Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 31.5.2004

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int x\sin(x)\ dx, \qquad \int \frac{\log(x)}{x}\ dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+1}\ dx.$$

(2) Sia $f(x,y) = x\log(y) - y\log(x)$. Verificare che il punto (e,e) è stazionario e stabilire se si tratta di un punto di massimo, di minimo o di sella.

(3) Sia $f(x,y) = x^3y^2 - xy + x^2y^3$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y\partial y\partial x}(x,y).$$

(4) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

(5) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2+\sin(x)+x^3}\ dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}-x}{x+\sin(x)}\ dx, \qquad \int_1^{+\infty}\left[1-\frac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\right] dx.$$

(6) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(7) Sia $f(x) = x\sin(x)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = \pi$.

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = 4(x+1)\sqrt{y} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

1. Soluzioni

(1)

$$\int x\sin(x)\ dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c.$$

$$\int \frac{\log(x)}{x}\ dx = \int \log(x)\ d(\log(x)) = \frac{\log^2(x)}{2} + c.$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\ dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\ dx + \int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \log|x^2+1| + \arctan(x) + c.$$

(2) Anzitutto calcoliamo le derivate prime e seconde di $f(x,y)$, ottenendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log(y) - \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} - \log(y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}.$$

Nel punto (e,e) le due derivate parziali valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e,e) = \log(e) - \frac{e}{e} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(e,e) = \frac{e}{e} - \log(e) = 0,$$

confermando che si tratta di un punto stazionario. Il polinomio Hessiano è

$$P_{(e,e)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e,e)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(e,e)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e,e)Y^2 = \tfrac{1}{e}X^2 - \tfrac{1}{e}Y^2.$$

Il discriminante è $0^2 - \frac{1}{e} \cdot (-\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2} > 0$ e quindi si tratta di un polinomio non definito per cui il punto (e,e) è un **punto di sella**.

(3) Nell'eseguire le derivate si tenga presente che l'ordine non ha nessuna importanza poiché $f(x,y)$ è una funzione evidentemente differenziabile ad ogni ordine. Di conseguenza si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - y + 2xy^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - y + 6xy^3) = 6x^2y - 1 + 3xy^2,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y - 1 + 6xy^2) = 12xy + 6y^2,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(12xy + 6y^2) = 12x + 12y.$$

(4) La funzione $f(x) = (x^2-1)/(x^2+1)$ è differenziabile ad ogni ordine quindi possiamo ottenere le informazioni cercate dallo studio del segno di $f'(x)$ ed $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x \cdot 2 \cdot 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

In entrambe i casi il segno di $f'(x)$ e di $f''(x)$ dipende esclusivamente dal numeratore (poiché il numeratore è sempre positivo), di conseguenza Dato che

$$f'(x) > 0 \iff 4x > 0 \iff x > 0,$$

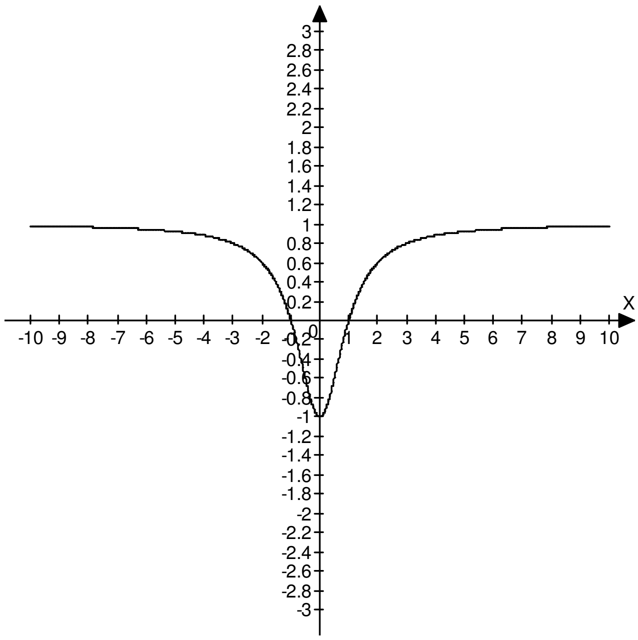
Il punto $x = 0$ sarà quindi un minimo locale.

Analogamente,

$$f''(x) > 0 \iff -4(3x^2-1) > 0 \iff 3x^2 - 1 < 0 \iff -1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}.$$

Dato che $f''(x)$ cambia segno nell'intorno di $1/\sqrt{3}$ e di $-1/\sqrt{3}$, questi punti sono flessi.

Infine, osserviamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ e quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.



(5) • Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2+\sin(x)+x^3}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{x^2}{2+\sin(x)+x^3}$ è continua su tale dominio, di conseguenza dobbiamo studiarne solo il comportamento in $x \to +\infty$.

$$x \to +\infty, \quad f(x) = \frac{x^2}{2+\sin(x)+x^3} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}.$$

Dato che $\frac{1}{x}$ non è integrabile a $+\infty$ l'integrale dato **non esiste**.

