Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Appello: 16.4.2004

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Derivare le seguenti funzioni:
$$f(x) = 3x^2 - \sqrt[3]{x} - \frac{2}{2-x}, \qquad g(x) = \sin(1+x^2), \qquad h(x) = \frac{x - e^x}{x + e^x}.$$

(2) Determinare le seguenti primitive:
$$\int x^2 - x - 3\sqrt{x}\ dx, \qquad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx, \qquad \int (x+1)e^x\ dx.$$

(3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x-e^x}{x+e^x}$ nel punto di ascissa $x = 0$.

(4) Stabilire se le seguenti funzioni sono convesse:
$$f(x) = x^2 e^x, \qquad g(x) = (x^2 - 1)e^x.$$

(5) Sullo spazio campionario $\Omega = [0, 1]$ è definita la densità di probabilità $f(x) = 3x^2$. Calcolarne la media μ e la varianza σ^2.

(6) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una normale di media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 9$. Calcolare le **due** probabilità seguenti: $P(X \geq 0)$ e $P(X \leq 2)$.

(7) Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti, sapendo che $p(A) = 1/2$, $p(B) = 1/3$ ed $p(A \cup B) = 2/3$.

(8) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y indipendenti la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X \backslash Y$	-2	3
1	1/6	
4		

Sapendo che $p(Y = -2) = 1/3$, determinare il valore delle altre probabilità congiunte. Calcolare poi $M[X]$, $M[Y]$, Var$[X]$, Var$[Y]$ e Var$[X + Y]$.

(9) Un test per l'individuazione di un dato enzima è affidabile al 98%, ovvero la probabilità che esso produca una segnalazione errata è 2/100. Qual è la probabilità che impiegando questo test su 1000 campioni si ottengano **più di** 22 segnalazioni errate?

1. Soluzioni

(1)

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{(2-x)^2},$$
$$g'(x) = 2x\cos(1+x^2),$$
$$h'(x) = \frac{(1-e^x)(x+e^x) - (x-e^x)(1+e^x)}{(x+e^x)^2} = \frac{2(1-x)e^x}{(x+e^x)^2}.$$

(2)

$$\int x^2 - x - 3\sqrt{x}\ dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x^3} + c.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx$ per sostituzione: $\sqrt{x} = \gamma$, da cui $x = \gamma^2$ e $dx = 2\gamma d\gamma$, quindi

$$= \int \frac{2\gamma}{1+\gamma}\ d\gamma = \int 2 - \frac{2}{1+\gamma}\ d\gamma = 2\gamma - 2\log|1+\gamma| + c = 2\sqrt{x} - 2\log(1+\sqrt{x}) + c.$$

$$\int (x+1)e^x\ dx = (x+1)e^x - \int e^x\ dx = (x+1)e^x - e^x + c = xe^x + c.$$

(3) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 0 è:

$$y = f(0) + f'(0)(x-0).$$

Dato che $f'(x) = \frac{2(1-x)e^x}{(x+e^x)^2}$, ne segue che

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 2,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = -1 + 2(x-0), \quad \text{ovvero} \quad y = 2x - 1.$$

(4) Trattandosi di funzioni derivabili ad ogni ordine, potremo ottenere la risposta studiando il segno delle loro derivate seconde. Abbiamo:

$$f(x) = x^2e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (2x+x^2)e^x \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = (2+4x+x^2)e^x.$$

Dato che $f''(x)$ cambia segno ($f''(0) = 2$, $f''(-1) = -1/e$), la funzione f **non è convessa**.

$$g(x) = (x^2-1)e^x \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = (2x+x^2-1)e^x \quad \Longrightarrow \quad g''(x) = (1+4x+x^2)e^x.$$

Dato che $g''(x)$ cambia segno ($g''(0) = 1$, $g''(-1) = -2/e$), la funzione g **non è convessa**.

(5) Si tratta semplicemente di calcolare due integrali. Infatti, dalla definizione di media si ha che

$$\mu = \int_\Omega xf(x)\ dx = \int_0^1 3x^3\ dx = \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Analogamente, per la varianza si ha:

$$\sigma^2 = \int_\Omega (x-\mu)^2 f(x)\ dx = \int_0^1 (x - \tfrac{3}{4})^2 3x^2\ dx = 3\int_0^1 (x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{16})x^2\ dx$$
$$= 3\int_0^1 x^4 - \tfrac{3}{2}x^3 + \tfrac{9}{16}x^2\ dx = 3\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16}\Big]_0^1$$
$$= 3\Big(\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}\Big) = \frac{3}{80}.$$

