Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 11.11.2004

Il candidato risolva **interamente almeno due** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia $f(x) = \log(1 + x + x^2)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = -1$.

(2) Sia $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Determinare tutti i punti stazionari di questa funzione. Stabilire poi se si tratta di punti di minimo, massimo o sella, relativi.

(3) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 6 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

(4) Sia $f(x, y) = x^5 - 2x^2y^3$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y).$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x + \sqrt{x+3}}{x^2 + x\sqrt{x+1} + 1}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 - 1}\right) dx.$$

(6) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2} + 2\, dx, \qquad \int \frac{2x^2 - 1}{x + 1}\, dx, \qquad \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

(7) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa -1 è:
$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1).$$
Dato che $f'(x) = (1+2x)/(1+x+x^2)$, ne segue che
$$f(-1) = \log(1) = 0, \quad f'(-1) = -1,$$
e così la retta cercata ha equazione
$$y = 0 - (x+1), \quad \text{ovvero} \quad y = -x-1.$$

(2) Anzitutto calcoliamo le derivate prime e seconde di $f(x,y)$, ottenendo:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + y^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$
I punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione grad $f = 0$ ovvero del sistema
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ x + 3y^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -3x^2 \\ x + 3(-3x^2)^2 = 0 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} y = -3x^2 \\ x + 3^3x^4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -3x^2 \\ x(1 + 3^3x^3) = 0. \end{cases}$$
Vi sono quindi due punto stazionari: $(0,0)$ e il punto $(-1/3,-1/3)$. Il polinomio Hessiano in $(0,0)$ è
$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1/3,-1/3)Y^2 = 2XY.$$
Il discriminante è $1^2 - 0 \cdot 0 = 1 > 0$ quindi si tratta di un **punto di sella**.

Il polinomio Hessiano in $(-1/3,-1/3)$ è
$$\begin{aligned} P_{(-1/3,-1/3)}(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1/3,-1/3)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1/3,-1/3)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1/3,-1/3)Y^2 \\ &= -2X^2 + 2XY - 2Y^2. \end{aligned}$$
Il discriminante è $1^2 - (-2)\cdot(-2) = -3 < 0$ quindi si tratta di un punto estremante; dato che il coefficiente di X^2 è negativo, si tratta di un **punto di massimo relativo**.

(3) La funzione che compare a destra dell'equazione è una funzione costante, e quindi è evidentemente continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 2y' - 3y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è
$$u(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$
Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' - 2y' - 3y = 6$. Dato che a destra compare una funzione della forma $p(x)$ dove $p(x)$ è un polinomio di grado zero, cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = q(x)$ con $q(x)$ polinomio anch'esso di grado *zero*, e quindi $y(x) = a$ con a parametro da determinarsi.
$$y(x) = a \quad \implies \quad y'(x) = 0 \quad \implies \quad y''(x) = 0$$
e quindi l'equazione porta a
$$6 = y'' - 2y' - 6y = -6a$$

da cui $a = -1$. Quindi $y(x) = -1$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - 1, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 2 = y(0) & = A + B \\ 2 = y'(0) & = -A + 3B \end{cases} \iff A = 1,\ B = 1.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = e^{-x} + e^{3x} - 1$.

(4) Nell'eseguire le derivate si tenga presente che l'ordine non ha nessuna importanza poiché $f(x, y)$ è una funzione evidentemente differenziabile ad ogni ordine. Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 - 4xy^3, \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(5x^4 - 4xy^3) = -12xy^2, \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-12xy^2) = -12y^2, \\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-12y^2) = -24y.
\end{aligned}$$

(5) • Esistenza di $\int_0^{+\infty} \frac{x+\sqrt{x+3}}{x^2+x\sqrt{x+1}+1}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[0, +\infty)$ e la funzione $f(x) := \frac{x+\sqrt{x+3}}{x^2+x\sqrt{x+1}+1}\, dx$ è continua su tale dominio, quindi dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x + \sqrt{x+3}}{x^2 + x\sqrt{x+1} + 1}\, dx \sim \frac{x + \sqrt{x+3}}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Dato che $\frac{2}{x}$ non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[0, 1]$ ma l'integranda è continua solo su $(0, 1]$ di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x) := \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$ per $x \to 0$.

$$x \to 0, \quad f(x) = \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{1/3}}$$

Dato che la funzione $1/x^{1/3}$ è integrabile in 0 deduciamo che l'integrale **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 - 1}\right) dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) := \sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 - 1}$. Il dominio di integrazione è $[1, +\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
f(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 - 1} &= \frac{(\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3 - 1})(\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 - 1}))}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3 - 1}} \\
&= \frac{x^3 - x^3 + 1}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3 - 1}} \sim \frac{1}{2x^{3/2}}
\end{aligned}$$

Dato che la funzione $2/x^{3/2}$ è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **esiste**.

