Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Seconda prova 17.1.2008: ver. A

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Di due eventi A e B è noto che $p(A^c) = 0.4$, $p(B|A) = 0.8$ e $p(A \cup B) = 0.32$. Calcolare $p(A), p(B)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.

(2) Un gioco d'azzardo (estremamente semplice, per la verità) consiste in questo: il giocatore estrae una palla da un'urna che ne contiene due bianche e cinque rosse. Il giocatore vince se estrae una bianca, altrimenti perde. In caso di vincita il giocatore vince 15 euro mentre in caso di perdita egli paga al banco X euro. Determinare quale valore deve essere attribuito ad X affinché il gioco sia equo. Successivamente si calcoli la probabilità che giocando 100 partite si riesca a vincere più di 50 euro.
(N.B. il gioco è detto *equo* quando la vincita media è 0).

(3) Data la funzione $f(x,y) = x^3y - 5xy^6 + \frac{3}{x} - \sqrt{y}$, calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

(4) Determinare il valore della costante reale c in modo che la funzione $f(x) = cx^3$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0,3]$. Si calcoli poi media μ e varianza σ^2.

(5) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	2	3	4	
3	1/8	0		1/2
4	0		1/4	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare $M[X]$, $M[Y]$. Le variabili X ed Y sono correlate?

(6) Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y per le quali è noto che

$$M[2X] = 3, \quad \mathrm{Var}[4X] = 4, \quad M[2Y] = 5, \quad \mathrm{Var}[Y] = 9.$$

Calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[3Y]$, $M[2X + 3Y]$, $\mathrm{Var}[2X + 3Y]$.

(7) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 4$ e varianza $\sigma^2 = 5$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 6), \quad P(X \leq 3) \quad \text{e infine} \quad P(2 \leq X \leq 5).$$

(8) I viaggi che il tour operator *Viaggia Bene* riesce a vendere ogni anno sono divisi secondo le varie destinazioni nel modo seguente: 40% in Europa, 20% in Africa, 30% nelle Americhe, 10% in Asia. Sono previsti soggiorni in alberghi di lusso nel 70% dei viaggi in Europa, nel 80% di quelli in Africa, nel 60% di quelli nelle Americhe, mentre nel 40% di quelli in Asia la categoria dell'albergo è economica. Calcolare la percentuale di viaggi con soggiorno presso alberghi di categoria economica, a prescindere dalla destinazione.

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Seconda prova 17.1.2008: ver. B

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Un gioco d'azzardo (estremamente semplice, per la verità) consiste in questo: il giocatore estrae una palla da un'urna che ne contiene tre bianche e quattro rosse. Il giocatore vince se estrae una bianca, altrimenti perde. In caso di vincita il giocatore vince 16 euro mentre in caso di perdita egli paga al banco X euro. Determinare quale valore deve essere attribuito ad X affinché il gioco sia equo. Successivamente si calcoli la probabilità che giocando 100 partite si riesca a vincere almeno 60 euro.
(N.B. il gioco è detto *equo* quando la vincita media è 0).

(2) Di due eventi A e B è noto che $p(A) = 0.6$, $p(B^c|A) = 0.2$ e $p(A \cup B) = 0.32$. Calcolare $p(B), p(B|A)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.

(3) Data la funzione $f(x, y) = 2x^4y + 6x^2y^2 - \frac{3}{x} + y$, calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

(4) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 3$ e varianza $\sigma^2 = 6$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 7), \quad P(X \leq 1) \quad \text{e infine} \quad P(2 \leq X \leq 6).$$

(5) Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y per le quali è noto che

$$M[3X] = 3, \quad \mathrm{Var}[2X] = 4, \quad M[Y] = 5, \quad \mathrm{Var}[2Y] = 9.$$

Calcolare $M[X]$, $M[3Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $M[3X + 2Y]$, $\mathrm{Var}[3X + 2Y]$.

(6) I viaggi che il tour operator *Viaggia Bene* riesce a vendere ogni anno sono divisi secondo le varie destinazioni nel modo seguente: 30% in Europa, 20% in Asia, 40% nelle Americhe, 10% in Africa. Sono previsti soggiorni in alberghi di lusso nel 60% dei viaggi in Europa, nel 70% di quelli in Africa, nel 60% di quelli nelle americhe, mentre nel 30% di quelli in Asia la categoria dell'albergo è economica. Calcolare la percentuale di viaggi con soggiorno presso alberghi di categoria economica, a prescindere dalla destinazione.

(7) Determinare il valore della costante reale c in modo che la funzione $f(x) = cx^4$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 2]$. Si calcoli poi media μ e varianza σ^2.

(8) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	3	4	8	
5		0	1/8	1/2
7	1/4		0	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare $M[X]$, $M[Y]$. Le variabili X ed Y sono correlate?

