Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Appello: 29.6.2004

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin(x^2 - x^3), \qquad g(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 1}, \qquad h(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}.$$

(2) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int 7x - \frac{4}{x^3} - \sqrt{x}\, dx, \qquad \int \sqrt{1+x}\, dx, \qquad \int \frac{2}{1-3x}\, dx.$$

(3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

(4) Stabilire se le seguenti funzioni sono monòtone:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1, \qquad g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

(5) Sullo spazio campionario $\Omega = [0,1]$ è definita la densità di probabilità $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Calcolarne la media μ e la varianza σ^2.

(6) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una **binomiale** di media $\mu = 3,5$ e varianza $\sigma^2 = 1,05$. Calcolare la probabilità $P(X < 4)$.

(7) Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti, sapendo che $p(A) = 2/3$, $p(A \cap B) = 1/6$ ed $p(A \cup B) = 3/4$.

(8) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y indipendenti la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X \backslash Y$	2	3
2		1/6
4		

Sapendo che $p(X = 2) = 1/3$, determinare il valore delle altre probabilità congiunte. Calcolare poi $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$ e $\mathrm{Var}[X+Y]$.

(9) Un'azienda di lampadine è tanto sicura della bontà del proprio prodotto da essere disposta a rimborsare il *doppio* del suo costo nel caso un acquirente si accorga di aver acquistato una lampadina guasta. Una nota interna all'azienda (certe informazioni di solito non sono di dominio pubblico) comunica all'ufficio promozioni che circa l'1% delle lampadine immesse nel mercato è in realtà guasto. Sapendo che ogni lampadina è venduta a 1 Euro, qual è la probabilità che una volta rimborsati i clienti insoddisfatti l'azienda ricavi *meno di* 985 Euro dalla vendita di 1000 lampadine?

(1)

$$f'(x) = (2x - 3x^2)\cos(x^2 - x^3),$$
$$g'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+x-1) - (x^2-3x-1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} = \frac{4x^2+4}{(x^2+x-1)^2},$$
$$h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

(2)

$$\int 7x - \frac{4}{x^3} - \sqrt{x}\ dx = \frac{7x^2}{2} - 4\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + c = \frac{7x^2}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

$\int \sqrt{1+x}\ dx$ per sostituzione: $\sqrt{1+x} = \gamma$, da cui $x = \gamma^2 - 1$ e $dx = 2\gamma d\gamma$, quindi

$$= \int \gamma \cdot 2\gamma\ d\gamma = \int 2\gamma^2\ d\gamma = \frac{2}{3}\gamma^3 + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + c.$$

$\int \frac{2}{1-3x}\ dx$ per sostituzione: $1 - 3x = \gamma$, da cui $x = (1-\gamma)/3$ e $dx = -d\gamma/3$, quindi

$$= \int -\frac{2}{3\gamma}\ d\gamma = -\frac{2}{3}\log|\gamma| + c = -\frac{2}{3}\log|1-3x|.$$

(3) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 1 è:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1).$$

Dato che $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$, ne segue che

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 1/2,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = 2 + \tfrac{1}{2}(x-1), \quad \text{ovvero} \quad y = \tfrac{x}{2} + \tfrac{3}{2}.$$

(4) Trattandosi di funzioni derivabili ad ogni ordine, potremo ottenere la risposta studiando il segno delle loro derivate prime. Abbiamo:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Consideriamo l'equazione $f'(x) = 0$, ovvero $3x^2 - 2x + 1 = 0$. Il discriminante di questo polinomio è $(-2)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = -8 < 0$ quindi $f'(x)$ non è mai nullo per cui ha sempre lo stesso segno. Dato che $f'(0) = 1 > 0$ e quindi $f'(x) > 0$ per ogni x, ne segue che la funzione f **è strettamente crescente**.

$$g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad\Longrightarrow\quad g'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

Dato che $\sqrt{x} \geq 0$ per ogni x, ne segue che $g'(x) < 0$ per ogni x e che quindi la funzione g **è strettamente decrescente**.

