Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

seconda prova d'esonero: 27.1.2005

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Discutere l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x+x^2+x^3}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2-\ln x}{x^3+\ln x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx.$$

(2) Determinare il seno dell'angolo formato dalle seguenti coppie di vettori:

$$\begin{cases}(1,2),\\(2,3);\end{cases} \qquad \begin{cases}(1,2,3),\\(2,3,4).\end{cases}$$

(3) Determinare i punti stazionari di $f(x,y) = xe^{xy} - y$. (Osservazione: NON è richiesto che si stabilisca se si tratta di massimi, minimi o selle).

(4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+\sin(y^2)}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot\sin(y^2)}{x^2+y^2}.$$

(Attenzione, NON è detto che entrambi i limiti esistano!).

(5) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 5x + x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

(6) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 1$) e poi globalmente

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-y}{2\sqrt{x}} \\[2ex] y(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(7) Determinare i punti di massimo, minimo e di sella di:

$$f(x,y) = 2x^2 - 6x^2y + y^2.$$

(8) Sia $f(x,y) = (x-y)e^{2x} + x^2 + y^2$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Soluzioni

(1) Esiste, Non esiste, Esiste.

(2) Dalla formula del prodotto scalare si calcola il coseno, e da qui poi si ottiene il seno dell'angolo (a meno del segno). detti α e β gli angoli della prima coppia e della seconda, rispettivamente, si ha:

$$\cos\alpha = \frac{(1,2)\cdot(2,3)}{\|(1,2)\|\,\|(2,3)\|} = \frac{8}{\sqrt{70}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{3}{35}}.$$

$$\cos\beta = \frac{(1,2,3)\cdot(2,3,4)}{\|(1,2,3)\|\,\|(2,3,4)\|} = \frac{20}{\sqrt{14\cdot 29}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14\cdot 29}}.$$

(3) $(\sqrt{e}, -1/\sqrt{e})$, $(-\sqrt{e}, +1/\sqrt{e})$. Entrambi selle (con il polinomio Hessiano).

(4) Il primo non esiste (ad esempio lungo curva $y = 0$ diventa $\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$), il secondo tende a 0 (usare l'asintotico $\sin(y^2) \sim y^2$ e poi le coordinate polari).

(5) Soluzione: $y = -\frac{3e^{-x}}{2} + \frac{49e^{3x}}{54} + \frac{16}{27} - \frac{11x}{9} - \frac{x^2}{3}$.

(6) Soluzione: $y = 1 - \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{2}$ su $(0, +\infty)$.

(7) Punti stazionari: $(0,0)$ (minimo rel.), $(1/3, 1/3)$ (sella), $(-1/3, 1/3)$ (sella).

(8) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x - 2y + 1)e^{2x} + 2x$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2e^{2x},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = -4e^{2x}.$$