Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 16.4.2004

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia
$$f(x) = \log(1 + x + x^2).$$
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 0$.

(2) Sia $f(x, y) = xy\sin(y)$. Calcolare le seguenti derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y).$$

(3) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:
$$f(x) = x^3 e^{-x}.$$

(4) Calcolare le seguenti primitive.
$$\int (x^2 + 1)\log(x)\ dx, \qquad \int (2x - 1)\cos(x)\ dx, \qquad \int \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}\ dx.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \log(x)}{1 + x^3 + x^4}\ dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x} - x^2}{2x + x^4}\ dx, \qquad \int_1^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]\ dx.$$

(6) Sia $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 10\sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.
$$\begin{cases} y' = 4x\sqrt{1 + y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) La funzione $f(x)$ è composizione del logaritmo e di un polinomio e quindi è sicuramente differenziabile in ogni punto del suo dominio. Il punto $x = 0$ appartiene a tale insieme e quindi la retta tangente cercata esiste. La formula che dà l'equazione della tangente è

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dato che

$$f(x) = \log(1 + x + x^2) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2},$$

abbiamo che

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1$$

e quindi la retta cercata è quella di equazione

$$y = 0 + 1(x - 0), \quad \text{ovvero} \quad y = x.$$

(2) Nell'eseguire le derivate si tenga presente che l'ordine non ha nessuna importanza poiché $f(x, y)$ è una funzione evidentemente differenziabile ad ogni ordine. Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \sin y,\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y \sin y) = \sin y + y \cos y,\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin y + y \cos y) = 0,\\
&\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0.
\end{aligned}$$

(3) La funzione $f(x) = x^3 e^{-x}$ è differenziabile ad ogni ordine quindi possiamo ottenere le informazioni cercate dallo studio del segno di $f'(x)$ ed $f''(x)$.

$$f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = x^2(3 - x)e^{-x}, \quad f''(x) = (6x - 6x^2 + x^3)e^{-x} = x(6 - 6x + x^2)e^{-x}.$$

In entrambe i casi il segno di $f'(x)$ e di $f''(x)$ dipende esclusivamente dal fattore polinomiale (poiché $e^{-x} > 0$ per ogni x), di conseguenza Dato che

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2(3 - x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 3 \text{ ed } x \neq 0,$$

Il punto $x = 3$ sarà quindi un massimo locale mentre $x = 0$ non è un estremante ($f'(x)$ non cambia segno nell'intorno di tale punto).

Analogamente,

$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(6 - 6x + x^2) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 0, \text{ oppure } x \in (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}).$$

Dato che $f''(x)$ cambia segno nell'intorno di ciascuno di essi, i punti 0, $3 - \sqrt{3}$ e $3 + \sqrt{3}$ sono di flesso.

Infine, osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale. Mentre $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$ e quindi non esiste alcun asintoto obliquo a $-\infty$.

(4)

$$\int (x^2+1)\log(x)\ dx = (\tfrac{x^3}{3}+x)\log(x) - \int (\tfrac{x^3}{3}+x)\tfrac{dx}{x} = (\tfrac{x^3}{3}+x)\log(x) - \int (\tfrac{x^2}{3}+1)\ dx$$
$$= (\tfrac{x^3}{3}+x)\log(x) - \tfrac{x^3}{9} - x + c.$$

$$\int (2x-1)\cos(x)\ dx = (2x-1)\sin x - \int 2\sin x\ dx = (2x-1)\sin x + 2\cos x + c.$$

$$\int \frac{x^2-x-1}{x-1}\ dx = \int x - \frac{1}{x-1}\ dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + c.$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+\log(x)}{1+x^3+x^4}\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x^2+\log(x)}{1+x^3+x^4}$ è continua su tale dominio, di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x^2+\log(x)}{1+x^3+x^4} \sim \frac{x^2+\log(x)}{x^4} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

Dato che $\frac{1}{x^2}$ è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-x^2}{2x+x^4}\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[0,1]$ ma l'integranda è continua solo su $(0,1]$ di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x^2}{2x+x^4}$ per $x \to 0$.

$$x \to 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}-x^2}{2x+x^4} \sim \frac{\sqrt{x}-x^2}{2x} \sim \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2x^{1/2}}$$

Dato che la funzione $1/x^{1/2}$ è integrabile in 0 deduciamo che l'integrale **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \Big[\cos\big(\frac{1}{x}\big) - 1\Big]\ dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \cos\big(\frac{1}{x}\big) - 1$. Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che l'argomento della funzione coseno, ovvero la quantità $1/x$, è infinitesimo; utilizzando quindi la relazione $\cos\epsilon = 1 - \epsilon^2/2 + o(\epsilon^2)$ (valida per ogni infinitesimo ϵ) abbiamo che

$$f(x) = \cos\big(\frac{1}{x}\big) - 1 = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\big(\frac{1}{x^2}\big) - 1 = -\frac{1}{2x^2} + o\big(\frac{1}{x^2}\big) \sim -\frac{1}{2x^2}.$$

Dato che la funzione $1/x^2$ è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **esiste**.