(5) Si tratta semplicemente di calcolare due integrali. Infatti, dalla definizione di media si ha che

$$\mu = \int_\Omega x f(x)\ dx = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}\ dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^{3/2}\ dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Analogamente, per la varianza si ha:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_\Omega (x-\mu)^2 f(x)\ dx = \int_0^1 \Big(x-\frac{3}{5}\Big)^2 \frac{3}{2}\sqrt{x}\ dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2 - \frac{6x}{5} + \frac{9}{25})\sqrt{x}\ dx\\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 (x^{5/2} - \frac{6x^{3/2}}{5} + \frac{9x^{1/2}}{25})\ dx = \frac{3}{2}\Big[\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{6x^{5/2}}{5\cdot 5/2} + \frac{9x^{3/2}}{25\cdot 3/2}\Big]_0^1\\ &= \frac{3}{2}\Big[\frac{1}{7/2} - \frac{6}{5\cdot 5/2} + \frac{9}{25\cdot 3/2}\Big] = \frac{3}{2}\Big[\frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25}\Big] = \frac{12}{175}.\end{aligned}$$

(6) La distribuzione binomiale ha due parametri, N e p. Rispetto a questi parametri la media $\mu = Np$ e la varianza $\sigma^2 = Np(1-p)$. Nel caso in esame, quindi, disponiamo delle seguenti informazioni:

$$\begin{cases}\mu = Np = 3,5\\ \sigma^2 = Np(1-p) = 1,05.\end{cases}$$

Dividendo queste relazioni scopriamo che:

$$1-p = \frac{Np(1-p)}{Np} = \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{1,05}{3,5} = 0,3 \qquad \Longrightarrow \qquad p = 0,7.$$

Di conseguenza

$$N = \frac{Np}{p} = \frac{\mu}{p} = \frac{3,5}{0,7} = 5.$$

Possiamo dunque concludere osservando che

$$\begin{aligned}P(X<4) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\\ &= \binom{5}{0}\cdot 0,7^0\cdot 0,3^5 + \binom{5}{1}\cdot 0,7^1\cdot 0,3^4 \binom{5}{2}\cdot 0,7^2\cdot 0,3^3 + \binom{5}{3}\cdot 0,7^3\cdot 0,3^2\\ &= 0,3^5 + 5\cdot 0,7^1\cdot 0,3^4 + 10\cdot 0,7^2\cdot 0,3^3 + 10\cdot 0,7^3\cdot 0,3^2 \approx 0,472 \approx 47,2\%.\end{aligned}$$

(7) Ricordiamo che due eventi A e B sono detti indipendenti se e solo se $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$. Si tratta dunque di stabilire nel caso in esame questa uguaglianza è soddisfatta. Dalla relazione $p(A\cup B) + p(A\cap B) = p(A) + p(B)$, abbiamo

$$p(B) = p(A\cap B) + p(A\cup B) - p(A) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}.$$

Dato che $p(A)\cdot p(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6} = p(A\cap B)$, possiamo affermare che gli eventi dati **sono indipendenti**.

(8) I dati forniti dal testo sono i seguenti:

$X\backslash Y$	2	3	
2		1/6	1/3
4			

Poiché per ipotesi X ed Y sono indipendenti, abbiamo che $p(X=2)\cdot p(Y=3) = p(X=2, Y=3)$, da cui ricaviamo $p(Y=3)$:

$X\backslash Y$	2	3	
2		1/6	1/3
4			
		1/2	

Dal fatto che $p(Y=3) = p(X=2, Y=3) + p(X=4, Y=3)$, ricaviamo $p(X=4, Y=3)$:

$X\backslash Y$	2	3	
2		1/6	1/3
4		1/3	
		1/2	

ed analogamente ricaviamo $p(X=2, Y=2)$:

