Il/la sig. .... autorizza la Facoltà di Farmacia a far comparire il proprio nominativo negli elenchi che verranno approntati per la divulgazione sulle pagine web di facoltà del risultato conseguito con il presente elaborato.

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 27.6.2007

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = -2$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = 3x - 1/x^2$.

(2) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}.$$

(3) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2}(\sqrt{x}+2)\ dx, \qquad \int_1^2 \frac{dx}{3x-2}, \qquad \int_0^\pi (3\sin(3x)+2\cos(2x))\ dx.$$

(4) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)+x}{x^2+x^4}\ dx, \qquad \int_5^{+\infty} \frac{x+e^{-x}}{9x^3+x+2\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_0^6 \frac{\sin(x)+\sqrt{x}}{x^2+3x^4}\ dx, .$$

(5) Sia $f(x,y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x,y).$$

(6) Sia $f(x,y) = x^4 + 4xy^3 + 12y$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(7) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} 2y'' - 5y' + y = 2x^2 - 23x + 24 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = \pi$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{\sin x}{x} + \cos x \\ y(\pi) = \pi. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame $f'(x) = 3 + \frac{2}{x^3}$ e così $f(-2) = -25/4$ ed $f'(-2) = 11/4$ per cui la retta cercata è $4y = 11x - 3$.

(2) La funzione esiste in $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed ammette derivate di ogni ordine in D. Dal fatto che $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ segue che f ha in $x = 0$ un asintoto verticale; dal fatto che per $x \to \infty$ si ha $f(x) = 2x + o(1)$ segue che la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo per f sia a $+\infty$ sia a $-\infty$. $f'(x) = 2+2/x^3$ si annulla in $x = -1$ ed è positiva in $(-\infty, -1)\cup(0+\infty)$ e negativa altrove. Ciò mostra che -1 è un punto di max. relativo. $f''(x) = \frac{-6}{x^4}$ non presenta zeri in D e risulta sempre negativa; quindi f non presenta punti di flesso ma per la presenza dell'asintoto verticale in $x = 0$ essa non è neppure concava in D (sebbene siano concave le sue restrizioni ai domini $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ considerate separatamente).

(3) (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}(\sqrt{x} + 2)\, dx = \int \left(x^{-3/2} + 2x^{-2}\right) dx = -2x^{-1/2} - 2x^{-1}$

quindi $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}(\sqrt{x} + 2)\, dx = [-2x^{-1/2} - 2x^{-1}]\Big|_1^4 = 5/2$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\log|3x-2|$

quindi $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\log|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{\log 4}{3}$

(c) $\displaystyle\int (3\sin(3x) + 2\cos(2x))\, dx = -\cos(3x) + \sin(2x)$

quindi $\displaystyle\int_0^\pi (3\sin(3x) + \cos(2x))\, dx = [-\cos(3x) + \sin(2x)]\Big|_0^\pi = 2$

(4) (a) Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)+x}{x^2+x^4}\, dx$. Sia $f(x) := \frac{\sin(x^2)+x}{x^2+x^4}$. Osserviamo che per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3};$$

di conseguenza l'integrale proposto **esiste**.

(b) Esistenza di $\int_5^{+\infty} \frac{x+e^{-x}}{9x^3+x+2\sqrt{x}}\, dx$. Sia $f(x) := \frac{x+e^{-x}}{9x^3+x+2\sqrt{x}}$. Osserviamo che per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{x}{9x^3} = \frac{1}{9x^2};$$

di conseguenza l'integrale proposto **esiste**.

(c) Esistenza di $\int_0^6 \frac{\sin(x)+\sqrt{x}}{x^2+3x^4}\, dx$. Sia $f(x) := \frac{\sin(x)+\sqrt{x}}{x^2+3x^4}$. Osserviamo che per $x \to 0$ si ha

$$f(x) = \frac{x + o(x) + \sqrt{x}}{x^2 + 3x^4} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{1/2}};$$

di conseguenza l'integrale proposto **esiste**.

(5) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sqrt{y} + \frac{y}{2\sqrt{x}}$,

$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$\displaystyle\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$,

$\displaystyle\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y) = 0$.

