Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 20.9.2005

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int x+\sqrt{x^3}+\frac{x}{\sqrt{x^5}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{x^2-4}\,dx, \qquad \int \frac{3x+1}{x^2-3x+2}\,dx.$$

(2) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+x^3}}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x(1+x)(2+x)}}\,dx.$$

(3) Sia $f(x,y)=x^2y^3+2x-3y$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(4) La funzione

$$f(x)=3x-\sin x$$

è strettamente monotòna? È convessa?

(5) Sia

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x=2$.

(6) Sia $f(x,y)=\sin(xy)$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y\partial x\partial y}(x,y).$$

(7) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+3y'-4y=(7-6x)e^{-x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x=0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y'=-\frac{2y}{1+2x}+1+2x \\ y(0)=0. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) $\int x + \sqrt{x^3} + \frac{x}{\sqrt{x^5}}\ dx = \int x + x^{3/2} + x^{-3/2}\ dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{5/2}}{5} - 2x^{-1/2} + c,$

$\int \frac{x}{x^2-4}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}\ dx = \frac{1}{2}\log|x^2-4| + c,$

$\int \frac{3x+1}{x^2-3x+2}\ dx = \int \frac{3x+1}{(x-1)(x-2)}\ dx = \int \frac{-4}{x-1} + \frac{7}{x-2}\ dx = 7\log|x-2| - 4\log|x-1| + c.$

(2) Per $x \to +\infty$, si ha:

$$\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{1+3/x}-\sqrt{1+2/x})}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{\sqrt{x}(1+\frac{3}{x}-1-\frac{2}{x}+o(1/x))}{\sqrt{1+x^3}}$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^3}} \sim \frac{1}{x^2}$$

quindi il primo integrale **esiste**.
Per $x \to 0$, si ha:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^3+x^4}} \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

quindi il secondo integrale **esiste**.
Per $x \to +\infty$, si ha:

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x(1+x)(2+x)}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

quindi l'ultimo integrale **non esiste**.

(3) I punti stazionari della funzione sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2xy^3 + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 - 3 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} xy^3 = -1, \\ x^2y^2 = 1. \end{cases}$$

I punti stazionari sono quindi $A := (1,-1)$ e $B := (-1,1)$. Il polinomio Hessiano in A è

$$\begin{aligned} P_A(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)Y^2 \\ &= -2X^2 + 12XY - 6Y^2. \end{aligned}$$

Il discriminante è $6^2 - (-2)\cdot(-6) = 24 > 0$ quindi si tratta di un punto di **sella**.
Il polinomio Hessiano in B è

$$\begin{aligned} P_B(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1)Y^2 \\ &= 2X^2 - 12X + 6Y^2. \end{aligned}$$

Il discriminante è $(-6)^2 - 2\cdot 6 = 24 > 0$ quindi si tratta di un punto di **sella**.

(4) f è una funzione derivabile ad ogni ordine sull'intero asse reale, quindi possiamo determinarne la monotonìa e la convessità attraverso lo studio del segno della derivata prima e seconda. Dato che $f'(x) = 3 - \cos x$ è strettamente positiva, segue che f è **strettamente monotòna crescente**.
Dato che $f''(x) = \sin x$ che cambia segno attraversando ogni punto $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne segue che ciascuno di essi è un flesso per f che quindi **non** è convessa.

(5) $f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. La retta ha equazione $y = f(2) + f'(2)(x-2)$ quindi $25y = -8x + 1$.

(6) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y}(x,y) = (x^2y^2 - 2)\sin(xy) - 4xy\cos(xy).$$

(7) Le soluzioni dell'equazione sono tutte le funzioni della forma

$$Ae^x + Be^{-4x} + (x-1)e^{-x},$$

dove A e B sono arbitrarie costanti reali. Tra queste funzioni, quella soddisfacente anche le condizioni iniziali è $y = e^x + e^{-4x} + (x-1)e^{-x}$.

(8) Equazione di tipo lineare, ovvero della forma $y' = A(x)y + B(x)$, con $A(x) = -2/(1+2x)$ e $B(x) = 1+2x$. La funzione A è continua in $\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$ mentre B è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi per il teorema di esistenza ed unicità dei problemi di Cauchy lineari la soluzione del P.C. in esame esiste ed è unica sul più ampio intervallo contenente il punto di partenza, in questo caso lo 0, e l'insieme $\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$. In questo caso, quindi, la soluzione esisterà e sarà certamente unica sull'intervallo $(-1/2, +\infty)$. Per determinare la forma analitica della soluzione applichiamo la formula risolutiva:

$$k(x) := \int A(x)\,dx = -2\int \frac{dx}{1+2x} = -\log|1+2x|.$$

il modulo può essere eliminato osservando che nel punto di partenza (cioè in $x=0$) la quantità $1+2x$ è positiva, quindi $k(x) = -\log(1+2x)$. Quindi,

$$y(x) = e^{k(x)}\Big[\int e^{-k(x)}B(x)\,dx + c\Big] = e^{-\log(1+2x)}\Big[\int e^{\log(1+2x)}B(x)\,dx + c\Big]$$
$$= \frac{1}{1+2x}\Big[\int (1+2x)^2\,dx + c\Big] = \frac{1}{1+2x}\Big[\frac{(1+2x)^3}{6} + c\Big].$$

dalla condizione $y(0) = 0$, abbiamo

$$0 = y(0) = \frac{1}{1+2x}\Big[\frac{(1+2x)^3}{6} + c\Big]\Big|_{x=0} = \frac{1}{6} + c.$$

Quindi $c = -1/6$ e così la soluzione del P.C. è

$$y(x) = \frac{(1+2x)^3 - 1}{6(1+2x)},$$

valida sull'intervallo $(-1/2, +\infty)$. Dato che la soluzione trovata presenta in $-1/2$ un asintoto verticale, la soluzione trovata non può essere prolungata a sinistra di $-1/2$.