Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Prima prova versione B: 2.12.2004

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Sviluppare in $x_0 = 0$ ed al 4° ordine la funzione $f(x) = (1+\sin(x))\cdot\log(1-x^2)$. Calcolare poi il valore di $f^{(iv)}(0)$.

(2) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x-1}+1-x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin^2 x}{x+\sqrt{\log x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(x+x^2)\sin x + \log(1-x^2)}{x^3+2x^5}.$$

(3) Della seguente funzione determinare l'equazione delle **eventuali** rette asintotiche per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2+x-\cos(x^2)}{2x+1}.$$

(4) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^{16} \sqrt{x} + \frac{x}{5} - \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3+2x+11}{x+2}\, dx.$$

(5) Data la funzione $f(x) = \sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2}$, determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa 2.

(6) L'equazione $x^3+3x-1 = 0$ ha una sola soluzione nell'intervallo $(0,1)$. Usando l'algoritmo di Newton determinare la rappresentazione decimale corretta fino alla seconda cifra di tale numero.

(7) Studiare la funzione

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x-2}.$$

È richiesto lo studio della sua convessità.

(8) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati.

$$\int_0^1 \frac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^3+x^2}\, dx, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{2x^2+\sqrt{x^2+1}+3}{x^3-\cos^2 x}\, dx.$$

Soluzioni

(1) $f(x) = -x^2 - x^3 - x^4/2 + o(x^4)$, da cui $f^{(iv)}(0) = -12$.

(2) -1, 1, 1.

(3) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

(4) $\frac{123}{2}$, $\int_0^1 x^2 - 2x + 6 - \frac{1}{x+2}\, dx = \frac{16}{3} - \ln(3/2)$.

(5) $y = \frac{7}{12}x + \frac{23}{6}$.

(6) Posto $f(x) = x^3 + 3x - 1$, l'algoritmo di Newton consiste nel scegliere un valore a caso per x_0 e calcolare successivamente $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$, $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$ e così via, fino a che i valori trovati soddisfano la precisione richiesta. Scegliendo $x_0 = 1$, si trovano, in questo caso: $x_1 = 0,5$, $x_2 \approx 0,333$, $x_3 \approx 0,322$ e $x_4 \approx 0,322$. Possiamo dunque ritenere che la rappresentazione decimale della soluzione cercata sia $0,32\ldots$.

(7) La funzione è definita in $D := \mathbb{R}\backslash\{2\}$ e sul dominio ammette derivate di ogni ordine. La retta $y = 2x$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$, mentre la retta $x = 2$ è asintoto verticale. $f'(x) = 2 - 2/(x-2)^2$ che si annulla in $x = 1$ e $x = 3$: il punto $x = 1$ è un punto di massimo relativo mentre $x = 3$ è un punto di minimo relativo. $f''(x) = 4/(x-2)^3$ e dato che $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 2$, la funzione non è né concava né convessa.

(8) No, No.