(6) Osserviamo che:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4y^3 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 12xy^2 + 12 \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12y^2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24xy$$

I punti stazionari sono quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 12xy^2 + 12 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y^3 = -x^3 \\ xy^2 + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -x \\ -x^3 = 1 \end{cases}$$

e perciò vi è un unico punto stazionari: $A := (-1, 1)$. Ricordando che il polinomio Hessiano in un punto (x_0, y_0) è definito da

$$H_{(x_0,y_0)}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)Y^2$$

si ha

$$\begin{aligned} H_A(X,Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,1)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1)Y^2 \\ &= 12X^2 + 2 \cdot 12XY - 24Y^2 \end{aligned}$$

Il discriminante di tale polinomio è:

$$b^2 - ac = 12^2 - (12)(-24) = 432 > 0$$

e quindi A è un **punto di sella**.

(7) Si tratta di un problema di Cauchy con equazione differenziale lineare del secondo ordine ed a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $2y'' - 5y' + 2y = 0$; l'equazione caratteristica è dunque $2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 1/2$. La generica soluzione della equazione omogenea è quindi

$$Ae^{2x} + Be^{x/2},$$

dove A, B sono costanti arbitrarie.
L'equazione originaria non è omogenea ed a destra compare la funzione $f(x) = 2x^2 - 23x + 24$. Una soluzione particolare della equazione sarà quindi della forma $p(x)$, con p polinomio di grado compreso tra 2 e 4. Supponiamo che il grado sia due e che quindi

$$\phi(x) = ax^2 + bx + c$$

sia una soluzione, con a, b, c costanti da determinarsi. Derivando l'espressione precedente si ha

$$\phi'(x) = 2ax + b, \quad \phi''(x) = 2a,$$

e quindi perché ϕ sia soluzione è necessario che

$$\begin{aligned} 2x^2 - 23x + 24 &= 2\phi''(x) - 5\phi'(x) + 2\phi(x) \\ &= 4a - 5(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) \\ &= 2ax^2 + (2b - 5a)x + 2c - 5b + 4a \end{aligned}$$

e quindi le costanti a, b, c devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 2 = 2a \\ -23 = 2b - 10a \\ 24 = 2c - 5b + 4a \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -13/2 \\ c = -25/4. \end{cases}$$

Una soluzione particolare è dunque $\phi(x) = x^2 - \frac{13}{2}x - \frac{25}{4}$ così che la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$\phi(x) = Ae^{2x} + Be^{x/2} + x^2 - \frac{13}{2}x - \frac{25}{4}.$$

Le costanti A e B sono poi determinate in modo da soddisfare anche le richieste del problema di Cauchy, ottenendo $A = 11/12$ e $B = 28/3$. La soluzione cercata è quindi

$$\phi(x) = \tfrac{11}{12}e^{2x} + \tfrac{28}{3}e^{x/2} + x^2 - \tfrac{13}{2}x - \tfrac{25}{4}.$$

(8) Equazione di tipo lineare, ovvero della forma $y' = A(x)y + B(x)$ con $A(x) := 1/x$ ed $B(x) = -\frac{\sin x}{x} + \cos x$. La soluzione locale è ottenuta con i seguenti passaggi:

$$A(x) := \int \frac{dx}{x} = \log|x| \ ,$$
$$y(x) = e^{A(x)}\Big[\int e^{-A(x)}B(x)\,dx\Big]$$

ricordando che il P.C. è centrato in $\pi > 0$ possiamo assumere che $|x| = x$, quindi $e^{A(x)} = e^{\log|x|} = x$, per cui

$$= x\int \frac{1}{x}(-\frac{\sin x}{x} + \cos x)\,dx = x\int(-\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x})\,dx$$
$$= x\Big[\frac{\sin x}{x} + c\Big] = \sin x + cx.$$

Dalla condizione iniziale si ha poi $c\pi = y(\pi) = \pi$ e quindi la soluzione (locale) è

$$y(x) = \sin x + x.$$

Le funzioni A e B sono continue in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed $\mathbb{R}$, rispettivamente, quindi dal teorema di esistenza ed unicità per le eq. lineari deduciamo che la funzione trovata è soluzione del P.C. nell'intervallo $(0, +\infty)$. Infine, osserviamo che la funzione così costruita è in realtà di classe C^1 in tutto $\mathbb{R}$ e in tutto tale intervallo soddisfa l'equazione differenziale proposta: ciò mostra che la soluzione in $(0, +\infty)$ appena trovata è in realtà prolungabile a tutto $\mathbb{R}$.