Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 1.2.2005

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = 6x + 5 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 9. \end{cases}$$

(2) Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}.$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 1$.

(3) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

(4) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x+1}\, dx, \qquad \int (x^2 - 1)e^x\, dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\, dx.$$

(5) Sia $f(x, y) = xe^{2y} - ye^x$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y).$$

(6) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{1 + x^{3/2} + x^{7/3}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x + \sqrt[3]{x}}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \sqrt{x+3}\ln\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\, dx.$$

(7) Sia $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{xy} \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) $y = 2e^{2x} - 2e^{-3x} - 1 - x$.

(2) $f'(x) = \frac{x^2+4x-3}{(x+2)^2}$. Retta ha equazione $y = f(1) + f'(1)(x-1)$ quindi $9y = 2x + 1$.

(3) La funzione ha un asintoto verticale in $x = -2$, e la retta $y = x - 2$ come asintoto obliquo a $\pm\infty$. f' si annulla in $-2 - \sqrt{3}$ ed in $-2 + \sqrt{3}$ che risultano rispettivamente massimo e minimo relativo. f'' non presenta zeri. La restrizione di f su $(-\infty, 0)$ è concava e la restrizione di f su $(0, +\infty)$ è convessa.

(4) Integrazione diretta. $\int \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x+1}\ dx = \frac{2x^{3/2}}{3} - 4\sqrt{x} + \frac{2(x+1)^{3/2}}{3}$,
Per parti. $\int (x^2 - 1)e^x\ dx = (x^2 - 2x + 1)e^x$,
Per sostituzione: $x = u^2$. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\ dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + c$.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{2y} - ye^x$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2e^{2y} - e^x$,
$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = -e^x$,
$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y) = 0$.

(6) Esiste, Esiste, Esiste.

(7) Punti stazionari: $(0, 0)$ sella, $(1, 1)$ (minimo rel.) e $(-1, -1)$ (minimo rel.).

(8) Separazione della variabili. $y = (x^{3/2} + 1)^2$ su $[0, +\infty)$.