

# Corso di Matematica per CTF

G. Molteni e D. Matessi

Appello: 23.11.2012

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

- (1) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = x \log(\cos x), \quad g(x) = \sqrt{e^x - 10x}, \quad h(x) = \frac{\sin(7x)}{\cos x}$$

- (2) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa  $x = 0$  è tangente al grafico della funzione  $f(x) = \sin(5x) - \sin(2x)$ .

- (3) Un esame del sangue per la ricerca di un dato anticorpo è affidabile al 96%, ovvero esso produce una segnalazione errata con probabilità 0.04. Calcolare la probabilità che impiegando questo test su 15000 campioni esso dia luogo a più di 650 segnalazioni errate. **Si risponda avendo cura di giustificare ogni passaggio.**

- (4) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x^2 + 2}{e^x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 3x + e^x}{7x^2 - 10}$$

- (5) Determinare il valore della costante  $c$  in modo che la funzione  $f(x) = c(x + 2)^2$  sia una densità sullo spazio campionario  $\Omega = [-2, 0]$ . Nello spazio di probabilità trovato calcolare  $\mu$ ,  $\sigma^2$ ,  $M[2x + 1]$  e  $\text{Var}[2x + 7]$ .

- (6) Su un spazio campionario  $\Omega$  sono date due variabili aleatorie  $X, Y$  la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X \backslash Y$	0	5
-1	1/8	
1		11/40
2		

Sapendo che  $p(X = 1) = 4/5$ ,  $p(X = 2) = 3/40$  e  $p(Y = 0) = 7/10$ , determinare il valore delle altre probabilità congiunte. Calcolare poi  $M[X]$ ,  $M[Y]$ ,  $\text{Var}[X]$ ,  $\text{Var}[Y]$  e  $\text{Var}[-X + 2Y]$ . Si calcolino inoltre le seguenti probabilità condizionate:  $P(X = 1|Y = 0)$  e  $P(X = -1|Y = 5)$ . Le variabili  $X$  e  $Y$  sono indipendenti?

- (7) È noto che un certo farmaco causa una diminuzione della pressione arteriosa che dipende dal dosaggio secondo una legge lineare, ovvero la diminuzione della pressione  $y$  dipende dal dosaggio  $x$  secondo la formula  $y = b + m \cdot x$ . Su un campione di 6 pazienti si hanno i seguenti dati

$x$ in milligrammi	6	10	16	19	24	31
$y$ in millimetri mercurio	5,2	6,1	8	8,4	9,5	12

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti  $m$  e  $b$ . Quale diminuzione di pressione ci si attende con un dosaggio  $x = 40$  mg?

- (8) I valori di una variabile aleatoria  $X$  sono distribuiti come una gaussiana di media  $\mu = 75$  e varianza  $\sigma^2 = 36$ . Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 82), \quad P(X \leq 59) \quad \text{e infine} \quad P(66 \leq X \leq 78).$$