• Esistenza di $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-x}{x+\sin(x)}\, dx$.

Il dominio di integrazione è $[0,1]$ ma l'integranda è continua solo su $(0,1]$ di conseguenza l'esistenza dell'integrale sarà nota una volta determinato il comportamento di $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x+\sin(x)}$ per $x \to 0$.

$$x \to 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x+\sin(x)} \sim \frac{\sqrt{x}}{x+\sin(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x+x+o(x)} \sim \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2x^{1/2}}$$

Dato che la funzione $1/x^{1/2}$ è integrabile in 0 deduciamo che l'integrale **esiste**.

• Esistenza di $\int_1^{+\infty} \left[1 - \frac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\right] dx$.

Consideriamo la funzione $f(x) = 1 - \frac{x^4-1}{x^4+x^2+1}$. Il dominio di integrazione è $[1,+\infty)$ ed $f(x)$ è continua su tale intervallo dunque è sufficiente determinare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Abbiamo che

$$f(x) = 1 - \frac{x^4-1}{x^4+x^2+1} = \frac{x^4+x^2+1-x^4+1}{x^4+x^2+1} = \frac{x^2+2}{x^4+x^2+1} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

Dato che la funzione $1/x^2$ è integrabile a $+\infty$ deduciamo che l'integrale **esiste**.

(6) La funzione che compare a destra dell'equazione è continua in tutto il piano quindi il P.C. ammette una unica soluzione che risulta definita su $\mathbb{R}$. Per individuarla anzitutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' + 2y' - 3y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$. Le soluzioni sono due e distinte: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$, quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = Ae^x + Be^{-3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare dell'equazione originaria: $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$. Dato che a destra compare una funzione trigonometrica, cominciamo cercando una soluzione della forma $y(x) = ae^{2x}$ con a parametro da determinarsi.

$$y(x) = ae^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = 2ae^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y''(x) = 4ae^{2x}$$

e quindi l'equazione porta a

$$\begin{aligned} 5e^{2x} &= y'' + 2y' - 3y \\ &= 4ae^{2x} + 2 \cdot 2ae^{2x} - 3 \cdot ae^{2x} \\ &= 5ae^{2x} \end{aligned}$$

da cui

$$5 = 5a \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1.$$

Quindi $y(x) = e^{2x}$ è una soluzione e la generica soluzione è dunque:

$$y(x) = Ae^x + Be^{-3x} + e^{2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Tra queste dobbiamo selezionare quella che soddisfa le condizioni del P.C. e quindi

$$\begin{cases} 0 = y(0) & = A + B + 1 \\ 0 = y'(0) & = A - 3B + 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A + B & = -1 \\ A - 3B & = -2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad A = -5/4, \ B = 1/4.$$

La soluzione del P.C. è dunque: $y(x) = -\frac{5}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-3x} + e^{2x}$.

(7) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa π è:

$$y = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi).$$

Dato che $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, ne segue che

$$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -\pi,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = 0 - \pi(x - \pi), \quad \text{ovvero} \quad y = -\pi x + \pi^2.$$

(8) Si tratta un'equazione a variabili separabili, $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = 4(x+1)$ e $g(x) = \sqrt{y}$; Siccome $g(0) = 0$, l'equazione ammette la soluzione costante $y \equiv 0$ che però non soddisfa la condizione di Cauchy proposta e quindi non è la soluzione cercata. In un intorno del punto $x = 0$ la soluzione sarà dunque quella fornita dalla separazione delle variabili, ovvero dovrà soddisfare l'identità

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 4(x+1)\,dx = 2x^2 + 4x + c \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{y} = 2x^2 + 4x + c,$$

per una opportuna scelta del parametro c. Dalla condizione iniziale sappiamo che $y(0) = 2$, quindi

$$2\sqrt{2} = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + c, \quad \Longrightarrow \quad c = 2\sqrt{2},$$

così che $2\sqrt{y} = 2x^2 + 4x + 2\sqrt{2}$ da cui

$$\sqrt{y} = x^2 + 2x + \sqrt{2}$$

e quindi la soluzione in un intorno di $x = 0$ è data dal polinomio

$$y(x) = y = (x^2 + 2x + \sqrt{2})^2.$$

Per determinare su quale insieme questa funzione sia effettivamente la soluzione del P.C. osserviamo che come di consueto per equazioni a variabili separabili questo è il più ampio intervallo (a, b) contenente 0 ed in cui la funzione trovata non assume alcuno dei valori che annullano la funzione $g(y)$. Nel caso in l'unico valore che annulla g è 0 e dato che l'equazione $y = (x^2 + 2x + \sqrt{2})^2 = 0$ non ha nessuna soluzione, possiamo concludere che $y(x) = y = (x^2 + 2x + \sqrt{2})^2$ è soluzione su tutto l'asse reale.