Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 29.6.2004

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia $f(x,y) = x\sin y + y\cos x$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x,y).$$

(2) Sia $f(x,y) = x^2 + x^3 - 3xy^2 + y^2$. Determinare tutti i punti stazionari di questa funzione. Successivamente, stabilire la natura (Massimo, minimo o sella) di uno di essi *a scelta* (*quindi non di tutti!*).

(3) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = 14e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(4) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3 - 1}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sin(x)}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \log\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)\, dx.$$

(6) Sia $f(x) = \log(1 + x - x^2)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 1$.

(7) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \sin(\sqrt{x})\, dx, \qquad \int \frac{\log^4(x)}{x}\, dx, \qquad \int \frac{1-2x}{3x+1}\, dx.$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+1}{y} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) Nell'eseguire le derivate si tenga presente che l'ordine non ha nessuna importanza poiché $f(x,y)$ è una funzione evidentemente differenziabile ad ogni ordine. Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y - y\sin x,\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y - y\sin x) = \cos y - \sin x,\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y - \sin x) = -\cos x,\\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-\cos x) = 0.
\end{aligned}$$

(2) Anzitutto calcoliamo le derivate prime e seconde di $f(x,y)$, ottenendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy + 2y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x + 2.$$

I punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione $\operatorname{grad} f = 0$ ovvero del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3x^2 - 3y^2 = 0\\ -6xy + 2y = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3x^2 - 3y^2 = 0\\ 2y(1-3x) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha per soluzione $y = 0$ oppure $x = 1/3$. Assumendo $y = 0$ la prima equazione diventa:

$$2x + 3x^2 = 0 \implies x = 0 \text{ oppure } x = -2/3.$$

Assumendo invece $x = 1/3$ la prima equazione diventa

$$1 - 3y^2 = 0 \implies y = 1/\sqrt{3} \text{ oppure } y = -1/\sqrt{3}.$$

Concludendo, ci sono 4 punti stazionari:

$$(0,0), \quad (-2/3,0), \quad (1/3,1/\sqrt{3}), \quad (1/3,-1/\sqrt{3}).$$

Il polinomio Hessiano in $(0,0)$ è

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 2X^2 + 2Y^2.$$

Il discriminante è $0^2 - 2\cdot 2 = -4 < 0$ quindi è un estremante. Il coefficiente di X^2 è positivo quindi il punto $(0,0)$ è un **punto di minimo**.

Il polinomio Hessiano in $(-2/3,0)$ è

$$P_{(-2/3,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2/3,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2/3,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2/3,0)Y^2 = -2X^2 + 6Y^2.$$

Il discriminante è $0^2 - (-2)\cdot 6 = 12 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto $(-2/3,0)$ è un **punto di sella**.

Il polinomio Hessiano in $(1/3,1/\sqrt{3})$ è

$$\begin{aligned}
P_{(1/3,1/\sqrt{3})}(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/3,1/\sqrt{3})X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1/3,1/\sqrt{3})XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1/3,1/\sqrt{3})Y^2\\
&= 4X^2 + 2\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}XY.
\end{aligned}$$

Il discriminante è $(6/\sqrt{3})^2 - 4\cdot 012 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto $(1/3,1/\sqrt{3})$ è un **punto di sella**.

Il polinomio Hessiano in $(1/3, -1/\sqrt{3})$ è

$$\begin{aligned} P_{(1/3,-1/\sqrt{3})}(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/3,-1/\sqrt{3})X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1/3,-1/\sqrt{3})XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1/3,-1/\sqrt{3})Y^2 \\ &= 4X^2 - 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} XY. \end{aligned}$$

Il discriminante è $(-6/\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 012 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto $(1/3, -1/\sqrt{3})$ è un **punto di sella**.

(3) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 7y' + 6y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{6x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' - 7y' + 6y = 14e^{-x}$. Dato che a destra compare una funzione trigonometrica, cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = ae^{-x}$ con a parametro da determinarsi.

$$y(x) = ae^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = -ae^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = ae^{-x}$$

e quindi l'equazione porta a

$$\begin{aligned} 14e^{-x} &= y'' - 7y' + 6y \\ &= ae^{-x} - 7 \cdot (-a)e^{-x} + 6 \cdot ae^{-x} \\ &= 14ae^{-x} \end{aligned}$$

da cui

$$14 = 14a \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1.$$

Quindi $y(x) = e^{-x}$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^x + Be^{6x} + e^{-x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 1 = y(0) &= A + B + 1 \\ 0 = y'(0) &= A + 6B - 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A + B &= 0 \\ A + 6B &= 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad A = -1/5,\ B = 1/5.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = -\frac{1}{5}e^x + \frac{1}{5}e^{6x} + e^{-x}$.

