Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Appello: 11.11.2004

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Stabilire se le seguenti funzioni sono monòtone:
$$f(x) = 4x^5 + 2x - 9, \qquad g(x) = \sqrt[3]{1 - x + x^2}.$$

(2) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ nel punto di ascissa $x = 3$.

(3) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una **binomiale** di parametri $N = 5$ e $p = 1/3$. Calcolare la probabilità $P(X > 3)$.

(4) Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti, sapendo che $p(A) = 1/4$, $p(A \cap B) = 1/6$ ed $p(A|B) = 1/4$.

(5) Derivare le seguenti funzioni:
$$f(x) = \log(x^2 - 2x), \qquad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}, \qquad h(x) = \sqrt[3]{2x - 1}.$$

(6) Sullo spazio campionario $\Omega = [0, 1]$ è definita la densità di probabilità $f(x) = \frac{3}{4}(x^2 + 1)$. Calcolarne la media μ e la varianza σ^2.

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y indipendenti la cui tabella di probabilità è la seguente:

$X\backslash Y$	1	2	3
-1		1/6	1/12
1			

Sapendo che $p(X = -1) = 1/3$, determinare il valore delle altre probabilità congiunte. Calcolare poi $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$ e $\mathrm{Var}[X + Y]$.

(8) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:
$$\int \frac{4}{x^3} - 2x - \sqrt{x}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x}}, \qquad \int \frac{2}{2 + 3x}\, dx.$$

(9) La misura di un certo parametro sperimentale viene ripetuta sei volte, ottenendo i seguenti valori:
$$0,6 \quad 1,2 \quad 0,9 \quad 0,5 \quad 1,1 \quad 1,3.$$
Determinare la loro media e varianza.

1. Soluzioni

(1) Trattandosi di funzioni derivabili ad ogni ordine, potremo ottenere la risposta studiando il segno delle loro derivate prime. Abbiamo:

$$f(x) = 4x^5 + 2x - 9 \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 20x^4 + 2.$$

Essendo somma di quantità positive, scopriamo subito che $f'(x) > 0$ per ogni x, ne segue che la funzione f **è strettamente crescente**.

$$g(x) = \sqrt[3]{1 - x + x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad g'(x) = \frac{-1 + 2x}{3\sqrt[3]{(1 - x + x^2)^2}}.$$

Il denominatore è sicuramente strettamente positivo, quindi il segno di $g'(x)$ dipende dal segno del solo suo numeratore. Essendo $g(0) < 0$ e $g(1) > 0$ ne segue che la funzione g **non è monotona**.

(2) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 3 è:

$$y = f(3) + f'(3)(x - 3).$$

Dato che $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$, ne segue che

$$f(3) = 5, \quad f'(3) = 3/5,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = 5 + \tfrac{3}{5}(x - 3), \quad \text{ovvero} \quad y = \frac{3x}{5} + \frac{16}{5}.$$

(3) Date le informazioni contenute nel testo, X può assumere i valori $0, 1, 2, 3, 4, 5$. La probabilità con cui X assume uno di questi valori è data da $p(X = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$. Nel caso in esame abbiamo

$$\begin{aligned} p(X < 3) = p(X = 4) + p(X = 5) &= \binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &= 5 \cdot \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5} = \frac{11}{243} \approx 4,5\%. \end{aligned}$$

(4) Ricordiamo che due eventi A e B sono detti indipendenti se e solo se $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Si tratta dunque di stabilire nel caso in esame questa uguaglianza è soddisfatta. Dalla relazione $p(A|B) = p(A \cap B)/p(B)$, abbiamo

$$p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A|B)} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}.$$

Dato che $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} = p(A \cap B)$, possiamo affermare che gli eventi dati **sono indipendenti**.

(5)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}, \\ g'(x) &= \frac{(2x - 3)(x - 1) - (x^2 - 3x + 1)(1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2}, \\ h'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}}. \end{aligned}$$

(6) Si tratta semplicemente di calcolare due integrali. Infatti, dalla definizione di media si ha che

$$\mu = \int_\Omega x f(x)\ dx = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{4}(x^2+1)\ dx = \frac{3}{4}\int_0^1 x^3 + x\ dx = \frac{3}{4}\Big[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big]\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\Big[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Big] = \frac{9}{16}.$$

Analogamente, per la varianza si ha:

$$\sigma^2 = \int_\Omega (x-\mu)^2 f(x)\ dx = \int_0^1 \Big(x - \frac{9}{16}\Big)^2 \frac{3}{4}(x^2+1)\ dx = \frac{3}{4}\int_0^1 (x^2 - \frac{9x}{8} + \frac{81}{256})(x^2+1)\ dx$$

La formula precedente consente di calcolare direttamente σ^2 ma l'integrale che vi compare non è di agevole calcolo. Possiamo tuttavia procedere in un altro modo, osservando che $\sigma^2 = M[X^2] - \mu^2$. In questo abbiamo:

$$\begin{aligned} M[X^2] &= \int_\Omega x^2 f(x)\ dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(x^2+1)\ dx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^1 x^4 + x^2\ dx = \frac{3}{4}\Big[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\Big]\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\Big[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\Big] = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

e così

$$\sigma^2 = M[X^2] - \mu^2 = \frac{2}{5} - \big(\frac{9}{16}\big)^2 = \frac{107}{1280}.$$

