Il/la sig. . . . . autorizza la Facoltà di Farmacia a far comparire il proprio nominativo negli elenchi che verranno approntati per la divulgazione sulle pagine web di facoltà del risultato conseguito con il presente elaborato.

Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Appello: 27.6.2007

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x+5}, \qquad g(x) = \frac{4}{x^3} - 2x^3 + 4\sqrt{x}, \qquad h(x) = \sqrt{1-2x+x^3}.$$

(2) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2}(\sqrt{x}+2)\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{dx}{3x-2}, \qquad \int_0^\pi (3\sin(3x) + 2\cos(2x))\,dx.$$

(3) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = -2$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = 3x - 1/x^2$.

(4) Determinare il valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x) := c(x-1)^2$ risulti essere una densità di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = [-1, 1]$. Successivamente calcolare la media μ e la varianza σ^2 della densità trovata.

(5) Siano A e B due eventi tali che $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A \cap B) = 0,2$ e $p(A^c|B) = 0.7$. Calcolare $p(A)$ e $p(B)$; successivamente stabilire se A e B sono indipendenti.

(6) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una normale di media $\mu = 5$ e varianza $\sigma^2 = 9$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 4), \quad P(X \leq 7) \quad \text{e infine} \quad P(2 \leq X \leq 9).$$

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le probabilità congiunte secondo il seguente schema:

$X\backslash Y$	1	2	
2	1/4	1/8	
3	1/8	1/2	

Calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Cov}[X, Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $M[XY]$ e $M[X^2+Y^2]$. X ed Y sono indipendenti? Sono correlate?

(8) Il medesimo esperimento è condotto da due laboratori diversi, che indichiamo con A e con B, i quali hanno a disposizione strumentazioni diverse. Il laboratorio A ottiene la seguente serie di misure:

2.4 2.6 1.9 2.9 3.0

mentre le misure ottenute da B sono:

2.2 2.5 2.5 2.7 2.6

Calcolare media e varianza delle misure di ciascun laboratorio. Quale laboratorio ha ottenuto misurazioni più significative?

Soluzioni

(1) $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 10x - 2}{(2x+5)^2}$,

$g'(x) = \dfrac{-12}{x^4} - 6x^2 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$,

$h'(x) = \dfrac{-2 + 3x^2}{2\sqrt{1 - 2x + x^3}}$.

(2) (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}(\sqrt{x} + 2)\, dx = \int \left(x^{-3/2} + 2x^{-2}\right)\, dx = -2x^{-1/2} - 2x^{-1}$

quindi $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}(\sqrt{x} + 2)\, dx = [-2x^{-1/2} - 2x^{-1}]\Big|_1^4 = 5/2$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\log|3x-2|$

quindi $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\log|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{\log 4}{3}$

(c) $\displaystyle\int (3\sin(3x) + 2\cos(2x))\, dx = -\cos(3x) + 2\sin(2x)$

quindi $\displaystyle\int_0^\pi (3\sin(3x) + 2\cos(2x))\, dx = [-\cos(3x) + \sin(2x)]\Big|_0^\pi = 2$

(3) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame $f'(x) = 3 + \frac{2}{x^3}$ e così $f(-2) = -25/4$ ed $f'(-2) = 11/4$ per cui la retta cercata è $4y = 11x - 3$.

(4) Perché $f(x) = c(x-1)^2$ sia una densità in $[-1,1]$ è necessario che il suo integrale in $[-1,1]$ valga 1, quindi si ha

$$1 = \int_{-1}^1 c(x-1)^2\, dx = c\int_{-2}^0 u^2\, du = c\frac{u^3}{3}\Big|_{-2}^0 = c\frac{8}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{3}{8}.$$

Con tale valore di c la funzione risulta a valori non negativi e continua a tratti, quindi è effettivamente una densità in $[-1,1]$. La sua media è pari a

$$\mu = \int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 x\frac{3}{2}(x-1)^2\, dx = \frac{3}{8}\int_{-1}^1 x(x-1)^2\, dx$$
$$= \frac{3}{8}\int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 + x)\, dx = \frac{3}{8}(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{2}.$$

