

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni e D. Matessi

Appello: 12.09.2012

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

- (1) Determinare le seguenti primitive:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x-4} + 3x^5 \right) dx, \quad \int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 2}{x-1} dx, \quad \int \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx.$$

- (2) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = 2 - x^2 + \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right), \quad h(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 4}.$$

- (3) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 2$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{3x^2+x}{\sqrt{x^2-3}}$.
- (4) Determinare il valore della soluzione dell'equazione $x^5 + 4x - 2 = 0$ entro la prima cifra decimale usando sia il metodo della bisezione che il metodo di Newton (detto anche metodo della tangente). (**Suggerimento:** verificare che la soluzione esiste, è unica ed è contenuta nell'intervallo $[0, 1]$).
- (5) Su uno spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X \backslash Y$	-3	0	3	
-3	1/18			
0	2/18		0	1/3
3			3/18	1/2
	5/18		4/18	

Determinare il valore delle altre probabilità congiunte e marginali; calcolare poi $M[X]$, $M[Y]$, $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$. Sapendo che $Y = 3$, qual è la probabilità che anche X valga 3? Qual è la probabilità che X sia uguale ad Y ?

- (6) Un pediatra sa che la febbre alta in un bambino può essere sintomo di una infezione da varicella, di una infezione da morbillo, di rosolia oppure avere un'origine non precisata. Sulla base della sua esperienza egli stima: $p(\text{varicella}) = 0.3$, $p(\text{morbillo}) = 0.3$, $p(\text{rosolia}) = 0.2$; egli inoltre sa che la febbre alta si accompagna alla presenza di macchie rosse sulla pelle nel 40% dei casi di infezione da morbillo, nel 60% dei casi di infezione da varicella, nel 80% dei casi di infezione da rosolia, infine nel 10% dei bimbi affetti da altre malattie. In presenza di un paziente con febbre alta e "macchie rosse" sulla pelle, qual è la causa più probabile?
- (7) È noto che la grandezza Y dipende da X tramite una legge della forma $Y = mX + q$, dove m e q sono parametri sperimentali. Eseguendo l'esperimento per sei valori diversi di X si ottengono le seguenti misure per Y :

X	2.2	3.6	5.8	8.2	9.7	11.4
Y	2.4	3.7	5.3	8.1	9.2	11.1

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti m ed q . In base al modello così ottenuto, qual valore di Y è lecito aspettarsi per $X = 16.7$?

- (8) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 250$ e varianza $\sigma^2 = 49$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 240.2), \quad P(X \leq 245.3) \quad \text{e infine} \quad P(242.5 \leq X \leq 259.5).$$