(6) Ricordiamo che se X è distribuita come una normale, allora $(X-\mu)/\sqrt{\sigma^2}$ è distribuita come una normale standard. Di conseguenza:

$$\begin{aligned}P(X\geq 0) &= P(X-\mu\geq -1) = P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\geq \frac{-1}{\sqrt{9}}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\geq -0,333\cdots\right)\\ &= 1-\Phi(-0,333\cdots) = \Phi(0,333\cdots) = 0,6293\cdots\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}P(X\leq 2) &= P(X-\mu\leq 2-1) = P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\leq \frac{2-1}{\sqrt{9}}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\leq 0,333\cdots\right)\\ &= \Phi(0,333\cdots) = 0,6293\cdots.\end{aligned}$$

(7) Ricordiamo che due eventi A e B sono detti indipendenti se e solo se $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$. Si tratta dunque di stabilire nel caso in esame questa uguaglianza è soddisfatta. Dalla relazione $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$, abbiamo

$$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{6}.$$

Dato che $p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, possiamo affermare che gli eventi dati **sono indipendenti**.

(8) I dati forniti dal testo sono i seguenti:

$X\backslash Y$	-2	3	
1	1/6		
4			
	1/3		

Poiché per ipotesi X ed Y sono indipendenti, abbiamo che $p(X=1)\cdot p(Y=-2)=p(X=1,Y=-2)$, da cui ricaviamo $p(X=1)$:

$X\backslash Y$	-2	3	
1	1/6		1/2
4			
	1/3		

Dal fatto che $p(Y=-2)=p(X=1,Y=-2)+p(X=4,Y=-2)$, ricaviamo $p(X=4,Y=-2)$:

$X\backslash Y$	-2	3	
1	1/6		1/2
4	1/6		
	1/3		

ed analogamente ricaviamo $p(X=1,Y=3)$:

$X\backslash Y$	-2	3	
1	1/6	1/3	1/2
4	1/6		
	1/3		

Dato che la somma di tutte le probabilità congiunte deve essere 1, otteniamo che

$X\backslash Y$	-2	3	
1	1/6	1/3	1/2
4	1/6	1/3	1/2
	1/3	2/3	

Possiamo ora calcolare quanto viene richiesto:

$$\begin{aligned}
M[X] &= 1 \cdot p(X = 1) + 4 \cdot p(X = 4) = 1 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/2 = 5/2,\\
M[Y] &= -2 \cdot p(Y = 1) + 3 \cdot p(Y = 3) = -2 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2/3 = 4/3,\\
\mathrm{Var}[X] &= (1 - M[X])^2 \cdot p(X = 1) + (4 - M[X])^2 \cdot p(X = 4)\\
&= (1 - 5/2)^2 \cdot 1/2 + (4 - 5/2)^2 \cdot 1/2 = 9/4,\\
\mathrm{Var}[Y] &= (-2 - M[Y])^2 \cdot p(Y = 1) + (3 - M[Y])^2 \cdot p(Y = 3)\\
&= (-2 - 4/3)^2 \cdot 1/3 + (3 - 4/3)^2 \cdot 2/3 = 50/9.
\end{aligned}$$

Per il calcolo di $\mathrm{Var}[X + Y]$ osserviamo che essendo X ed Y indipendenti, esse risultano anche non-correlate e quindi

$$\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 9/4 + 50/9 = 281/36.$$

(9) Numeriamo gli $N = 1000$ campioni con l'indice n che va da 1 ad N. Sia X_n la variabile aleatoria che assume il valore 1 se il campione n-esimo ha dato una segnalazione errata, altrimenti il suo valore è zero. La variabile aleatoria che dà il numero totale di segnalazioni errate è dunque

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n.$$

Ciò che si chiede di calcolare è $P(S \geq 23)$. Sappiamo che S è distribuito come una binomiale, quindi

$$P(S \geq 23) = \sum_{n=23}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \sum_{n=23}^{1000} \binom{1000}{n} (2/100)^n (98/100)^{1000-n}.$$

Nonostante questa formula sia corretta, essa non è di facile esecuzione. Fortunatamente, il Teorema del Limite Centrale (o meglio, il suo corollario), fornisce un metodo alternativo per ottenere il valore approssimato di questa somma. In base a questo teorema, se media e varianza di S sono maggiori di 5, è lecito calcolare la probabilità di S come se S fosse distribuito come una normale (con ugual media e varianza), sapendo di commettere in tal modo un errore numerico inferiore a 10^{-2}. Dato che

$$M[S] = N \cdot p = 1000 \cdot 2/100 = 20, \quad \mathrm{Var}[S] = N \cdot p \cdot (1-p) = 1000 \cdot 2/100 \cdot 98/100 = 19,6,$$

le ipotesi sono soddisfatte e quindi

$$\begin{aligned}
P(S \geq 23) &= P(S - M[S] \geq 23 - 20) = P(\frac{S - M[S]}{\mathrm{Var}[S]} \geq \frac{3}{\sqrt{19,6}}) = P(\frac{S - M[S]}{\mathrm{Var}[S]} \geq 0,68)\\
&= 1 - \Phi(0,68) = 1 - 0,7517 = 0,2493 \approx 25\%.
\end{aligned}$$