(6)

$$\int \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2} + 2\ dx = \int x^{1/3} + 3x^2 + 2\ dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + x^3 + 2x + c$$
$$= \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + x^3 + 2x + c.$$

$$\int \frac{2x^2-1}{x+1}\ dx = \int 2x - 2\ dx + \int \frac{1}{x+1}\ dx = x^2 - 2x + \log|x+1| + c.$$

$$\int\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx =$$

cambiamento di variabile: $\sqrt{x} = \gamma$, quindi $x = \gamma^2$ da cui $dx = 2\gamma d\gamma$

$$= \int\int \frac{\sin\gamma}{\gamma} 2\gamma\ d\gamma = \int 2\sin\gamma\ d\gamma = -2\cos\gamma + c = -2\cos\sqrt{x} + c.$$

(7) La funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ è differenziabile ad ogni ordine (in quanto è razionale ed è definita su tutto l'asse reale) quindi possiamo ottenere le informazioni cercate dallo studio del segno di $f'(x)$ ed $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x^2+1) - 2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)\cdot(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2)(x^2+1)2\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{x(6-2x^2)}{(x^2+1)^3}$$

In entrambe i casi il segno di $f'(x)$ e di $f''(x)$ dipende esclusivamente dal numeratore (poiché il numeratore è sempre positivo), inoltre il numeratore di $f'(x)$ è $x^2(x^2+3)$ che evidentemente è sempre maggiore od uguale a zero, e di fatto è uguale a zero unicamente in $x = 0$; da ciò segue che f non punti estremanti ed anzi è strettamente crescente. Analogamente,

$$f''(x) > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x(6-2x^2) > 0.$$

Anzitutto determiniamo le soluzioni dell'equazione $x(6-2x^2) = 0$. Il primo fattore si annulla in $x = 0$, il secondo si annulla in $x = \pm\sqrt{3}$. La funzione f'' quindi può essere scritta anche come

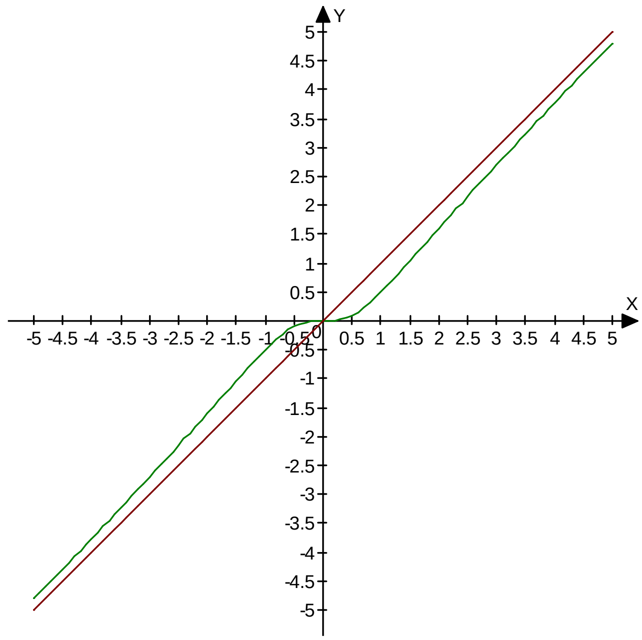
$$f''(x) = \frac{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

e da questa espressione si vede che essa cambia segno nell'intorno di ciascuno dei punti 0, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ che quindi sono tutti *flessi* per la funzione $f(x)$.

Infine, osserviamo che per $x \to \pm\infty$, si ha

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} = x + o(1)$$

e quindi la retta $y = x$ è un asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.



(8) Si tratta un'equazione lineare, $y' = A(x)y + B(x)$ con $A(x) = 1/\sqrt{x}$ e $B(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$; dato che sia $A(x)$ che $B(x)$ sono continue in $(0, +\infty)$, dalla teoria delle equazioni lineari sappiamo che la soluzione del P.C. proposto deve esistere ed essere unica in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Per determinarla anzitutto cerchiamo una primitiva di $A(X)$:

$$K(x) := \int A(x)\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x};$$

dopo di che la formula risolutiva dà:

$$y(x) = e^{K(x)} \int e^{-K(x)} B(x)\,dx = e^{2\sqrt{x}} \Big[\int e^{-2\sqrt{x}}\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx\Big] = e^{2\sqrt{x}} \Big[\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx\Big]$$

per calcolare l'integrale effettuiamo la sostituzione $x = t^2$, da cui $dx = 2dt$, ottenendo

$$y(x) = e^{2\sqrt{x}} \Big[\int 2t^2 e^{-t}\,dt\Big]$$

ed ora integriamo per parti (due volte):

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{2\sqrt{x}} \Big[-2t^2e^{-t} + \int 4te^{-t}\,dt + c\Big] \\ &= e^{2\sqrt{x}} \Big[-2t^2e^{-t} - 4te^{-t} + \int 4e^{-t}\,dt + c\Big] \\ &= e^{2\sqrt{x}} \Big[-2t^2e^{-t} - 4te^{-t} - 4e^{-t} + c\Big] \\ &= e^{2\sqrt{x}} \Big[-2xe^{-\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 4e^{-\sqrt{x}} + c\Big] \\ &= (-2x - 4\sqrt{x} - 4)e^{\sqrt{x}} + ce^{-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Determiniamo ora la costante c tramite la condizione iniziale:

$$0 = y(1) = (-2 - 4 - 4)e + ce^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad c = 10e^2.$$

La soluzione è quindi

$$y(x) = (-2x - 4\sqrt{x} - 4)e^{\sqrt{x}} + 10e^{2-\sqrt{x}},$$

su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$.