Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Prima prova versione A: 2.12.2004

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) L'equazione $x^3+2x-1=0$ ha una sola soluzione nell'intervallo $(0,1)$. Usando l'algoritmo di Newton determinare la rappresentazione decimale corretta fino alla seconda cifra di tale numero.

(2) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^{16} 2\sqrt{x}+1-\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3-2x+1}{x+2}\,dx.$$

(3) Della seguente funzione determinare l'equazione delle **eventuali** rette asintotiche per $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$:

$$f(x)=\frac{x^2-x+\sin x}{x-2}.$$

(4) Sviluppare in $x_0=0$ ed al 4° ordine la funzione $f(x)=\cos(x)\cdot\log(1+x^2)$. Calcolare poi il valore di $f^{(iv)}(0)$.

(5) Data la funzione $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$, determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa 1.

(6) Studiare la funzione

$$f(x)=3x+\frac{3}{x+1}.$$

È richiesto lo studio della sua convessità.

(7) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2\sqrt{x-3}}{x^2-\sqrt{x^2+2}+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos^2 x}{2x+\log^2 x}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{(x-x^2)\sin x-\log(1+x^2)}{x^3+2x^5}.$$

(8) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati.

$$\int_0^5 \frac{x^2-x+\sqrt{x}}{x^3+2x}\,dx, \qquad \int_2^{+\infty}\frac{x-\sqrt{x+1}-1}{x^3+\sin^2 x}\,dx.$$

Soluzioni

(1) Posto $f(x) = x^3 + 2x - 1$, l'algoritmo di Newton consiste nel scegliere un valore a caso per x_0 e calcolare successivamente $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$, $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$ e così via, fino a che i valori trovati soddisfano la precisione richiesta. Scegliendo $x_0 = 1$, si trovano, in questo caso: $x_1 = 0,6$, $x_2 \approx 0,464$, $x_3 \approx 0,453$ e $x_4 \approx 0,453$. Possiamo dunque ritenere che la rappresentazione decimale della soluzione cercata sia $0,45\ldots$.

(2) 87, $\int_0^1 x^2 - 2x + 2 - \frac{3}{x+2}\, dx = \frac{4}{3} - 3\ln(3/2)$.

(3) $y = x + 1$, sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

(4) $f(x) = x^2 - x^4 + o(x^4)$, da cui $f^{(iv)}(0) = -24$.

(5) $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

(6) La funzione è definita in $D := \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ e sul dominio ammette derivate di ogni ordine. La retta $y = 3x$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$, mentre la retta $x = -1$ è asintoto verticale. $f'(x) = 3 - 3/(x+1)^2$ che si annulla in $x = -2$ e $x = 0$: il punto $x = -2$ è un punto di massimo relativo mentre $x = 0$ è un punto di minimo relativo. $f''(x) = 6/(x+1)^3$ e dato che $f''(x) > 0$ se e solo se $x > -1$, la funzione non è né concava né convessa.

(7) 0, $\frac{1}{2}$, -1.

(8) Sì, Sì.