

I seguenti quesiti ed il relativo svolgimento sono coperti dal diritto d'autore, pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale senza autorizzazione esplicita e scritta dell'autore. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.

Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Appello: 21.9.2004

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

- (1) Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti, sapendo che $p(A) = 1/3$, $p(A \cap B) = 1/12$ ed $p(A|B) = 1/4$.

- (2) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \log(x^2 - x), \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{2x + 1}.$$

- (3) Stabilire se le seguenti funzioni sono monòtone:

$$f(x) = 4x^3 + 2x - 9, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 + x + x^2}.$$

- (4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ nel punto di ascissa $x = 3$.

- (5) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una **binomiale** di parametri $N = 5$ e $p = 1/3$. Calcolare la probabilità $P(X < 3)$.

- (6) Sullo spazio campionario $\Omega = [0, 1]$ è definita la densità di probabilità $f(x) = \frac{3}{4}(x^2 + 1)$. Calcolarne la media μ e la varianza σ^2 .

- (7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y indipendenti la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X \backslash Y$	1	2	3
-1		1/6	1/12
1			

Sapendo che $p(X = -1) = 1/3$, determinare il valore delle altre probabilità congiunte. Calcolare poi $M[X]$, $M[Y]$, $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$ e $\text{Var}[X + Y]$.

- (8) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{4}{x^3} + 2x + \sqrt{x} \, dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, \quad \int \frac{2}{1+2x} \, dx.$$

- (9) La misura di un certo parametro sperimentale viene ripetuta sei volte, ottenendo i seguenti valori:

0,2 1,2 0,7 0,5 1,1 1,3.

Determinare la loro media e varianza.

1. SOLUZIONI

- (1) Ricordiamo che due eventi A e B sono detti indipendenti se e solo se $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Si tratta dunque di stabilire nel caso in esame questa uguaglianza è soddisfatta. Dalla relazione $p(A|B) = p(A \cap B)/p(B)$, abbiamo

$$p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A|B)} = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}.$$

Dato che $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{12} = p(A \cap B)$, possiamo affermare che gli eventi dati **non sono indipendenti**.

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x-1}{x^2-x}, \\ g'(x) &= \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}, \\ h'(x) &= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}. \end{aligned}$$

- (3) Trattandosi di funzioni derivabili ad ogni ordine, potremo ottenere la risposta studiando il segno delle loro derivate prime. Abbiamo:

$$f(x) = 4x^3 + 2x - 9 \implies f'(x) = 12x^2 + 2.$$

Essendo somma di quantità positive, scopriamo subito che $f'(x) > 0$ per ogni x , ne segue che la funzione f è **strettamente crescente**.

$$g(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2} \implies g'(x) = \frac{1+2x}{3\sqrt[3]{(1+x+x^2)^2}}.$$

Il denominatore è sicuramente strettamente positivo, quindi il segno di $g'(x)$ dipende dal segno del solo suo numeratore. Essendo $g(0) > 0$ e $g(-1) < 0$ ne segue che la funzione g **non è monotona**.

- (4) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 3 è:

$$y = f(3) + f'(3)(x-3).$$

Dato che $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$, ne segue che

$$f(3) = 3, \quad f'(3) = 1/3,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = 3 + \frac{1}{3}(x-3), \quad \text{ovvero} \quad y = \frac{x}{3} + 2.$$

- (5) Date le informazioni contenute nel testo, X può assumere i valori 0, 1, 2, 3, 4, 5. La probabilità con cui X assume uno di questi valori è data da $p(X = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$. Nel caso in esame abbiamo

$$\begin{aligned} p(X < 3) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{2^5}{3^5} + 5 \cdot \frac{2^4}{3^5} + 10 \cdot \frac{2^3}{3^5} \\ &= \frac{2^5 + 5 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3}{3^5} = \frac{32 + 80 + 80}{243} = \frac{192}{243} \approx 79\%. \end{aligned}$$

- (6) Si tratta semplicemente di calcolare due integrali. Infatti, dalla definizione di media si ha che

$$\mu = \int_{\Omega} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{4}(x^2 + 1) dx = \frac{3}{4} \int_0^1 x^3 + x dx = \frac{3}{4} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{9}{16}.$$

Analogamente, per la varianza si ha:

$$\sigma^2 = \int_{\Omega} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{9}{16} \right)^2 \frac{3}{4}(x^2 + 1) dx = \frac{3}{4} \int_0^1 \left(x^2 - \frac{9x}{8} + \frac{81}{256} \right) (x^2 + 1) dx$$

La formula precedente consente di calcolare direttamente σ^2 ma l'integrale che vi compare non è di agevole calcolo. Possiamo tuttavia procedere in un altro modo, osservando che $\sigma^2 = M[X^2] - \mu^2$. In questo abbiamo:

$$\begin{aligned} M[X^2] &= \int_{\Omega} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(x^2 + 1) dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^1 x^4 + x^2 dx = \frac{3}{4} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{4} \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

e così

$$\sigma^2 = M[X^2] - \mu^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{9}{16} \right)^2 = \frac{107}{1280} \approx 8.3\%.$$

