Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 26.5.2005

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sia $f(x,y) = x^3 - x^2 + xy + y^2$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(2) Individuare i punti di flesso del grafico della funzione:

$$f(x) = 3x^5 - 9x^4 + 8x^3 - x + 1.$$

Si tratta di una funzione convessa?

(3) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int 2x^2 - \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{6x+1}{3x+1}\,dx, \qquad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$$

(4) Sia $f(x,y) = xy\log(x+y)$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y).$$

(5) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = (1+5x)e^{3x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

(6) Sia

$$f(x) = \sqrt{1 + x + 4x^2}.$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = -1$.

(7) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x + \log x}{1 + x^2 + \sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + \sqrt{x^3}}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + x + x^2}}{1 + \sqrt{x} + x^4}\,dx.$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = y - 2xe^x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) Punti stazionari: $(0,0)$ sella, $(5/6,-5/12)$ (minimo rel.).

(2) f è un polinomio e quindi ammette derivate di ogni ordine. Per una tale funzione i punti di flesso sono i punti in cui la derivata seconda cambia segno. Dato che $f''(x) = 12x(5x^2-9x+4)$ essa si annulla in $x=0$, $x=4/5$ ed $x=1$ ed attraversando questi punti la derivata seconda cambia segno, motivo per cui tutti e tre i punti sono flessi. Data l'esistenza di flessi f **non** è convessa.

(3) $\int 2x^2 - \frac{1}{x^2}\ dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{x} + c$,

$\int \frac{6x+1}{3x+1}\ dx = \int 2 - \frac{1}{3x+1}\ dx = 2x - \frac{1}{3}\log|3x+1| + c$,

$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx = 2\sin(\sqrt{x}) + c$.

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\log(x+y) + \frac{xy}{x+y}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2}$,

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{2}{x+y} - \frac{x+2y}{(x+y)^2} + \frac{2xy}{(x+y)^3}$.

(5) $y = 2e^{4x} + e^{-2x} - (1+x)e^{3x}$.

(6) $f'(x) = \frac{1+8x}{2\sqrt{1+x+4x^2}}$. La retta ha equazione $y = f(-1)+f'(-1)(x+1)$ quindi $4y = -7x+1$.

(7) Non esiste, Esiste, Esiste.

(8) Eq. di tipo lineare, ovvero della forma $y' = A(x)y + B(x)$. Dato che A e B sono funzioni continue in tutto l'asse reale, la soluzione del problema di Cauchy esiste ed unica su tutto tale asse e può essere determinata nel seguente modo:

$$K(x) = \int A(x)dx = \int dx = x,$$

quindi

$$y(x) = e^{K(x)}\left[\int e^{-K(x)}B(x)dx + c\right] = e^x\left[\int e^{-x}(-2xe^x)dx + c\right] = e^x\left[\int -2xdx + c\right] = e^x\left[\frac{x^2}{2} + c\right].$$

Dalla condizione $y(0) = 1$ segue allora

$$1 = y(0) = e^0\left[\frac{0^2}{2} + c\right] = c,$$

per cui la soluzione è $y(x) = (x^2/2+1)e^x$, su $\mathbb{R}$.