Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 22.2.2005

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia $f(x,y) = x^4 + 4xy + y^4$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(2) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}.$$

(3) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int 2x^3 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad \int \log(1+2x)\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2-4}\,dx.$$

(4) Sia $f(x,y) = xe^{2y} - ye^x$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial x \partial y \partial x}(x,y).$$

(5) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = (5 - 10x + 4x^2)e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1/2. \end{cases}$$

(6) Sia

$$f(x) = \sqrt{5 + 2x - 3x^2}.$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 1$.

(7) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x + \sin(x^2)}{1 - x^{3/2} + x^5}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x} - x}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}}{x + \sqrt{x}}\,dx.$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{\dfrac{x}{y}} \\ y(4) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) Punti stazionari: $(0,0)$ sella, $(1,-1)$ (minimo rel.) e $(-1,1)$ (minimo rel.).

(2) La funzione ha un asintoto verticale in $x=-1$, e la retta $y=2x-2$ come asintoto obliquo a $\pm\infty$. f' si annulla in $(-2-\sqrt{6})/2$ ed in $(-2+\sqrt{6})/2$ che risultano rispettivamente massimo e minimo relativo. f'' non presenta zeri. La restrizione di f su $(-\infty,0)$ è concava e la restrizione di f su $(0,+\infty)$ è convessa.

(3) $\frac{x^4}{2}+\frac{1}{3x^3}+3\sqrt[3]{x^2}+c$,
per parti: $(x+\frac{1}{2})\log(1+2x)-x+c$,
$\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$.

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{2y}-ye^x$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2e^{2y}-e^x$,

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y)=-e^x$,

$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\partial x\partial y\partial x}(x,y)=-e^x$.

(5) $y=-\frac{e^{-2x}}{2}-\frac{e^{3x}}{2}+(1-x+x^2)e^{2x}$.

(6) $f'(x)=\frac{2-6x}{2\sqrt{5+2x-3x^2}}$. Retta ha equazione $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ quindi $y=-x+3$.

(7) Esiste, Esiste, Esiste.

(8) Eq. a variabili separabili: sol. locale: $y=(x^{3/2}-7)^{2/3}$. Dato che la funzione $(x^{3/2}-7)^{2/3}$ si annulla in $x=7^{2/3}<4$, la sol. trovata è soluzione sull'intervallo $(7^{2/3},+\infty)$.