Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 26.1.2004

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia
$$f(x) = \frac{x^3+1}{x+2x^2}.$$
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 1$.

(2) Sia $f(x, y) = (y + 2x^2)\sin(y)$. Calcolare le seguenti derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x,y).$$

(3) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:
$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

(4) Calcolare le seguenti primitive.
$$\int x e^{x^2+1}\,dx, \qquad \int (x+1)\sin(x)\,dx, \qquad \int \frac{x^2+x-1}{x+1}\,dx.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+x^3}{1+x^3+x^4}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x}+x^3}{x+x^4}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \Big[\sin\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{x}\Big]\,dx.$$
SUGGERIMENTO: per stabilire l'esistenza dell'ultimo integrale **non** è una buona idea scrivere l'integrale dato coma somma dei due integrali.

(6) Sia $f(x, y) = ye^x + x^2 - y$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2x + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.
$$\begin{cases} y' = -y + x - 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1) La funzione $f(x)$ è razionale e quindi è sicuramente differenziabile in ogni punto del suo dominio. Il punto $x = 1$ appartiene a tale insieme e quindi la retta tangente cercata esiste. La formula che dà l'equazione della tangente è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1).$$

Dato che

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x+2x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \frac{3x^2(x+2x^2) - (x^3+1)(1+4x)}{(x+2x^2)^2},$$

abbiamo che

$$f(1) = \frac{2}{3}, \qquad f'(1) = -\frac{1}{9}$$

e quindi la retta cercata è quella di equazione

$$y = \frac{2}{3} - \frac{1}{9}(x-1), \quad \text{ovvero} \quad y = -\frac{1}{9}x + \frac{7}{9}.$$

(2) Nell'eseguire le derivate si tenga presente che l'ordine non ha nessuna importanza poiché $f(x,y)$ è una funzione evidentemente differenziabile ad ogni ordine. Di conseguenza si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x \sin y) = 4x \cos y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x \cos y) = 4 \cos y,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(4x \cos y) = \frac{\partial}{\partial x}(-4x \sin y) = -4 \sin y.$$

(3) La funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$ è differenziabile ad ogni ordine quindi possiamo ottenere le informazioni cercate dallo studio del segno di $f'(x)$ ed $f''(x)$.

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}, \quad f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}.$$

In entrambe i casi il segno di $f'(x)$ e di $f''(x)$ dipende esclusivamente dal fattore polinomiale (poiché $e^{-x} > 0$ per ogni x), di conseguenza Dato che

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - x^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (0,2).$$

Il punto $x = 0$ sarà quindi un minimo locale e $x = 2$ un massimo locale.

Analogamente,

$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - 4x + x^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \tfrac{2+\sqrt{2}}{2}, \text{ oppure } x < \tfrac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Dato che $f''(x)$ cambia segno nell'intorno di ciascuno di essi, entrambi i punti $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ sono di flesso.

(4)

$$\int x e^{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2+1}\, d(x^2+1) = \frac{1}{2}\, e^{x^2+1} + c.$$

$$\int (x+1)\sin x\, dx = -(x+1)\cos x + \int \cos x\, dx = -(x+1)\cos x + \sin x + c.$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x+1}\, dx = \int x - \frac{1}{x+1}\, dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x+1| + c.$$

(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+x^3}{1+x^3+x^4}\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}+x^3}{1+x^3+x^4}$ è continua su tale dominio, di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}+x^3}{1+x^3+x^4} \sim \frac{\sqrt{x}+x^3}{x^4} \sim \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}.$$

Dato che $\frac{1}{x}$ non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x}+x^3}{x+x^4}\ dx$.

Il dominio di integrazione è $[0,1]$ ma l'integranda è continua solo su $(0,1]$ di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x}+x^3}{x+x^4}$ per $x \to 0$.

$$x \to 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt[5]{x}+x^3}{x+x^4} \sim \frac{\sqrt[5]{x}+x^3}{x} \sim \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \frac{1}{x^{4/5}}$$

Dato che la funzione $1/x^{4/5}$ è integrabile in 0 deduciamo che l'integrale **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\ dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che l'argomento della funzione seno, ovvero la quantità $1/x$ è infinitesima; utilizzando quindi la relazione $\sin\epsilon = \epsilon - \epsilon^3/6 + o(\epsilon^3)$ (valida per ogni infinitesimo ϵ) abbiamo che

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim -\frac{1}{6x^3}.$$

Dato che la funzione $1/x^3$ è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **esiste**.

(6) La funzione $f(x,y) = ye^x + x^2 - y$ è somma e prodotto di funzioni differenziabili ad ogni ordine in tutti i punti del piano e quindi è anch'essa differenziabile ad ordine in essi. I suoi punti stazionari sono le radici dell'equazione $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ ovvero sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} ye^x + 2x = 0, \\ e^x - 1 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha come unica soluzione $x = 0$, quindi

$$\begin{cases} ye^x + 2x = 0, \\ x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Vi è quindi un unico punto stazionario: $(0,0)$. Per scoprire se si tratta di un estremante utilizziamo il polinomio Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

quindi

$$P_{(0,0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)Y^2 = 2X^2 + 2XY.$$

Il discriminante è $1^2 - 2 \cdot 0 = 1 > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto è un **punto di sella**.

(7) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' + y' - 2y = 0$ la cui equazione caratteristica è $3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{-2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' + y' - 2y = 2x + 1$. Dato che a destra compare un polinomio di grado 1 sappiamo che deve esistere una soluzione anch'essa polinomiale di grado almeno 1 ed al più 3; cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = ax + b$ con a, b parametri da determinarsi.

$$y(x) = ax + b \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = a \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = 0,$$

e quindi l'equazione porta a

$$2x + 1 = y'' + y' - 2y = 3 \cdot 0 + a - 2(ax + b) = -2ax - 2b + a$$

e quindi

$$\begin{cases} -2a & = 2 \\ -2b + a & = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a = -1, \quad b = -1.$$

Quindi $y(x) = -x - 1$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x} - x - 1, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 1 = y(0) & = A + B - 1 \\ -1 = y'(0) & = A - 2B - 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A + B & = 2 \\ A - 2B & = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad A = 4/3, \ B = 2/3.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = \frac{4}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-2x} - x - 1$.

(8) Si tratta un'equazione lineare, $y' = A(x)y + B(x)$ con $A(x) = -1$ e $B(x) = x - 1$; Siccome $A(x)$ e $B(x)$ sono continue in $\mathbb{R}$ la soluzione esisterà e sarà unica su $\mathbb{R}$ (a seguito del teorema sulle equazioni lineari). Inoltre

$$K(x) = \int A(x)\ dx = \int -1\ dx = -x,$$

e perciò

$$y(x) = e^{-x}\Big[\int (x-1)e^x\ dx + c\Big] = e^{-x}\Big[(x-1)e^x - \int e^x\ dx\Big]$$
$$= e^{-x}\big[(x-1)e^x - e^x + c\big]$$
$$= x - 2 + ce^{-x}.$$

Dato che $y(0) = 0$, abbiamo

$$0 = y(0) = -2 + c \quad \Longrightarrow \quad c = 2$$

e così la soluzione (su $\mathbb{R}$) cercata è

$$y(x) = x - 2 + 2e^{-x}.$$