Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 20.2.2008 (nuovo programma)

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 4$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

(2) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_0^1 (x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x})\,dx, \qquad \int_0^\pi (\sin(3x) - \cos(2x))\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3+2x^2+x-1}{x-3}\,dx.$$

(3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - \sqrt{x^6+2}}{3x^3+2x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-3x^2) - x^2}{3x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}-1}{3x+1}\big(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\big).$$

(4) Sia $f(x,y) = \frac{x^3}{y^2+1} - \frac{y^3}{x^2+1}$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

(5) Un produttore di tappi di sughero stima pari a 1% la probabilità che un tappo venga messo in vendita nonostante sia stato contaminato da un fungo. Calcolare la probabilità che in una partita di 10000 vi siano tra i 90 ed i 120 tappi contaminati **avendo cura di giustificare ogni passaggio**.

(6) La quantità Z di zinco deposta al catodo di un bagno elettrochimico dipende linearmente dalla quantità di carica q che vi fluisce. Si ha cioè che $Z = z_0 + m \cdot q$ dove z_0 rappresenta la quantità di zinco già presente al catodo al momento dell'accensione del bagno ed m rappresenta una costante di proporzionalità. Durante un bagno chimico sono fatte le seguenti misure:

q in Coulomb	2	3	7	9	12	15
Z in grammi	20.2	28.1	64.2	78.2	108.2	129.5

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti m ed z_0.

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X\backslash Y$	5	7	9	
-1	1/48	1/24		
2				7/8
	1/6		1/2	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare $M[X]$, $M[Y]$. Le variabili X ed Y sono correlate?

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 20.2.2008 (vecchio programma)

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 4$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

(2) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_0^1 \Big(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\Big)\, dx, \qquad \int_0^\pi (\sin(3x) - \cos(2x))\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x - 3}\, dx.$$

(3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - \sqrt{x^6+2}}{3x^3 + 2x^2 - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-3x^2) - x^2}{3x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2} - 1}{3x + 1}\big(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\big).$$

(4) Sia $f(x,y) = \frac{x^3}{y^2+1} - \frac{y^3}{x^2+1}$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

(5) Sia $f(x,y) = 3x^4 - 12xy + 4y^3$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(6) Risolvere il seguente P.C. localmente, cioè senza precisare l'intorno di $x = 1$ in cui la funzione trovata fa da soluzione:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{2x-1} + x - 1 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(7) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3y'' - 10y' + 3y = 6x - 11 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 7. \end{cases}$$