Corso di Matematica per CTF

G. Molteni e D. Matessi

Appello: 16.01.2012 versione (A)

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 1$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x^2-3x+3}$.

(2) Un test medico per la ricerca di un dato enzima si sa essere affidabile al 98%, ovvero esso produce una segnalazione errata con probabilità 0.02. Calcolare la probabilità che impiegando questo test su 10000 campioni esso dia luogo a più di 220 segnalazioni errate **avendo cura di giustificare ogni passaggio**.

(3) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^4 \frac{2-3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x^2})\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{2x^3-x^2-x+2}{2x-3}\,dx.$$

(4) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = (x^2-3x+1)\sin(x), \qquad g(x) = \frac{2x^2+3x-2}{2x^2-3x+2}, \qquad h(x) = \sqrt{1+2x-x^3}.$$

(5) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X\backslash Y$	3	5	7
-3	1/6	1/6	
2			

Sapendo che $p(X = -3) = 1/3$, $p(Y = 3) = 1/2$ e $p(Y = 5) = 1/3$, determinare il valore delle altre probabilità congiunte. Calcolare poi $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$ e $\mathrm{Var}[2X - 3Y]$.

(6) La quantità Z di zinco deposta al catodo di un bagno elettrochimico dipende linearmente dalla quantità di carica q che vi fluisce e questa, in condizione di corrente costante, è a sua volta proporzionale al tempo. Si ha cioè che $Z = z_0 + m \cdot t$ dove z_0 rappresenta la quantità di zinco già presente al catodo al momento dell'accensione del bagno ed m rappresenta una costante di proporzionalità. Durante un bagno chimico sono fatte le seguenti misure:

t in secondi	2	4	6	8	10	12
Z in grammi	11.2	16.8	24.1	39.7	47.5	40.9

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti m ed z_0. In base a quanto determinato, quanto zinco sarà deposto al tempo $t = 20$s?

(7) Determinare il valore della costante c in modo che la funzione $f(x) = c(4 - x^2)$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 2]$. Nello spazio di probabilità trovato calcolare μ, σ^2, $M[2x - 3]$ e $\mathrm{Var}[2x - 3]$.

(8) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 108$ e varianza $\sigma^2 = 20$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 104.5), \quad P(X \leq 113.3) \quad \text{e infine} \quad P(103.5 \leq X \leq 114.5).$$

Corso di Matematica per CTF

G. Molteni e D. Matessi

Appello: 16.01.2012 versione (B)

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X \backslash Y$	2	4	6
-2		1/12	1/12
3			

Sapendo che $p(X = -2) = 1/6$, $p(Y = 4) = 1/3$ e $p(Y = 6) = 1/3$, determinare il valore delle altre probabilità congiunte. Calcolare poi $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$ e $\mathrm{Var}[3X - 2Y]$.

(2) Un test medico per la ricerca di un dato enzima si sa essere affidabile al 97%, ovvero esso produce una segnalazione errata con probabilità 0.03. Calcolare la probabilità che impiegando questo test su 20000 campioni esso dia luogo a più di 640 segnalazioni errate **avendo cura di giustificare ogni passaggio**.

(3) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = (x^2 - 3)\cos(x), \qquad g(x) = \frac{4x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}, \qquad h(x) = \sqrt{1 - x + x^3}.$$

(4) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^3 (x^3 - \frac{1}{x^3})\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{2 + 3\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{2x^3 + 2x^2 + x - 3}{2x - 3}\,dx.$$

(5) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una gaussiana di media $\mu = 120$ e varianza $\sigma^2 = 32$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 110.5), \quad P(X \leq 125.3) \quad \text{e infine} \quad P(113.5 \leq X \leq 125.5).$$

(6) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 1$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{2-3\sqrt{x}}{2x^2-3x+2}$.

(7) Determinare il valore della costante c in modo che la funzione $f(x) = c(3 - x^2)$ sia una densità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 1]$. Nello spazio di probabilità trovato calcolare poi μ, σ^2, $M[3x - 2]$ e $\mathrm{Var}[3x - 2]$.

(8) La quantità Z di zinco deposta al catodo di un bagno elettrochimico dipende linearmente dalla quantità di carica q che vi fluisce e questa, in condizione di corrente costante, è a sua volta proporzionale al tempo. Si ha cioè che $Z = z_0 + m \cdot t$ dove z_0 rappresenta la quantità di zinco già presente al catodo al momento dell'accensione del bagno ed m rappresenta una costante di proporzionalità. Durante un bagno chimico sono fatte le seguenti misure:

t in secondi	3	6	9	12	13	15
Z in grammi	17.4	28.2	42.8	54.2	62.9	70.4

Usando il metodo dei minimi quadrati determinare una stima per le costanti m ed z_0. In base a quanto determinato, quanto zinco sarà deposto al tempo $t = 20$s?