(7) I dati forniti dal testo sono i seguenti:

$X\backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1				

Poiché per ipotesi X ed Y sono indipendenti, abbiamo che $p(X=-1)\cdot p(Y=2) = p(X=-1, Y=2)$, da cui ricaviamo $p(Y=2)$. Analogamente, $p(X=-1)\cdot p(Y=3) = p(X=-1, Y=3)$, che consente di ricavare $p(Y=3)$:

$X\backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1				
		1/2	1/4	

Dal fatto che $p(Y=2) = p(X=-1, Y=2) + p(X=1, Y=2)$, ricaviamo $p(X=1, Y=2)$. Analogamente ricaviamo $p(X=1, Y=3)$ dal fatto che $p(Y=3) = p(X=-1, Y=3) + p(X=1, Y=3)$:

$X\backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1		1/3	1/6	
		1/2	1/4	

Dal fatto che le probabilità marginali di X devono avere per somma 1, ovvero dalla relazione $p(X=-1) + p(X=1) = 1$, ricaviamo $p(X=1)$:

$X\backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1		1/3	1/6	2/3
		1/2	1/4	

e dal fatto che le probabilità marginali di Y devono avere per somma 1, ovvero dalla relazione $p(Y=1) + p(Y=2) + p(Y=3) = 1$, ricaviamo $p(Y=1)$:

$X\backslash Y$	1	2	3	
-1		1/6	1/12	1/3
1		1/3	1/6	2/3
	1/4	1/2	1/4	

Infine, dalla indipendenza di X ed Y otteniamo

$X\backslash Y$	1	2	3	
-1	1/12	1/6	1/12	1/3
1	1/6	1/3	1/6	2/3
	1/4	1/2	1/4	

Possiamo ora calcolare quanto viene richiesto:

$$M[X] = -1 \cdot p(X=-1) + 1 \cdot p(X=1) = -1 \cdot 1/3 + 2/3 = 1/3,$$
$$M[Y] = 1 \cdot p(Y=1) + 2 \cdot p(Y=2) + 3 \cdot p(Y=3) = 1/4 + 2 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/4 = 2,$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= (-1 - M[X])^2 \cdot p(X=-1) + (1 - M[X])^2 \cdot p(X=1)\\ &= (-1-1/3)^2 \cdot 1/3 + (1-1/3)^2 \cdot 2/3 = 24/27,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Y] &= (1 - M[Y])^2 \cdot p(Y=1) + (2 - M[Y])^2 \cdot p(Y=2) + (3 - M[Y])^2 \cdot p(Y=3)\\ &= (1-2)^2 \cdot 1/4 + (2-2)^2 \cdot 1/2 + (3-2)^2 \cdot 1/4 = 1/2.\end{aligned}$$

Per il calcolo di $\mathrm{Var}[X+Y]$ osserviamo che essendo X ed Y indipendenti, esse risultano anche non-correlate e quindi

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 24/27 + 1/2 = 25/18.$$

(8)

$$\int \frac{4}{x^3} - 2x - \sqrt{x}\, dx = \frac{4x^{-3+1}}{-3+1} - x^2 - \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + c = -\frac{2}{x^2} - x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ per sostituzione: $\sqrt{1+x} = \gamma$, da cui $x = \gamma^2 - 1$ e $dx = 2\gamma d\gamma$, quindi

$$= \int \frac{1}{\gamma} \cdot 2\gamma\, d\gamma = \int 2\, d\gamma = 2\gamma + c = 2\sqrt{1+x} + c.$$

$\displaystyle\int \frac{2}{2+3x}\, dx$ per sostituzione: $2+3x = \gamma$, da cui $x = (\gamma-2)/3$ e $dx = d\gamma/3$, quindi

$$= \int \frac{2d\gamma}{3\gamma} = \frac{2}{3}\log|\gamma| + c = \frac{2}{3}\log|2+3x| + c.$$

(9) Le misure fornite vanno assunte equiprobabili (poiché nel testo non si dice nulla riguardo una eventuale loro non uniformità). Dato che le misure sono sei a ciascuna compete quindi una probabilità pari ad 1/6. La media della distribuzione è quindi pari a:

$$\mu = \sum_{a \in \Omega} a \cdot p(a) = 0,6 \cdot \frac{1}{6} + 1,2 \cdot \frac{1}{6} + 0,9 \cdot \frac{1}{6} + 0,5 \cdot \frac{1}{6} + 1,1 \cdot \frac{1}{6} + 1,3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5,6}{6} \approx 0.93.$$

La varianza è invece

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{a \in \Omega} (a-\mu)^2 \cdot p(a)\\ &= (0,6 - \frac{5,6}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,2 - \frac{5,6}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (0,9 - \frac{5,6}{6})^2 \cdot \frac{1}{6}\\ &\quad + (0,5 - \frac{5,6}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,1 - \frac{5,6}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,3 - \frac{5,6}{6})^2 \cdot \frac{1}{6}\\ &\approx 0,09.\end{aligned}$$