Varianza

$$\sigma^2 = \int_{-1}^1 x^2 f(x)dx - \mu^2 = \int_{-1}^1 \frac{3x^2}{2}(x-1)^2\, dx - 1/4$$
$$= \frac{3}{8}\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\, dx - 1/4 = \frac{3}{8}(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^1 - 1/4 = \frac{3}{20}.$$

(5) Dalla relazione $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ otteniamo che

$$p(A) + p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B) = 0.2 + 0.9 = 1.1$$

Inoltre, dalla definizione di probabilità condizionata discende che

$$\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A|B) = 1 - p(A^c|B) = 1 - 0.7 = 0.3$$

e quindi $p(B) = p(A \cap B)/0.3 = 0.2/0.3 = 2/3$ e così $p(A) = 1.1 - p(B) = 1.1 - 0.666\ldots \approx 0.433$.
Infine, visto che

$$p(A \cap B) = 0.2 \neq 0.4333 \cdot 0.6666 = p(A) \cdot p(B)$$

scopriamo che A e B **non** sono eventi indipendenti.

(6) $P(X \geq 4) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{4-5}{\sqrt{9}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq -1/3) = 1 - \Phi(-1/3)$
$= \Phi(1/3) \approx 0.629 = 62.9\%$,

$P(X \leq 7) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{7-5}{\sqrt{9}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 2/3) = \Phi(2/3) \approx 0.745 = 74.5\%$,

$P(2 \leq X \leq 9) = P(\frac{2-5}{\sqrt{9}} \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{9-5}{\sqrt{9}}) = P(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 4/3)$
$= \Phi(4/3) - \Phi(-1) = \Phi(4/3) - 1 + \Phi(1) \approx 0.749 = 74.9\%$.

(7) Le probabilità congiunte e marginali sono:

$X \backslash Y$	1	2	
2	1/4	1/8	3/8
3	1/8	1/2	5/8
	3/8	5/8	

e quindi

$$\begin{aligned}
M[X] &= 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{21}{8} \\
M[X^2] &= 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{57}{8} \\
M[Y] &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{13}{8} \\
M[Y^2] &= 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{23}{8} \\
M[XY] &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{8}.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X,Y] = M[XY] - M[X]M[Y] &= \frac{35}{8} - \frac{21}{8} \cdot \frac{13}{8} = \frac{7}{64} \\
\mathrm{Var}[X] = M[X^2] - (M[X])^2 &= \frac{57}{8} - (\frac{21}{8})^2 = \frac{15}{64} \\
\mathrm{Var}[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2 &= \frac{23}{8} - (\frac{13}{8})^2 = \frac{15}{64} \\
M[X^2 + Y^2] = M[X^2] + M[Y^2] &= \frac{57}{8} + \frac{23}{8} = 10.
\end{aligned}$$

Le variabili non sono né indipendenti né non correlate, poiché, $\mathrm{Cov}[X,Y] = 7/64 \neq 0$.

(8) In entrambi i casi si tratta di spazi campionari con cinque elementi, equiprobabili. Indichiamo com μ_A e σ_A^2 la media e la varianza per il laboratorio A, e con μ_B e σ_B^2 quelle

per il laboratorio A. Si ha:

$$\mu_A = \sum_{\alpha} p(\alpha) \cdot \alpha = \frac{1}{5}(2.4 + 2.6 + 1.9 + 2.9 + 3.0) = 2.56$$

$$\sigma_A^2 = \sum_{\alpha} p(\alpha) \cdot \alpha^2 - \mu_A^2 = \frac{1}{5}(2.4^2 + 2.6^2 + 1.9^2 + 2.9^2 + 3.0^2) - 2.56^2 = 0.1544$$

$$\mu_B = \sum_{\beta} p(\beta) \cdot \beta = \frac{1}{5}(2.2 + 2.5 + 2.5 + 2.7 + 2.6) = 2.5$$

$$\sigma_B^2 = \sum_{\beta} p(\beta) \cdot \beta^2 - \mu_B^2 = \frac{1}{5}(2.2^2 + 2.5^2 + 2.5^2 + 2.7^2 + 2.6^2) - 2.5^2 = 0.028.$$

I risultati più significativi sono quelli ottenuti da B poiché mostrano una varianza inferiore di quella dei dati di A.