Corso di Matematica per CTF

G. Molteni

Appello 16.2.2009

Il candidato risolva **interamente almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 1$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = 3x + \frac{x}{5x^2-7x+3}$.

(2) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_0^1 (3x^2 + 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}})\, dx, \qquad \int_1^4 (3 - \sqrt{x})(2x + 3\sqrt{x})\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{2x^2 + x - 1}{2x - 3}\, dx.$$

(3) Dopo aver stabilito l'esistenza dell'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 5x + 3},$$

se ne calcoli il valore.

(4) Sia $f(x, y) = \frac{x+1}{y^2} + \frac{y+1}{x^2}$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

(5) Siano A e B due eventi tali che $p(A|B^c) = 0.7$, $p(B|A^c) = 0.4$ e $p(A \cap B) = 0.6$. Calcolare $p(A)$ e $p(B)$.

(6) Determinare per quali valori della costante reale c la funzione $f(x) = c^2 x^2 - \frac{4c}{3} x$ è una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 1]$. Si calcoli poi media μ e varianza σ^2 per ciascuna di esse.

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X\backslash Y$	2	5	6	
-1	1/8		1/24	
1				1/3
	1/4		1/4	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e successivamente calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $M[3X+2Y]$, $Cov[X, Y]$ e $Var[3X-4Y]$. X ed Y sono indipendenti? Sono correlate?

(8) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una normale di media $\mu = 10$ e varianza $\sigma^2 = 9$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 6), \quad P(X \leq 11) \quad \text{e infine} \quad P(9 \leq X \leq 14).$$