Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 28.6.2005

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia $f(x,y) = x^4 - 4xy^3 + 12y$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(2) La funzione

$$f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$$

è strettamente monotòna? È convessa?

(3) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int 1 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad \int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx, \qquad \int 2x\log(1+x)\,dx.$$

(4) Sia $f(x,y) = \log(1+xy)$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y).$$

(5) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = (9 + 10x + 3x^2)e^{2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

(6) Sia

$$f(x) = x^3 \log(1+x).$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 1$.

(7) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+\log(x^2)}{x^4+\log(x^4)}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{(2+x)(3+x)(4+x)}}\,dx.$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = (1+x)\sqrt{y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) La funzione ha un unico punto stazionario: $(1, 1)$ che è un punto di sella.

(2) f è una funzione derivabile ad ogni ordine sull'intero asse reale, quindi possiamo determinarne la monotonìa e la convessità attraverso lo studio del segno della derivata prima e seconda. Dato che $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ che è strettamente negativa, segue che f è **strettamente monotòna decrescente**.
Dato che $f''(x) = \frac{-e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$ che è positiva se e solo se $x > 0$ segue che f ha in $x = 0$ un flesso e quindi **non** è convessa.

(3) $\int 1 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx = x + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c,$

$\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\ dx = \int \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x^2+2x+1}\ dx = \log|1 + x| + \frac{2}{1+x} + c,$

$\int 2x \log(1 + x)\ dx = x^2 \log(1 + x) - \int \frac{x^2}{1+x} dx = x^2 \log(1 + x) - \int x - 1 + \frac{1}{1+x} dx = (x^2 - 1) \log(1 + x) - \frac{x^2}{2} + x + c.$

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{1+xy},$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{(1+xy)^2},$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{-2y}{(1+xy)^3}.$

(5) Le soluzioni dell'equazione sono tutte le funzioni della forma

$$e^x(A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x)) + (1 + 2x + x^2)e^{2x},$$

dove A e B sono arbitrarie costanti reali. Tra queste funzioni, quella soddisfacente anche le condizioni iniziali è $y = (1 + 2x + x^2)e^{2x}$.

(6) $f'(x) = 3x^2 \log(1 + x) + \frac{x^3}{1+x}$. La retta ha equazione $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$ quindi $2y = (6 \log 2 + 1)x - 4 \log 2 - 1$.

(7) Esiste, esiste, non esiste.

(8) Equazione a variabili separabili, ovvero della forma $y' = f(x)g(y)$, con $f(x) = 1 + x$ e $g(y) = 0$. Dato che $g(y) = 0$ per $y = 0$, la funzione $y(x) = 0$ per ogni x è una soluzione dell'equazione. La soluzione del problema di Cauchy proposto però assume il valore 1 in $x = 0$, quindi ha valore diverso da 0 in un intorno di $x = 0$; possiamo separare le variabili, ottenendo

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int (1 + x)\, dx \quad\Longrightarrow\quad 2\sqrt{y} = x + \frac{x^2}{2} + c.$$

Determiniamo c usando la condizione iniziale:

$$2 = 2\sqrt{y(0)} = (x + \frac{x^2}{2} + c)\Big|_{x=0} = c,$$

quindi la soluzione del P.C. in un intorno di $x = 0$ soddisfa la relazione

$$2\sqrt{y} = x + \frac{x^2}{2} + 2$$

e quindi è data da

$$y = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)^2.$$

Per determinare l'intervallo su cui questa espressione fa da soluzione, osserviamo che l'equazione $1 + x/2 + x^2/4 = 0$ non ha soluzioni, di conseguenza l'espressione trovata fornisce la soluzione su tutto l'asse reale.