Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Test alla prima prova

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x^3}{x^4+1},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt[3]{x}+\sin x}{\sqrt[4]{x}+\cos x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2+x^3}.$$

(2) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x)=x^2+\frac{3}{x+1},\qquad g(x)=e^{x^2+x}-x,\qquad h(x)=\frac{x^3-3\log x}{x+x^2}.$$

(3) La funzione $f(x)=x^5+x$ è monotòna? E' strettamente monotòna?

(4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^2-3x^4+1$ nel punto di ascissa $x=1$.

(5) Stabilire se la funzione $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ ammette un minimo assoluto e calcolarlo.

(6) Il candidato risponda alle seguenti domande:

La funzione $f(x)=2x+\sin x$ è monotòna?
La funzione $g(x)=x+2\sin x$ è monotòna?
La funzione $h(x)=x^2+\sin x$ è convessa?

(7) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^2 x^3-2x+1\,dx,\qquad \int_0^1\frac{x}{x+1}\,dx,\qquad \int_{-1}^1 x\sin(x)\,dx.$$

(8) Determinare quali tra gli integrali seguenti è un integrale convergente:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x+1}{2x+3}\,dx,\qquad \int_0^{+\infty}\frac{x+1}{2x^2+3}\,dx,\qquad \int_4^{+\infty}\frac{x+1}{2x^2+3x^4}\,dx.$$

Soluzioni

(1) Nello stesso ordine: 0, $-\infty$, 1.

(2) Nello stesso ordine:

$f'(x) = 2x - \dfrac{3}{(x+1)^2}$,

$g'(x) = (2x+1)e^{x^2+x} - 1$,

$$h'(x) = \frac{(3x^2 - \frac{3}{x})(x+x^2) - (x^3 + 3\log x)(1+2x)}{(x+x^2)^2} = \frac{x^4 + 2x^3 - 3x - 3 - (1+2x)\log x}{(x+x^2)^2}.$$

(3) Sì. Sì (perché la sua derivata è strettamente positiva).

(4) La funzione $f(x)$ è un polinomio quindi è derivabile in ogni punto, in particolare la retta tangente esiste certamente ed è data dalla formula

$$y = f(1) + f'(1)(x-1).$$

Dato che $f(1) = -1$ e che $f'(x) = 2x - 12x^3$ da cui segue che $f'(1) = -10$, la retta tangente soddisfa l'equazione

$$y = -1 - 10(x-1), \quad \text{ovvero} \quad y = -10x + 9.$$

(5) La funzione data ammette tutto l'asse reale come dominio, dove, essendo razionale, ammette derivate di ogni ordine. In particolare essa è continua su tutto il suo dominio, e dato che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{ed} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

sono entrambi finiti (di fatto entrambi valgono 1), ne segue che essa è sicuramente limitata. La sua derivata è

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

che quindi è positiva quando $x > 0$ e negativa quando $x < 0$. Dal teorema di monotonia segue che $f(x)$ ha un minimo **assoluto** nel punto $x = 0$. Il valore minimo è quindi $f(0) = -1$.

(6) Osserviamo che tutte le funzioni date ammettono derivate di ogni ordine su $\mathbb{R}$. E' quindi possibile ricavare la monotonia e la convessità dal segno delle derivate prima e seconda, rispettivamente. Abbiamo:

$$f'(x) = 2 + \cos x, \quad g'(x) = 1 + 2\cos x, \quad h'(x) = 2x + \cos x, \quad h''(x) = 2 - \sin x.$$

Osserviamo che $f'(x) = 2 + \cos x \geq 1 > 0$ (poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$ per ogni x) quindi $f'(x) > 0$ sempre, $\implies f(x)$ è strettamente crescente.

Osserviamo che $g'(0) = 3 > 0$ mentre $g'(\pi) = -1 < 0$ quindi $g'(x)$ cambia segno $\implies$ $f(x)$ non è monotòna.

Osserviamo che $h''(x) \geq 1 > 0$ (poiché $-1 \leq \sin x \leq 1$ per ogni x) quindi $h''(x)$ è sempre positiva $\implies h(x)$ è convessa.

(7) Nello stesso ordine: $\frac{7}{4}$, $1 - \log 2$, $2(\sin 1 - \cos 1)$.

(8) Nello stesso ordine: NO, NO, SI.