$X\backslash Y$	2	3	
2	1/6	1/6	1/3
4		1/3	
		1/2	

Dato che la somma di tutte le probabilità congiunte deve essere 1, otteniamo che

$X\backslash Y$	2	3	
2	1/6	1/6	1/3
4	1/3	1/3	2/3
	1/2	1/2	

Possiamo ora calcolare quanto viene richiesto:

$$\begin{aligned}
M[X] &= 2\cdot p(X=2) + 4\cdot p(X=4) = 2\cdot 1/3 + 4\cdot 2/3 = 10/3,\\
M[Y] &= 2\cdot p(Y=2) + 3\cdot p(Y=3) = 2\cdot 1/2 + 3\cdot 1/2 = 5/2,\\
\mathrm{Var}[X] &= (2-M[X])^2\cdot p(X=2) + (4-M[X])^2\cdot p(X=4)\\
&= (2-10/3)^2\cdot 1/3 + (4-10/3)^2\cdot 2/3 = 8/9,\\
\mathrm{Var}[Y] &= (2-M[Y])^2\cdot p(Y=2) + (3-M[Y])^2\cdot p(Y=3)\\
&= (2-5/2)^2\cdot 1/2 + (3-5/2)^2\cdot 1/2 = 1/4.
\end{aligned}$$

Per il calcolo di $\mathrm{Var}[X+Y]$ osserviamo che essendo X ed Y indipendenti, esse risultano anche non-correlate e quindi

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 8/9 + 1/4 = 41/36.$$

(9) Sia S la variabile aleatoria il cui valore indica la quantità di lampadine guaste in un totale di $N = 1000$. L'azienda guadagna 1Euro dalla vendita di ogni lampadina non guasta e perde 2 Euro per ogni lampadina guasta, quindi il suo guadagno è

$$\text{guadagno } = 1\cdot N - 2\cdot S = N - 2S.$$

La probabilità che il guadagno sia inferiore a 985 euro equivale quindi a calcolare

$$P(\text{guadagno } < 985) = P(1000 - 2S < 985) = P(2S > 15) = P(S \geq 8).$$

Si deve quindi calcolare la probabilità che vi siano almeno otto lampadine guaste su un totale di $N = 1000$. Per come è definito S è distribuito come una binomiale con parametri $N = 1000$ e $p = 1\% = 0,01$ (Spiegazione: il singolo esperimento consistente nella verifica del funzionamento di una lampadina ha due sole possibili risultati: guasta e non-guasta. la probabilità che sia guasta è p. L'esperimento è ripetuto N volte. S è il numero di guasti che si verificano in tutto). Quindi

$$P(S\geq 8) = \sum_{n=8}^{N} p(S=n) = \sum_{n=8}^{N}\binom{N}{n} p^n(1-p)^{N-n} = \sum_{n=8}^{1000}\binom{1000}{n}\cdot 0,01^n\cdot(0,99)^{1000-n}.$$

Purtroppo questa somma è ineseguibile a mano (ci sono 992 addendi). Possiamo quindi tentare la strada di un calcolo approssimato. Osserviamo infatti che $M[S] = Np = 10$ e che $Var[S] = Np(1-p) = 9,9$: dal teorema del limite centrale sappiamo allora che possiamo condurre il calcolo come se S fosse distribuito come una Gaussiana, sicuri di commettere un errore nella stima della probabilità che è inferiore a $0,01$. Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}
P(S \geq 8) &= P(S - M[S] > 8 - 10) = P\Big(\frac{S - M[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{8 - 10}{\sqrt{9,9}}\Big) \\
&= P\Big(\frac{S - M[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{8 - 10}{\sqrt{9,9}}\Big) = P\Big(\frac{S - M[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > -0,6356\Big) \\
&\approx \Phi(0,6356) \approx 0,73.
\end{aligned}$$