# Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

**G. Molteni**

## Appello: 31.5.2004

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Derivare le seguenti funzioni:
$$f(x) = \log(x + x^2), \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \qquad h(x) = \sqrt{x} + 5x^4 - 2x^6.$$

(2) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:
$$\int x - \tfrac{3}{x^2} + \sqrt[3]{x}\ dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\ dx, \qquad \int x\sin(x)\ dx.$$

(3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

(4) Stabilire se le seguenti funzioni sono convesse:
$$f(x) = x^4 + x^2 + 1, \qquad g(x) = 3x^5 + 5x^3 + 1.$$

(5) Sullo spazio campionario $\Omega = [-1, 1]$ è definita la densità di probabilità $f(x) = (1+x)/2$. Calcolarne la media $\mu$ e la varianza $\sigma^2$.

(6) I valori di una variabile aleatoria $X$ sono distribuiti come una **binomiale** di media $\mu = 0,8$ e varianza $\sigma^2 = 0,64$. Calcolare la probabilità $P(X \geq 3)$.

(7) Stabilire se gli eventi $A$ e $B$ sono indipendenti, sapendo che $p(A) = 1/5$, $p(B) = 1/4$ ed $p(A \cup B) = 2/5$.

(8) La misura di un certo parametro sperimentale viene ripetuta sei volte, ottenendo i seguenti valori:
$$1,2 \quad 1,4 \quad 1,7 \quad 1,1 \quad 1,2 \quad 1,3.$$
Determinare la loro media e varianza.

(9) Un gioco d'azzardo consiste nel lancio di un dato a 6 facce. Il giocatore vince 3 Euro quando esce la faccia numero 5 o la 6, altrimenti perde 2 Euro. Qual è la probabilità che dopo 5 lanci il giocatore abbia vinto almeno 10 Euro?

## 1. Soluzioni

(1)

$$f'(x) = \frac{1+2x}{x+x^2},$$
$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$
$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 20x^3 - 12x^5.$$

(2)

$$\int x - \tfrac{3}{x^2} + \sqrt[3]{x}\ dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + c = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\ dx$ per sostituzione: $\sqrt{1+x} = \gamma$, da cui $x = \gamma^2 - 1$ e $dx = 2\gamma d\gamma$, quindi

$$= \int \frac{2\gamma}{\gamma}\ d\gamma = \int 2\ d\gamma = 2\gamma + c = 2\sqrt{1+x} + c.$$

$$\int x\sin(x)\ dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c.$$

(3) L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 1 è:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1).$$

Dato che $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ne segue che

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 5/2,$$

e così la retta cercata ha equazione

$$y = 0 + \tfrac{5}{2}(x-1), \quad \text{ovvero} \quad y = \tfrac{5x}{2} - \tfrac{5}{2}.$$

(4) Trattandosi di funzioni derivabili ad ogni ordine, potremo ottenere la risposta studiando il segno delle loro derivate seconde. Abbiamo:

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1 \implies f'(x) = 4x^3 + 2x \implies f''(x) = 12x^2 + 2$$

Dato che $f''(x)$ è sempre positiva la funzione $f$ **è convessa**.

$$g(x) = 3x^5 + 5x^3 + 1 \implies g'(x) = 15x^4 + 15x^2 \implies g''(x) = 60x^3 + 30x = 30x(2x^2+1)$$

Dato che $g''(x)$ cambia segno ($g''(-1) = -90$, $g''(1) = 90$), la funzione $g$ **non è convessa**.