- (7) I dati forniti dal testo sono i seguenti:

$X \backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1				

Poiché per ipotesi X ed Y sono indipendenti, abbiamo che $p(X = -1) \cdot p(Y = 2) = p(X = -1, Y = 2)$, da cui ricaviamo $p(Y = 2)$. Analogamente, $p(X = -1) \cdot p(Y = 3) = p(X = -1, Y = 3)$, che consente di ricavare $p(Y = 3)$:

$X \backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1				
		1/2	1/4	

Dal fatto che $p(Y = 2) = p(X = -1, Y = 2) + p(X = 1, Y = 2)$, ricaviamo $p(X = 1, Y = 2)$. Analogamente ricaviamo $p(X = 1, Y = 3)$ dal fatto che $p(Y = 3) = p(X = -1, Y = 3) + p(X = 1, Y = 3)$:

$X \backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1		1/3	1/6	
		1/2	1/4	

Dal fatto che le probabilità marginali di X devono avere per somma 1, ovvero dalla relazione $p(X = -1) + p(X = 1) = 1$, ricaviamo $p(X = 1)$:

$X \backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1		1/3	1/6	2/3
		1/2	1/4	

e dal fatto che le probabilità marginali di Y devono avere per somma 1, ovvero dalla relazione $p(Y = 1) + p(Y = 2) + p(Y = 3) = 1$, ricaviamo $p(Y = 1)$:

$X \backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1		1/3	1/6	2/3
	1/4	1/2	1/4	

Infine, dalla indipendenza di X ed Y otteniamo

$X \backslash Y$	1	2	3	
-1	1/12	1/6	1/12	1/3
1	1/6	1/3	1/6	2/3
	1/4	1/2	1/4	

Possiamo ora calcolare quanto viene richiesto:

$$M[X] = -1 \cdot p(X = -1) + 1 \cdot p(X = 1) = -1 \cdot 1/3 + 2/3 = 1/3,$$

$$M[Y] = 1 \cdot p(Y = 1) + 2 \cdot p(Y = 2) + 3 \cdot p(Y = 3) = 1/4 + 2 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/4 = 2,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= (-1 - M[X])^2 \cdot p(X = -1) + (1 - M[X])^2 \cdot p(X = 1) \\ &= (-1 - 1/3)^2 \cdot 1/3 + (1 - 1/3)^2 \cdot 2/3 = 24/27, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= (1 - M[Y])^2 \cdot p(Y = 1) + (2 - M[Y])^2 \cdot p(Y = 2) + (3 - M[Y])^2 \cdot p(Y = 3) \\ &= (1 - 2)^2 \cdot 1/4 + (2 - 2)^2 \cdot 1/2 + (3 - 2)^2 \cdot 1/4 = 1/2. \end{aligned}$$

Per il calcolo di $\text{Var}[X + Y]$ osserviamo che essendo X ed Y indipendenti, esse risultano anche non-correlate e quindi

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] = 24/27 + 1/2 = 75/54.$$

(8)

$$\int \frac{4}{x^3} + 2x + \sqrt{x} \, dx = \frac{4x^{-3+1}}{-3+1} + x^2 + \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + c = -\frac{2}{x^2} + x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \quad \text{per sostituzione: } \sqrt{1+x} = \gamma, \text{ da cui } x = \gamma^2 - 1 \text{ e } dx = 2\gamma d\gamma, \text{ quindi} \\ &= \int \frac{1}{\gamma} \cdot 2\gamma \, d\gamma = \int 2 \, d\gamma = 2\gamma + c = 2\sqrt{1+x} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{2}{1+2x} \, dx \quad \text{per sostituzione: } 1+2x = \gamma, \text{ da cui } x = (\gamma-1)/2 \text{ e } dx = d\gamma/2, \text{ quindi} \\ &= \int \frac{d\gamma}{\gamma} = \log|\gamma| + c = \log|1+2x| + c. \end{aligned}$$

(9) Le misure fornite vanno assunte equiprobabili (poiché nel testo non si dice nulla riguardo una eventuale loro non uniformità). Dato che le misure sono sei a ciascuna compete quindi una probabilità pari ad $1/6$. La media della distribuzione è quindi pari a:

$$\mu = \sum_{a \in \Omega} a \cdot p(a) = 0,2 \cdot \frac{1}{6} + 1,2 \cdot \frac{1}{6} + 0,7 \cdot \frac{1}{6} + 0,5 \cdot \frac{1}{6} + 1,1 \cdot \frac{1}{6} + 1,3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0.83.$$

La varianza è invece

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{a \in \Omega} (a - \mu)^2 \cdot p(a) \\ &= (0,2 - \frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,2 - \frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (0,7 - \frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (0,5 - \frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,1 - \frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,3 - \frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\approx 0.16. \end{aligned}$$