più ampio intervallo (a, b) contenente 0 ed in cui la funzione trovata non assume alcuno dei valori che annullano la funzione $g(y)$ o in cui g no risulta definita. Nel caso in esame non vi sono valori per cui g si annulla ma v'è un punto in cui tale funzione non è definita: $y = 0$. L'intervallo cercato sarà quindi il più ampio intervallo (a, b) contenente lo 0 su cui la funzione trovata non assume il valore 0. L'equazione $y(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x + 1} = 0$ ha per soluzione i punti $-1 \pm 1/\sqrt{3}$; di questi il punto $-1 + 1/\sqrt{3}$ è il maggiore ma è comunque negativo. Il più ampio intervallo con le caratteristiche cercate è quindi l'intervallo $(-1 + 1/\sqrt{3}, +\infty)$. Concludendo, abbiamo trovato che $\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x + 1}$ è soluzione nell'intervallo $(-1 + 1/\sqrt{3}, +\infty)$.