(4) La funzione $f(x) = x/(x^2+1)$ è differenziabile ad ogni ordine quindi possiamo ottenere le informazioni cercate dallo studio del segno di $f'(x)$ ed $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}, \\ f''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2)(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

In entrambe i casi il segno di $f'(x)$ e di $f''(x)$ dipende esclusivamente dal numeratore (poiché il numeratore è sempre positivo), di conseguenza Dato che

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 1,$$

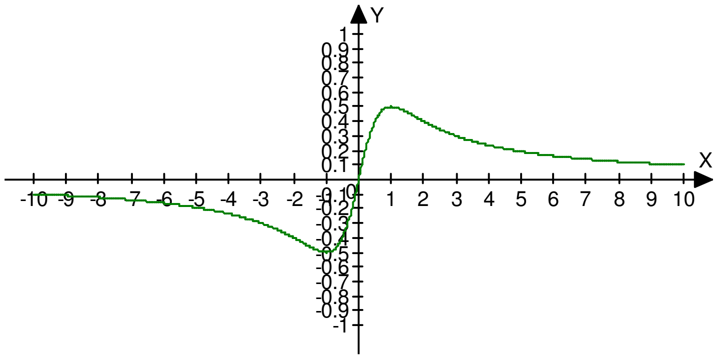
il punto $x = -1$ sarà quindi un minimo locale mentre il punto $x = 1$ sarà un massimo locale.

Analogamente,

$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x(x^2-3) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt{3} < x < 0, \ \text{ oppure } \ x > \sqrt{3}.$$

Dato che $f''(x)$ cambia segno nell'intorno di $-\sqrt{3}$, 0 e di $\sqrt{3}$, questi punti sono flessi.

Infine, osserviamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.



(5) • Esistenza di $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3-1}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3-1}$ è continua su tale dominio, di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3-1} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}.$$

Dato che $\frac{1}{x}$ non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sin(x)}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[0, 1]$ ma l'integranda è continua solo su $(0, 1]$ di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sin(x)}$ per $x \to 0$.

$$x \to 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sin(x)} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin(x)} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

Dato che la funzione $1/x^{2/3}$ è integrabile in 0 deduciamo che l'integrale **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \log\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)\, dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \log\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)$. Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Abbiamo che

$$f(x) = \log\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) \sim -\frac{1}{x^2}.$$

Dato che la funzione $-1/x^2$ è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **esiste**.

(6) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 1 è:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Dato che $f'(x) = (1 - 2x)/(1 + x - x^2)$, ne segue che

$$f(1) = \log(1) = 0, \quad f'(1) = -1,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = 0 - 1(x - 1), \quad \text{ovvero} \quad y = -x + 1.$$

(7)

$$\int \sin(\sqrt{x})\ dx =$$

cambiamento di variabile: $\sqrt{x} = \gamma$, quindi $x = \gamma^2$ da cui $dx = 2\gamma d\gamma$

$$\begin{aligned}
&= \int \sin(\gamma) 2\gamma\ d\gamma = \int 2\gamma \sin(\gamma)\ d\gamma \\
&= -2\gamma\cos(\gamma) + \int 2\cos(\gamma)\ d\gamma = -2\gamma\cos(\gamma) + 2\sin(\gamma) + c \\
&= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}) + c.
\end{aligned}$$

$$\int \frac{\log^4(x)}{x}\ dx =$$

cambiamento di variabile: $\log(x) = \gamma$, quindi $x = e^\gamma$ da cui $dx = e^\gamma d\gamma$

$$= \int \gamma^4\ d\gamma = \frac{\gamma^5}{5} + c = \frac{\log^5(x)}{5} + c.$$

$$\int \frac{1-2x}{3x+1}\ dx = \int -\frac{2}{3}\ dx + \int \frac{5/3}{3x+1}\ dx = -\frac{2x}{3} + \frac{5\log|3x+1|}{9} + c.$$

(8) Si tratta un'equazione a variabili separabili, $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = x+1$ e $g(x) = 1/y$; In un intorno del punto $x = 0$ la soluzione sarà quella fornita dalla separazione delle variabili, ovvero dovrà soddisfare l'identità

$$\int y\ dy = \int x+1\ dx = x^2/2 + x + c \qquad \Longrightarrow \qquad y^2/2 = x^2/2 + x + c,$$

per una opportuna scelta del parametro c. Dalla condizione iniziale sappiamo che $y(0) = 2$, quindi

$$2^2/2 = 0^2/2 + 0 + c, \qquad \Longrightarrow \qquad c = 2,$$

così che $y^2/2 = x^2/2 + x + 2$ da cui

$$y^2 = x^2 + 2x + 4$$

da cui

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

Delle due funzioni trovate solo una effettivamente soluzione: per capire quale osserviamo che stiamo cercando quella che soddisfa la richiesta $y(0) = 2$ che è evidentemente maggiore di zero. La soluzione cercata è quindi:

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

Per determinare su quale insieme questa funzione sia effettivamente la soluzione del P.C. osserviamo che come di consueto per equazioni a variabili separabili questo è il più ampio intervallo (a, b) contenente 0 ed in cui la funzione trovata non assume alcuno dei valori che annullano la funzione $g(y)$ o in cui g no risulta definita. Nel caso in esame non vi sono valori per cui g si annulla ma v'è un punto in cui tale funzione non è definita: $y = 0$. L'intervallo cercato sarà quindi il più ampio intervallo (a, b) contenente lo 0 su cui la funzione trovata non assume il valore 0. Dato che l'equazione $y(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} = 0$ non ha nessuna soluzione, possiamo concludere che $y(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ è soluzione su tutto l'asse reale.