Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 14.11.2005

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia $f(x,y) = x^3y^4 - 3x - 4y$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(2) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int x^2 - \sqrt{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x^5}}\, dx, \qquad \int x\sin(x^2)\, dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2-5x+4}\, dx.$$

(3) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{1+2x}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{4x^3+3x^4}}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x+x^5}}\, dx.$$

(4) Quali delle seguenti funzioni sono strettamente monotòne?

$$f(x) := 2x + \sin x, \quad g(x) := \frac{1}{x^2+x}, \quad h(x) := \frac{x^3}{1+x^2}.$$

(5) Sia $f(x,y) = e^{xy} + x + y$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y}(x,y).$$

(6) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (5x-10)e^{-x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(7) Sia

$$f(x) = \frac{3-x}{2+x^2}.$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 4$.

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{xy} \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) I punti stazionari della funzione sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0, \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2y^4-3=0, \\ 4x^3y^3-4=0, \end{cases} \implies \begin{cases} x^2y^4=1, \\ x^3y^3=1, \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{y}{x}=1, \\ x^3y^3=1. \end{cases}$$

Vi sono quindi due soli punti stazionari $A := (1,1)$ e $B := (-1,-1)$. Dato che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12x^2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^3y^2,$$

Il polinomio Hessiano in A è

$$\begin{aligned} P_A(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)Y^2 \\ &= 6X^2 + 24XY + 12Y^2. \end{aligned}$$

Il discriminante è $(12)^2 - 6 \cdot 12 = 72 > 0$ quindi si tratta di un punto di **sella**.

Il polinomio Hessiano in B è

$$\begin{aligned} P_A(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)Y^2 \\ &= -6X^2 - 24XY - 12Y^2. \end{aligned}$$

Il discriminante è $(-12)^2 - (-6) \cdot (-1)2 = 72 > 0$ quindi si tratta di un punto di **sella**.

(2) $\int x^2 - \sqrt{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x^5}}\ dx = \int x^2 - x^{5/2} + x^{-5/2}\ dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{2x^{-3/2}}{3} + c,$

$\int x\sin(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2)\ d(x^2) = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + c,$

$\int \frac{x+1}{x^2-5x+4}\ dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x-4)}\ dx = \int \frac{-2/3}{x-1} + \frac{5/3}{x-4}\ dx = \frac{5}{3}\log|x-4| - \frac{2}{3}\log|x-1| + c.$

(3) Per $x \to +\infty$, si ha:

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{1+2x}} \sim \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{2x}} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

quindi il primo integrale **non** esiste.

Per $x \to 0$, si ha:

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{4x^3+3x^4}} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x^3+3x^4}} \sim \frac{\sqrt{x}}{2x^{3/2}} = \frac{1}{2x}$$

quindi il secondo integrale **non** esiste.

Per $x \to +\infty$, si ha:

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x+x^5}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

quindi l'ultimo integrale **esiste**.

(4) f è una funzione derivabile sull'intero asse reale, quindi possiamo determinarne la monotonìa attraverso lo studio del segno della derivata prima. Dato che $f'(x) = 2 + \cos x \geq 2 - 1 > 0$ ovvero dato che la derivata è strettamente positiva, segue che f è **strettamente monotòna crescente**.

g è una funzione definita in $\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$; dato che $\lim_{x\to-1^+} g(x) = \lim_{x\to0^-} g(x) = +\infty$ la funzione **non è strettamente monotòna**.

h è una funzione derivabile sull'intero asse reale, quindi possiamo determinarne la monotonìa attraverso lo studio del segno della derivata prima. Dato che $f'(x) = (3x^2 + x^4)/(1-x^2)^2$, la derivata si annulla in un unico punto, lo 0, ma risulta maggiore di zero per ogni altro valore di x. Ciò implica che h è strettamente crescente nei due domini $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$. Dato che è continua si può concludere che allora è **strettamente monotona crescente** su tutto l'asse reale.

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + 1,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xy} + 1\right) = (1 + xy)e^{xy},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + xy)e^{xy} = (2y + xy^2)e^{xy},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2y + xy^2)e^{xy} = (2 + 4xy + x^2y^2)e^{xy}.$$

(6) Le soluzioni dell'equazione sono tutte le funzioni della forma

$$Ae^x + Be^{2x} + (x - 1)e^{-x},$$

dove A e B sono arbitrarie costanti reali. Tra queste funzioni, quella soddisfacente anche le condizioni iniziali è $y = e^x - e^{2x} + (x - 1)e^{-x}$.

(7) $f'(x) = \frac{x^2-6x-2}{(2+x^2)^2}$. La retta ha equazione $y = f(4) + f'(4)(x - 4)$ che sostituendo i valori di $f(4)$ ed $f'(4)$ diventa

$$162y = -5x + 11.$$

(8) Equazione di tipo a variabili separabili, ovvero della forma $y' = f(x)g(y)$, con $f(x) = 3\sqrt{x}$ e $g(y) = \sqrt{y}$. La funzione cercata assume il valore 4 nel punto $x = 1$; in particolare $g(1)$ non è zero quindi la soluzione può essere trovata per separazione di variabili. Separando le variabili si ottiene la relazione:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 3\sqrt{x}\, dx + c$$

da cui

$$2\sqrt{y} = 2x^{3/2} + c.$$

Ricordando che $y(1) = 4$, si ha che

$$4 = 2\sqrt{y(1)} = 2 + c \qquad \Longrightarrow \qquad c = 2,$$

quindi

$$2\sqrt{y} = 2x^{3/2} + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = (x^{3/2} + 1)^2.$$

Quella appena trovata è l'espressione della soluzione in un intorno del punto $x = 1$. dato che l'equazione è di tipo separabile, sappiamo che in realtà l'espressione trovata fornisce la soluzione sul più ampio intervallo (a, b) contenente 1 (in punto che fa da origine del problema di Cauchy), in cui la funzione trovata risulta definita ed in cui, infine, la funzione non assume i valori che annullano la funzione $g(y)$; dato che $g(y) = 0$ unicamente in $y = 0$, ne segue che sull'intervallo (a, b) la funzione trovata non si deve annullare. L'equazione

$$(x^{3/2} + 1)^2 = 0$$

non ha soluzioni in x, quindi, in sostanza, il più ampio intervallo (a, b) in cui le richieste precedenti sono soddisfatte è l'insieme $(0, +\infty)$. Concludendo, la funzione $(x^{3/2} + 1)^2$ è soluzione del problema di Cauchy in $(0, +\infty)$.