

# Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 2.7.2008

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

- (1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa  $x = 4$  è tangente al grafico della funzione  $f(x) = \frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}$ .

- (2) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx, \quad \int_0^{2\pi} (x^2 - 2x + 3) \cos(x) dx, \quad \int_0^2 \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x - 3} dx.$$

- (3) Determinare il valore della costante reale  $c$  in modo che la funzione  $f(x) = c(2x^2 - x^4)$  sia una densità sullo spazio campionario  $\Omega = [-1, 1]$ . Si calcoli poi media e varianza.

- (4) Sia  $f(x, y) = \frac{x+y}{2xy+3}$ . Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

- (5) Una coppia di dadi è stata truccata in modo che al lancio di ogni dado le facce 3 e 5 compaiono con probabilità  $1/4$  mentre le altre restano tra loro equiprobabili. Qual è la probabilità che lanciando la coppia di dadi la somma dei numeri sulle facce sia 8?

- (6) La quantità  $N$  di idrogeno gassoso che si libera per elettrolisi dell'acqua al catodo della cella elettrolitica è proporzionale alla quantità di carica  $q$  che è fluita; si ha cioè che  $N = N_0 + m \cdot q$  dove  $N_0$  rappresenta la quantità di idrogeno già presente al catodo fin dall'inizio ed  $m$  è una costante di proporzionalità. A intensità di corrente costante la quantità di carica  $q$  è proporzionale al tempo  $t$ , mentre il numero di moli di idrogeno liberato è misurabile tramite un manometro montato sulla provetta al catodo. Tutto ciò per dire che di fatto l'esperimento di elettrolisi consiste nel rilevare ai vari tempi  $t$  il valore della pressione  $P$ , sapendo che tali parametri sono legati dalla relazione  $P = P_0 + c \cdot t$  dove  $P$  è la pressione,  $P_0$  è la pressione al tempo  $t = 0$  e  $c$  è una costante di proporzionalità. Durante un esperimento si sono rilevati i seguenti valori:

$t$ in minuti	2	4	6	8	10	12
$P$ in Atm	2.6	4.3	6.1	7.2	8.8	10.5

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti  $c$  ed  $P_0$ .

- (7) Su un spazio campionario  $\Omega$  sono date due variabili aleatorie  $X, Y$  di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	21	42	33	
-2	1/5	1/3		3/5
-6				
		7/15	4/15	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare  $M[X]$ ,  $M[Y]$ . Le variabili  $X$  ed  $Y$  sono correlate? Sono indipendenti?