Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 24.4.2008

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\ dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x-3}, \quad \int_0^\pi (2x-1)\sin x\ dx.$$

(2) Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+4x^2}{1-x^3+x^4}\ dx, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+\log x}{3x^2+2\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_0^6 \frac{\sin(x)}{1-\cos x}\ dx, .$$

(3) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 2$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{2x-5}{2x-3}$.

(4) Individuare punti estremi, punti di flesso ed eventuali asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{-1}{3x^3} - x.$$

(5) Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} 15y'' - 13y' + 2y = 6x^2 - 88x + 157 \\ y(0) = 9 \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

(6) Sia $f(x,y) = 5xy^3 - 4x^2y^2 + \frac{x}{y}$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x,y).$$

(7) Sia $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^3$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(8) Risolvere il seguente P.C. prima localmente (cioè senza precisare l'intorno di $x = 0$ in cui la funzione trovata fa da soluzione) e poi globalmente.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2y}{x+2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni

(1) $5/4$, $\log(2/3)$, $2\pi - 2$.

(2) (a) Esistenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1+4x^2}{1-x^3+x^4}\,dx$. Sia $f(x) := \frac{1+4x^2}{1-x^3+x^4}$. Osserviamo che per $x \to +\infty$ si ha
$$f(x) \sim \frac{4x^2}{x^4} = \frac{4}{x^2};$$
di conseguenza l'integrale proposto **esiste**.

(b) Esistenza di $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+\log x}{3x^2+2\sqrt{x}}\,dx$. Sia $f(x) := \frac{\sqrt{x}+\log x}{3x^2+2\sqrt{x}}$. Osserviamo che per $x \to +\infty$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{3x^2} = \frac{1}{3x^{3/2}};$$
di conseguenza l'integrale proposto **esiste**.

(c) Esistenza di $\int_0^6 \frac{\sin(x)}{1-\cos x}\,dx$. Sia $f(x) := \frac{\sin(x)}{1-\cos x}$. Osserviamo che per $x \to 0$ si ha
$$f(x) = \frac{x+o(x)}{1-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \sim \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x};$$
di conseguenza l'integrale proposto **non esiste**.

(3) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame $f'(x) = \frac{-4}{(2x-3)^2}$ e così $f(2) = -1$ ed $f'(2) = -4$ per cui la retta cercata è $y = 7 - 4x$.

(4) La funzione esiste in $D := \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed ammette derivate di ogni ordine in D. Dal fatto che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ segue che f ha in $x = 0$ un asintoto verticale; dal fatto che per $x \to \infty$ si ha $f(x) = -x + o(1)$ segue che la retta $y = -x$ è asintoto obliquo per f sia a $+\infty$ sia a $-\infty$. $f'(x) = -1 + 1/x^4$ si annulla in $x = \pm 1$ ed è negativa in $(-\infty, -1) \cup (1 + \infty)$ e positiva altrove. Ciò mostra che -1 è un punto di minimo relativo e 1 è un punto di massimo relativo. $f''(x) = -\frac{4}{x^5}$ non presenta zeri in D e risulta negativa in $x > 0$ e positiva in $x < 0$; quindi f non presenta punti di flesso ma per la presenza dell'asintoto verticale in $x = 0$ essa non è neppure concava in D (sebbene sia convessa la restrizione al dominio $(-\infty, 0)$ e sia invece concava la restrizione a $(0, +\infty)$).

(5) Si tratta di un problema di Cauchy con equazione differenziale lineare del secondo ordine ed a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $15y'' - 13y' + 2y = 0$; l'equazione caratteristica è dunque $15\lambda^2 - 13\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = 2/3$ e $\lambda = 1/5$. La generica soluzione della equazione omogenea è quindi
$$Ae^{2x/3} + Be^{x/5},$$
dove A, B sono costanti arbitrarie.
L'equazione originaria non è omogenea ed a destra compare la funzione $f(x) = 6x^2 - 88x + 157$. Una soluzione particolare della equazione sarà quindi della forma $p(x)$, con p polinomio di grado compreso tra 2 e 4. Supponiamo che il grado sia due e che quindi
$$\phi(x) = ax^2 + bx + c$$
sia una soluzione, con a, b, c costanti da determinarsi. Derivando l'espressione precedente si ha
$$\phi'(x) = 2ax + b, \quad \phi''(x) = 2a,$$
e quindi perché ϕ sia soluzione è necessario che
$$\begin{aligned} 6x^2 - 88x + 157 &= 15\phi''(x) - 13\phi'(x) + 2\phi(x) \\ &= 30a - 13(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) \\ &= 2ax^2 + (2b - 26a)x + 2c - 13b + 30a \end{aligned}$$

e quindi le costanti a, b, c devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 6 = 2a \\ -88 = 2b - 26a \\ 157 = 2c - 13b + 30a \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 1. \end{cases}$$

Una soluzione particolare è dunque $\phi(x) = 3x^2 - 5x + 1$ così che la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$\phi(x) = Ae^{2x/3} + Be^{x/5} + 3x^2 - 5x + 1.$$

Le costanti A e B sono poi determinate in modo da soddisfare anche le richieste del problema di Cauchy, ottenendo $A = 3$ e $B = 5$. La soluzione cercata è quindi

$$\phi(x) = 3e^{2x/3} + 5e^{x/5} + 3x^2 - 5x + 1.$$

(6) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5y^3 - 8xy^2 + \frac{1}{y}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 15y^2 + 16xy - \frac{1}{y^2}$,

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = 16y$,

$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x}(x, y) = 16$.

(7) Osserviamo che:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3y^2 \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

I punti stazionari sono quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = -3x^2/2 \\ 2x + 3(-3x^2/2)^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = -3x^2/2 \\ x(1 + (\frac{3x}{2})^3) = 0 \end{cases}$$

e perciò vi sono due punti stazionari: $A := (0, 0)$ e $B := (-2/3, -2/3)$. Ricordando che il polinomio Hessiano in un punto (x_0, y_0) è definito da

$$H_{(x_0,y_0)}(X, Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)Y^2$$

si ha

$$\begin{aligned} H_A(X, Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)Y^2 \\ &= 2 \cdot 2XY \end{aligned}$$

Il discriminante di tale polinomio è:

$$b^2 - ac = 2^2 - (0)(0) = 4 > 0$$

e quindi A è un **punto di sella**. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned} H_B(X, Y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2/3, -2/3)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2/3, -2/3)XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2/3, -2/3)Y^2 \\ &= -4X^2 + 2 \cdot 2XY - 4Y^2 \end{aligned}$$

Il discriminante di tale polinomio è:

$$b^2 - ac = 2^2 - (-4)(-4) = -12 < 0$$

e quindi B è un estremante; essendo il coefficiente di X^2 negativo, tale punto è un punto di **massimo** relativo.

(8) Equazione a variabili separabili, ovvero della forma $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) := -2/(x+2)$ e $g(y) = y$. Per separazione delle variabili si ha

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-2\,dx}{x+2} \implies \log|y| = -2\log|x+2| + c$$

Dalla condizione iniziale si ha poi $\log 1 = -2\log(2+0) + c$ e quindi $c = 2\log 2$ per cui la relazione diventa $\log|y| = -2\log|(x+2)/2|$ e tenuto conto che nel punto iniziale si ha $y(0) = 1 > 0$, si possono eliminare i valori assoluti così che la soluzione (locale) è

$$y(x) = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

La funzione f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e la soluzione locale trovata diverge in $x = -2$, per cui la soluzione trovata è di fatto soluzione nell'intervallo $(-2, +\infty)$ e non può essere prolungata su alcun intervallo più ampio.