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Seconda prova 17.1.2008: ver. C

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Data la funzione $f(x,y) = 5x^3y^6 - 4xy^2 + \frac{1}{x} - 4y$, calcolare le seguenti derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

(2) Di due eventi A e B è noto che $p(A^c) = 0.3$, $p(B|A) = 0.9$ e $p(A \cup B) = 0.27$. Calcolare $p(A), p(B)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.

(3) Un gioco d'azzardo (estremamente semplice, per la verità) consiste in questo: il giocatore estrae una palla da un'urna che ne contiene quattro bianche e tre rosse. Il giocatore vince se estrae una bianca, altrimenti perde. In caso di vincita il giocatore vince 12 euro mentre in caso di perdita egli paga al banco X euro. Determinare quale valore deve essere attribuito ad X affinché il gioco sia equo. Successivamente si calcoli la probabilità che giocando 100 partite si riesca a vincere almeno 108 euro.
(N.B. il gioco è detto *equo* quando la vincita media è 0).

(4) Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y per le quali è noto che
$$M[2X] = 4, \quad \mathrm{Var}[X] = 6, \quad M[2Y] = 3, \quad \mathrm{Var}[3Y] = 9.$$
Calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[2X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $M[2X+3Y]$, $\mathrm{Var}[2X+3Y]$.

(5) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X\backslash Y$	2	3	4	
3	0		1/4	
4	1/8	0		1/2

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare $M[X]$, $M[Y]$. Le variabili X ed Y sono correlate?

(6) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 4$ e varianza $\sigma^2 = 6$. Calcolare le seguenti probabilità:
$$P(X \geq 7), \quad P(X \leq 2) \quad \text{e infine} \quad P(1 \leq X \leq 5).$$

(7) Determinare il valore della costante reale c in modo che la funzione $f(x) = cx^5$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0,3]$. Si calcoli poi media μ e varianza σ^2.

(8) I viaggi che il tour operator *Viaggia Bene* riesce a vendere ogni anno sono divisi secondo le varie destinazioni nel modo seguente: 50% in Europa, 25% in Africa, 10% nelle Americhe, 15% in Asia. Sono previsti soggiorni in alberghi di lusso nel 80% dei viaggi in Europa, nel 50% di quelli in Africa, nel 40% di quelli presso le Americhe, mentre nel 20% di quelli in Asia la categoria dell'albergo è economica. Calcolare la percentuale di viaggi con soggiorno presso alberghi di categoria economica, a prescindere dalla destinazione.

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Seconda prova 17.1.2008: ver. D

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Di due eventi A e B è noto che $p(A) = 0.7$, $p(B^c|A) = 0.1$ e $p(A \cup B) = 0.27$. Calcolare $p(B), p(B|A)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.

(2) Un gioco d'azzardo (estremamente semplice, per la verità) consiste in questo: il giocatore estrae una palla da un'urna che ne contiene due bianche e cinque rosse. Il giocatore vince se estrae una bianca, altrimenti perde. In caso di vincita il giocatore vince 15 euro mentre in caso di perdita egli paga al banco X euro. Determinare quale valore deve essere attribuito ad X affinché il gioco sia equo. Successivamente si calcoli la probabilità che giocando 100 partite si riesca a vincere almeno 51 euro.
(N.B. il gioco è detto *equo* quando la vincita media è 0).

(3) Data la funzione $f(x, y) = x^3y^4 + 5xy^2 - \frac{1}{y} + 4x$, calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

(4) Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y per le quali è noto che

$$M[X] = 4, \quad \mathrm{Var}[2X] = 8, \quad M[Y] = 6, \quad \mathrm{Var}[5Y] = 5.$$

Calcolare $M[3X]$, $M[2Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $M[3X - 2Y]$, $\mathrm{Var}[3X - 2Y]$.

(5) I viaggi che il tour operator *Viaggia Bene* riesce a vendere ogni anno sono divisi secondo le varie destinazioni nel modo seguente: 20% in Asia, 40% in Africa, 30% nelle Americhe, 10% in Europa. Sono previsti soggiorni in alberghi di lusso nel 40% dei viaggi in Europa, nel 70% di quelli in Africa, nel 60% di quelli presso le Americhe, mentre nel 70% di quelli in Asia la categoria dell'albergo è economica. Calcolare la percentuale di viaggi con soggiorno presso alberghi di categoria economica, a prescindere dalla destinazione.

(6) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 6$ e varianza $\sigma^2 = 8$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 8), \quad P(X \leq 5) \quad \text{e infine} \quad P(3 \leq X \leq 9).$$

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X\backslash Y$	3	8	9	
4	0	1/8		1/2
5		0	1/4	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare $M[X]$, $M[Y]$. Le variabili X ed Y sono correlate?

(8) Determinare il valore della costante reale c in modo che la funzione $f(x) = cx^3$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 5]$. Si calcoli poi media μ e varianza σ^2.