(6) La funzione $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy$ è un polinomio e quindi è differenziabile ad ordine in tutti i punti del piano. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\mathrm{grad}\, f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + y = 0, \\ -2y + x = 0. \end{cases}$$

Sostituendo y ricavata dalla prima equazione nella seconda abbiamo:

$$\begin{cases} y = -3x^2, \\ x + 6x^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x(1+6x) = 0, \\ y = -3x^2. \end{cases}$$

Vi sono quindi due punti stazionari: $(0,0)$ e $(-1/6,-1/12)$. Per scoprire se si tratta di estremanti utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2,$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 2XY - 2Y^2.$$

Il discriminante è $1^2 - 2 \cdot 0 = 1 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto $(0,0)$ è un **punto di sella**.

$$P_{(-1/6,-1/12)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = -X^2 + 2XY - 2Y^2.$$

Il discriminante è $1^2 - (-1) \cdot (-2) = -1 < 0$ e quindi si tratta di un polinomio definito. Dato che il coefficiente di X^2 è negativo, il punto $(-1/6,-1/12)$ è un **punto di massimo**.

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$. Dato che a destra compare una funzione trigonometrica, cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = a \sin x + b \cos x$ con a, b parametri da determinarsi.

$$y(x) = a \sin x + b \cos x \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = a \cos x - b \sin x \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = -a \sin x - b \cos x,$$

e quindi l'equazione porta a

$$\begin{aligned} 10 \sin x &= y'' - 3y' + 2y \\ &= (-a \sin x - b \cos x) - 3(a \cos x - b \sin x) + 2(a \sin x + b \cos x) \\ &= (-a + 3b + 2a) \sin x + (-b - 3a + 2b) \cos x \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} a + 3b &= 10 \\ b - 3a &= 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1, \quad b = 3.$$

Quindi $y(x) = sinx + 3 \cos x$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + sinx + 3 \cos x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 1 = y(0) &= A + B + 3 \\ 0 = y'(0) &= A + 2B + 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A + B &= -3 \\ A + 2B &= -1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad A = -5, \; B = 2.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = -5e^x + 2e^{2x} + sinx + 3 \cos x$.

(8) Si tratta un'equazione a variabili separabili, $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = 4x$ e $g(x) = \sqrt{1+y}$; Siccome $g(-1) = 0$, l'equazione ammette la soluzione costante $y \equiv -1$ che però non soddisfa la condizione di Cauchy proposta e quindi non è la soluzione cercata. In un intorno del punto $x = 0$ la soluzione sarà dunque quella fornita dalla separazione delle variabili, ovvero dovrà soddisfare l'identità

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \int 4x \; dx = 2x^2 + c \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{1+y} = 2x^2 + c,$$

per una opportuna scelta del parametro c. Dalla condizione iniziale sappiamo che $y(0) = 0$, quindi

$$2\sqrt{1+0} = 2 \cdot 0^2 + c, \qquad \Longrightarrow \qquad c = 2,$$

così che $2\sqrt{1+y} = 2x^2 + 2$ da cui

$$\sqrt{1+y} = x^2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + y = (x^2+1)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = (x^2+1)^2 - 1,$$

e quindi la soluzione in un intorno di $x = 0$ è data dal polinomio

$$y(x) = (x^2+1)^2 - 1.$$

Per determinare su quale insieme questa funzione sia effettivamente la soluzione del P.C. osserviamo che come di consueto per equazioni a variabili separabili questo è il più ampio intervallo (a, b) contenente 0 ed in cui la funzione trovata non assume alcuno dei valori che annullano la funzione $g(y)$. Nel caso in l'unico valore che annulla g è -1 e dato che l'equazione $(x^2+1)^2 - 1 = -1$ non ha nessuna soluzione, possiamo concludere che $y(x) = (x^2+1)^2 - 1$ è soluzione su tutto l'asse reale.