

# Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

## Seconda prova 30.1.2009

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

- (1) Sono date due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  per le quali è noto che

$$M[2X] = 3, \quad \text{Var}[4X] = 4, \quad M[2Y] = 5, \quad \text{Var}[Y] = 9, \quad M[XY] = 4.$$

Calcolare  $M[X]$ ,  $M[Y]$ ,  $\text{Var}[X]$ ,  $\text{Var}[3Y]$ ,  $M[2X + 3Y]$ ,  $\text{Var}[2X + 3Y]$ . Le variabili  $X, Y$  sono indipendenti?

- (2) I valori di una variabile aleatoria  $X$  sono distribuiti come una gaussiana di media  $\mu = 40$  e varianza  $\sigma^2 = 9$ . Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 44.5), \quad P(X \leq 34.7) \quad \text{e infine} \quad P(37.7 \leq X \leq 42.3).$$

- (3) Siano  $A$  e  $B$  due eventi tali che  $p(A|B) = 0.2$ ,  $p(B|A) = 0.7$  e  $p(A \cup B) = 0.4$ . Calcolare  $p(A)$  e  $p(B)$ . Gli eventi  $A$  e  $B$  sono indipendenti?

- (4) Data la funzione  $f(x, y) = 4x^4y - 5xy^4 + \frac{x}{y} - 3\frac{y}{x}$ , calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

- (5) Determinare per quali valori della costante reale  $c$  la funzione  $f(x) = 3cx + 3c^2x^2$  è una densità sullo spazio campionario  $\Omega = [0, 1]$ . Si calcoli poi media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  per ciascuna di esse.

- (6) Su un spazio campionario  $\Omega$  sono date due variabili aleatorie  $X, Y$  di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	-2	0	2	
1		0	1/3	
2	0	1/6		1/3

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e calcolare  $M[X]$ ,  $M[Y]$  ed indice di correlazione. Le variabili  $X$  ed  $Y$  sono indipendenti?

- (7) La quantità  $Z$  di zinco deposta al catodo di un bagno elettrolitico dipende linearmente dalla quantità di carica  $q$  che vi fluisce. Si ha cioè che  $Z = z_0 + m \cdot q$  dove  $z_0$  rappresenta la quantità di zinco già presente al catodo al momento dell'accensione del bagno ed  $m$  rappresenta una costante di proporzionalità. Durante un bagno chimico sono fatte le seguenti misure:

$q$ in Coulomb	1	2	3	4	5	6
$Z$ in grammi	7.0	10.2	14.1	16.8	20.4	22.8

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti  $m$  ed  $z_0$ .

- (8) Una coppia di dadi a sei facce numerate da 1 a 6 è stata truccata in modo che le facce 1 e 2 abbiano probabilità  $1/4$  mentre le altre sono tra loro equiprobabili. Qual è la probabilità che lanciando i dadi la somma dei risultati sia maggiore di 5?