

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni e D. Matessi

Appello: 20.02.2012 versione (A)

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

- (1) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 + x^3}{7x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{7x-7} - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \log x}{9x^2 + \sin x}.$$

- (2) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = (\sin x)^2 + \cos(x^2), \quad g(x) = \sqrt{\log x}, \quad h(x) = \log(x^2 + x + 1) \cdot \cos x.$$

- (3) Data la funzione $f(x) = \cos(x^2 + x + \frac{\pi}{3})$, si determini l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 0$.

- (4) Si determini il valore della costante c in modo che la funzione $f(x) = \frac{x}{2} + cx^3$ sia una densità di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = [1, 2]$. In seguito se ne calcoli la media μ e la varianza σ^2 . Si calcolino, in questo spazio campionario, la media e la varianza della funzione $g(x) = x - \frac{3}{2}$.

- (5) È noto che una grandezza Y dipende da una grandezza X secondo la legge $Y = bX + q$ dove b e q sono quantità sperimentali. Eseguendo un esperimento per sei diversi valori di X si rilevano i seguenti valori di Y : Usando il metodo dei minimi quadrati determinare

X	0,3	1,9	2,4	3	5,2	6
Y	3	6,6	7,9	11	15,7	17,1

una stima di b e q . In base a questa stima, quale valore di Y è lecito aspettarsi in corrispondenza del valore $X = 23$?

- (6) Due variabili aleatorie X e Y definite su uno spazio campionario Ω hanno la seguente tabella di probabilità congiunte: Si completi la tabella inserendo le rimanenti probabilità

$X \backslash Y$	-2	-1	0	
1/2	3/16	1/16		
3/2				1/4
	2/5		1/2	

congiunte e marginali. Le due variabili sono indipendenti? Sono correlate? Calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$ e $\text{Var}[2X - Y]$.

- (7) Due giocatori A e B si sfidano ad una partita a dadi con le seguenti regole. Il giocatore A tira un dado rosso e il giocatore B tira un dado blu. Entrambi i dadi hanno tre facce equiprobabili numerate 1, 2 e 3. Il giocatore A vince se ottiene un numero strettamente maggiore di quello ottenuto da B , altrimenti vince B . Qual è la probabilità di A di vincere una partita? Quando A vince riceve da B 5 euro, se perde ne dà 3 a B . Giocando 9 partite, qual è la probabilità che A guadagni almeno 5 euro?

- (8) I valori di una variabile aleatoria Z sono distribuiti come una normale di media $\mu = 11$ e varianza $\sigma^2 = 10$. Si calcolino le seguenti probabilità:

$$P(Z \leq 9,5), \quad P(Z \geq 6,3) \quad \text{e} \quad P(8,6 \leq Z \leq 12,2).$$

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni e D. Matessi

Appello: 20.02.2012 versione (B)

Il candidato risolve almeno tre tra i seguenti quesiti.

- (1) Data la funzione $f(x) = \sin\left(x^2 + x + \frac{\pi}{3}\right)$, si determini l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 0$.
- (2) Si determini il valore della costante c in modo che la funzione $f(x) = cx + \frac{x^3}{5}$ sia una densità di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 2]$. In seguito se ne calcoli la media μ e la varianza σ^2 . Si calcolino, in questo spazio campionario, la media e la varianza della funzione $g(x) = -x + \frac{1}{2}$.
- (3) È noto che una grandezza Y dipende da una grandezza X secondo la legge $Y = bX + q$ dove b e q sono quantità sperimentali. Eseguendo un esperimento per sei diversi valori di X si rilevano i seguenti valori di Y : Usando il metodo dei minimi quadrati determinare

X	0,5	2	3	3,7	6	6,6
Y	3	4,1	5	4,5	6,2	6,2

una stima di b e q . In base a questa stima, quale valore di Y è lecito aspettarsi in corrispondenza del valore $X = 16$?

- (4) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{\log x}, \quad g(x) = \sin x \cdot \log(x^3 + x + 1), \quad h(x) = (\cos x)^2 + \sin(x^2).$$

- (5) I valori di una variabile aleatoria Z sono distribuiti come una normale di media $\mu = 11$ e varianza $\sigma^2 = 15$. Si calcolino le seguenti probabilità:

$$P(Z \geq 9), \quad P(Z \leq 3,8) \quad \text{e} \quad P(7,6 \leq Z \leq 18).$$

- (6) Due variabili aleatorie X e Y definite su uno spazio campionario Ω hanno la seguente tabella di probabilità congiunte: Si completi la tabella inserendo le rimanenti probabilità

$X \backslash Y$	-2	-1	0	
1/2	1/16	3/16		3/4
3/2				
	1/5		1/2	

congiunte e marginali. Le due variabili sono indipendenti? Sono correlate? Calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$ e $\text{Var}[-X + 3Y]$.

- (7) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{2x+2} - 1}{x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + \cos x}{x^3 + \log x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + (\sin x)^2}{5x^2}.$$

- (8) Due giocatori A e B si sfidano ad una partita a dadi con le seguenti regole. Il giocatore A tira un dado rosso e il giocatore B tira un dado blu. Entrambi i dadi hanno tre facce equiprobabili numerate 1, 2 e 3. Il giocatore A vince se ottiene un numero strettamente maggiore di quello ottenuto da B , altrimenti vince B . Qual è la probabilità di A di vincere una partita? Quando A vince riceve da B 6 euro, se perde ne dà 2 a B . Giocando 10 partite, qual è la probabilità che A guadagni almeno 12 euro?