Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Prima prova versione A: 1.12.2003

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^4 x^2 + x - \frac{3}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^2 - x - 1}{x+1}\, dx.$$

(2) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x+1}}{x^3 + x^2 + x + 1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{1 + \log x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x - \log(1 + x^3)}{x^4}.$$

(3) Della seguente funzione determinare l'equazione delle **eventuali** rette asintotiche per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + x}.$$

(4) Sviluppare in $x_0 = 0$ ed al 4° ordine la funzione $f(x) = \cos(x^2) \cdot \log(1 + x)$. Calcolare poi il valore di $f'''(0)$.

(5) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

calcolare $f'(x)$ per ogni possibile valore di x (in particolare, si vuole sapere se $f'(0)$ esiste ed in caso di risposta affermativa se ne vuole conoscere il valore).

(6) Studiare la funzione

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x-1}.$$

È richiesto lo studio della sua convessità.

(7) Data la funzione $f(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$, determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa 2.

(8) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati.

$$\int_0^4 \frac{\sqrt[3]{x} - x}{x + \sqrt{x}}\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^4 + 1}\, dx.$$