(5) Si tratta semplicemente di calcolare due integrali. Infatti, dalla definizione di media si ha che

$$\mu = \int_\Omega x f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1+x}{2}\ dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Analogamente, per la varianza si ha:

$$\sigma^2 = \int_\Omega (x-\mu)^2 f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} (x - \tfrac{1}{3})^2 \frac{1+x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9})(1+x)\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^3 + \frac{x^2}{3} - \frac{5x}{9} + \frac{1}{9})\ dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{5x^2}{18} + \frac{x}{9}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{9}.$$

(6) La distribuzione binomiale ha due parametri, $N$ e $p$. Rispetto a questi parametri la media $\mu = Np$ e la varianza $\sigma^2 = Np(1-p)$. Nel caso in esame, quindi, disponiamo delle seguenti informazioni:

$$\begin{cases} \mu = Np = 0,8 \\ \sigma^2 = Np(1-p) = 0,64. \end{cases}$$

Dividendo queste relazioni scopriamo che:

$$1 - p = \frac{Np(1-p)}{Np} = \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{0,64}{0,8} = 0,8 \qquad \Longrightarrow \qquad p = 0,2.$$

Di conseguenza

$$N = \frac{Np}{p} = \frac{\mu}{p} = \frac{0,8}{0,2} = 4.$$

Possiamo dunque concludere osservando che

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) &= \binom{4}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^1 + \binom{4}{3} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^0 \\ &= 4 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^1 + 0,2^4 = 0,0272 \approx 2,7\%. \end{aligned}$$

(7) Ricordiamo che due eventi $A$ e $B$ sono detti indipendenti se e solo se $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Si tratta dunque di stabilire nel caso in esame questa uguaglianza è soddisfatta. Dalla relazione $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, abbiamo

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{5} = \tfrac{1}{20}.$$

Dato che $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, possiamo affermare che gli eventi dati **sono indipendenti**.

(8) Le misure fornite vanno assunte equiprobabili (poiché nel testo non si dice nulla riguardo una eventuale loro non uniformità). Dato che le misure sono sei a ciascuna compete quindi una probabilità pari ad 1/6. La media della distribuzione è quindi pari a:

$$\mu = \sum_{a \in \Omega} a \cdot p(a) = 1,2 \cdot \frac{1}{6} + 1,4 \cdot \frac{1}{6} + 1,7 \cdot \frac{1}{6} + 1,1 \cdot \frac{1}{6} + 1,2 \cdot \frac{1}{6} + 1,3 \cdot \frac{1}{6} \approx 1,31.$$

La varianza è invece

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{a \in \Omega} (a - \mu)^2 \cdot p(a) \\ &= (1,2 - 1,31)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,4 - 1,31)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,7 - 1,31)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\qquad + (1,1 - 1,31)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,2 - 1,31)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,3 - 1,31)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\approx 0,03. \end{aligned}$$

(9) Le sei facce del dado sono assunte equiprobabili, quindi ad ogni lancio il giocatore ha una probabilità $p = 2/6 = 1/3$ di vincere e quindi una probabilità $1 - p = 4/6 = 2/3$ di perdere. Siano $X_1, \cdots, X_5$ le variabili aleatorie che forniscono il risultato di ognuna delle 5 partite. Sia $S$ la variabile aleatoria che fornisce il numero totale di vittorie su 5 partite. Sappiamo che $S$ è distribuita come una binomiale con parametri $N = 5$ e $p = 1/3$. La vincita totale del giocatore è data da:

$$\text{vincita } = 3 \cdot \text{ numero partite vinte} - 2 \cdot \text{ numero partite perse} = 3 \cdot S - 2 \cdot (5 - S) = 5 \cdot S - 10.$$

La probabilità cercata è quindi pari a:

$$\begin{aligned}
P(\text{vincita } \geq 10) &= P(5S - 10 \geq 10) = P(S \geq 4) = P(S = 4) + P(S = 5) \\
&= \binom{5}{4} \cdot \big(\frac{1}{3}\big)^4 \big(\frac{2}{3}\big)^1 + \binom{5}{5} \cdot \big(\frac{1}{3}\big)^5 \big(\frac{2}{3}\big)^0 \\
&= 5 \cdot \big(\frac{1}{3}\big)^4 \cdot \frac{2}{3} + \big(\frac{1}{3}\big)^5 = \frac{11}{243} \approx 4,5\%.
\end{aligned}$$