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Seconda prova 17.1.2008: ver. E

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y per le quali è noto che
$$M[X]=3, \quad \mathrm{Var}[3X]=27, \quad M[3Y]=8, \quad \mathrm{Var}[3Y]=27.$$
Calcolare $M[2X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $M[2X-3Y]$, $\mathrm{Var}[2X-3Y]$.

(2) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 8$ e varianza $\sigma^2 = 6$. Calcolare le seguenti probabilità:
$$P(X \geq 10), \quad P(X \leq 5) \quad \text{e infine} \quad P(6 \leq X \leq 11).$$

(3) I viaggi che il tour operator *Viaggia Bene* riesce a vendere ogni anno sono divisi secondo le varie destinazioni nel modo seguente: 10% in Europa, 60% in Africa, 10% nelle Americhe, 20% in Asia. Sono previsti soggiorni in alberghi di lusso nel 40% dei viaggi in Europa, nel 70% di quelli in Africa, nel 50% di quelli presso le Americhe, mentre nel 50% di quelli in Asia la categoria dell'albergo è economica. Calcolare la percentuale di viaggi con soggiorno presso alberghi di categoria economica, a prescindere dalla destinazione.

(4) Determinare il valore della costante reale c in modo che la funzione $f(x) = cx^4$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 6]$. Si calcoli poi media μ e varianza σ^2.

(5) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X\backslash Y$	3	8	9	
5		0	1/4	
8	0	1/8		1/2

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare $M[X]$, $M[Y]$. Le variabili X ed Y sono correlate?

(6) Un gioco d'azzardo (estremamente semplice, per la verità) consiste in questo: il giocatore estrae una palla da un'urna che ne contiene tre bianche e quattro rosse. Il giocatore vince se estrae una bianca, altrimenti perde. In caso di vincita il giocatore vince 16 euro mentre in caso di perdita egli paga al banco X euro. Determinare quale valore deve essere attribuito ad X affinché il gioco sia equo. Successivamente si calcoli la probabilità che giocando 100 partite si riesca a vincere più di 59 euro.
(N.B. il gioco è detto *equo* quando la vincita media è 0).

(7) Di due eventi A e B è noto che $p(A^c) = 0.8$, $p(B|A) = 0.5$ e $p(A \cup B) = 0.4$. Calcolare $p(A), p(B)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.

(8) Data la funzione $f(x, y) = x^4y^2 - 5xy^2 + \frac{6}{y} - 4xy$, calcolare le seguenti derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Seconda prova 17.1.2008: ver. F

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	1	5	9	
6	1/4	0		
8		1/8	0	1/2

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare $M[X]$, $M[Y]$. Le variabili X ed Y sono correlate?

(2) Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y per le quali è noto che

$$M[4X] = 1, \quad \mathrm{Var}[3X] = 2, \quad M[3Y] = 5, \quad \mathrm{Var}[3Y] = 9.$$

Calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $M[3X - Y]$, $\mathrm{Var}[3X - Y]$.

(3) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 5$ e varianza $\sigma^2 = 10$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 7), \quad P(X \leq 4) \quad \text{e infine} \quad P(3 \leq X \leq 10).$$

(4) Determinare il valore della costante reale c in modo che la funzione $f(x) = cx^7$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 4]$. Si calcoli poi media μ e varianza σ^2.

(5) I viaggi che il tour operator *Viaggia Bene* riesce a vendere ogni anno sono divisi secondo le varie destinazioni nel modo seguente: 20% in Europa, 30% in Africa, 10% nelle Americhe, 40% in Asia. Sono previsti soggiorni in alberghi di lusso nel 30% dei viaggi in Europa, nel 10% di quelli in Asia, nel 60% di quelli presso le Americhe, mentre nel 20% di quelli in Africa la categoria dell'albergo è economica. Calcolare la percentuale di viaggi con soggiorno presso alberghi di categoria economica, a prescindere dalla destinazione.

(6) Data la funzione $f(x, y) = 3x^4y^2 - 6x^2y + \frac{4}{y} - 5x^2$, calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

(7) Di due eventi A e B è noto che $p(A) = 0.2$, $p(B^c|A) = 0.5$ e $p(A \cup B) = 0.4$. Calcolare $p(B), p(B|A)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.

(8) Un gioco d'azzardo (estremamente semplice, per la verità) consiste in questo: il giocatore estrae una palla da un'urna che ne contiene due bianche e cinque rosse. Il giocatore vince se estrae una bianca, altrimenti perde. In caso di vincita il giocatore vince 15 euro mentre in caso di perdita egli paga al banco X euro. Determinare quale valore deve essere attribuito ad X affinché il gioco sia equo. Successivamente si calcoli la probabilità che giocando 100 partite si riesca a vincere almeno 51 euro.
(N.B. il gioco è detto *equo* quando la vincita media è 0).