Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 24.1.2008 (nuovo programma)

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = -3$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3}$.

(2) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int \left(4x^3 - \frac{1}{\sqrt{3x}} + \sqrt[4]{x-3}\right) dx, \qquad \int (\sin(3x) - \cos(2x+1))\, dx, \qquad \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}\, dx.$$

(3) Dopo aver verificato che l'equazione $x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ ammette una sola soluzione, se ne determini il valore corretto alla seconda cifra decimale mediante il metodo di bisezione o il metodo di Newton, a scelta.

(4) Sia $f(x, y) = \frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x}$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y).$$

(5) Di due eventi A e B è noto che $p(A) = 0.3$, $p(A^c \cup B) = 0.6$ e $p(B|A^c) = 0.4$. Calcolare $p(B)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.

(6) Una molla è fissata ad un estremo ad una parete mentre all'altro capo viene applicata una forza di modulo x. Indichiamo con y la distanza dalla parete del capo al quale è applicata la forza. Un semplice modello dell'elasticità prevede che la dipendenza di y da x sia del tipo $y = \ell_0 + mx$, dove ℓ_0 è la lunghezza della molla a riposo e m è una costanza opportuna (l'inverso $1/m$ è solitamente indicato con k ed è una grandezza nota col nome di costante elastica della molla). Un esperimento con una data molla fornisce i seguenti dati:

x in Newton	1	2	4	5	7	8
y in cm	4.2	5.8	8.4	9.6	12.9	13.9

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti m ed ℓ_0.

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
1	1/18		1/6		1/3
2	1/9	5/18			
		1/3		1/6	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e successivamente calcolare $M[X]$, $M[Y]$. X ed Y sono indipendenti? Sono correlate?

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 24.1.2008 (vecchio programma)

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = -3$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3}$.

(2) Calcolare le seguenti primitive.

$$\int \Big(4x^3 - \frac{1}{\sqrt{3x}} + \sqrt[4]{x-3}\Big)\,dx, \qquad \int (\sin(3x) - \cos(2x+1))\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}\,dx.$$

(3) Dopo aver verificato che l'equazione $x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ ammette una sola soluzione, se ne determini il valore corretto alla seconda cifra decimale mediante il metodo di bisezione o il metodo di Newton, a scelta.

(4) Sia $f(x,y) = \frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x}$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y).$$

(5) Sia $f(x,y) = 5x^4 - 20xy + 4y^5$; determinarne i punti stazionari e stabilire quali tra essi sono estremanti.

(6) Risolvere il seguente P.C. localmente, cioè senza precisare l'intorno di $x = 1$ in cui la funzione trovata fa da soluzione:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x-1}{2y} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(7) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'' - 5y' + 2y = 2x^2 - 8x - 7 \\ y(0) = -5 \\ y'(0) = -6. \end{cases}$$