Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Prima prova: versione A

Il candidato risolva **almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{\pi}^{2\pi} (x-3)\cos x\ dx, \qquad \int_0^1 (x^3 - x^2 + 2x - 1)\ dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^2+3x-1}{x+2}\ dx.$$

(2) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

(3) La funzione $f(x) = x + \dfrac{x}{1+x^2}$ è iniettiva?

(4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+x}{x+\sqrt{x^3}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3e^x+x^3}{x^4+e^x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-\sqrt{x}-\cos^2 x}{x\cos x - x^3}.$$

(5) Il candidato risponda alle seguenti domande:

La funzione $f(x) = \frac{x+x^3}{1+x^2}$ è strettamente monotòna?

La funzione $g(x) = e^{(x+x^2)}$ è convessa?

La funzione $h(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 4$ è convessa?

(6) Trovare lo sviluppo al secondo ordine nel punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x.$$

(7) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = 3x - x^5 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3}, \qquad g(x) = (x^2 - x + 3)\sin x, \qquad h(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^3+2x-1}.$$

Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Prima prova: versione B

Il candidato risolva **almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Il candidato risponda alle seguenti domande:

La funzione $h(x) = 1 + x - 2x^4 + x^3 - 2x^2$ è concava?

La funzione $g(x) = xe^{(x^2+1)}$ è monotòna?

La funzione $f(x) = \frac{x+x^3}{1+3x^2}$ è strettamente crescente?

(2) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{\pi}^{2\pi} (2x-4)\cos x \, dx, \qquad \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 3x - 2) \, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} \, dx.$$

(3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x + \sin^2 x}{\sin x - x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 3x^4 + 4e^{-x}}{x - 2x^4 + e^{-x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - x}{3x + \sqrt[3]{x}}.$$

(4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{2x^3+5}{5x^2+2}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

(5) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = x - 5x^2 + 2\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}, \qquad g(x) = \sin(x^2 + 2x - 1), \qquad h(x) = \frac{x - 2x^2}{x^2 - 2}.$$

(6) La funzione $f(x) = x + \dfrac{x}{3 + 4x^2}$ è iniettiva?

(7) Trovare lo sviluppo al secondo ordine nel punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x - 5)e^x.$$

Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Prima prova: versione C

Il candidato risolva **almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 (x^3 - 2x + 5)\ dx, \qquad \int_{\pi/2}^{\pi} (3x-4)\cos x\ dx, \qquad \int_0^1 \frac{2x^2+x-2}{x+2}\ dx.$$

(2) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(3x^2)}{x + 2\sqrt{x^5}}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x^4 - e^x}{x^4 + e^x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x + x^2 - \cos^2 x + \sqrt{x}}{5x^2 + 7\sin x}.$$

(3) La funzione $f(x) = x + \dfrac{x}{3+x^2}$ è iniettiva?

(4) Il candidato risponda alle seguenti domande:

La funzione $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 2$ è strettamente monotòna?

La funzione $g(x) = (1-x)e^{-x}$ è monotòna?

La funzione $h(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 6x + 7$ è convessa?

(5) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{3}{x^3} - 2\sqrt{x} + x - x^4, \qquad g(x) = \log(x^2 - 3x + 3), \qquad h(x) = \frac{x^3+2}{x^2+3x}.$$

(6) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{5x^3+2}{4x^2+3}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

(7) Trovare lo sviluppo al secondo ordine nel punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (3x^2 + x - 4)e^x.$$

Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Prima prova: versione D

Il candidato risolva **almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Il candidato risponda alle seguenti domande:

La funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$ è convessa?

La funzione $g(x) = (4 + x^2)e^{-x}$ è monotòna?

La funzione $h(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x^3 + 18x^2 + 5x - 2$ è convessa?

(2) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (x+2)\cos x \, dx, \qquad \int_0^1 (2x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) \, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} \, dx.$$

(3) La funzione $f(x) = x + \dfrac{x}{1 + 2x^2}$ è iniettiva?

(4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3\sin^2 x}{\sin x - 4x^2}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^4 + 2e^{-x}}{x - e^{-x} + x^4}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x\sin(x^2) - x}{3x - \sqrt[3]{x}}.$$

(5) Trovare lo sviluppo al secondo ordine nel punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (4x^2 - 5x + 4)e^x.$$

(6) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3+3}{5x^2-1}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

(7) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} - 2x^3 + \frac{4}{x^2}, \qquad g(x) = \log(x^3 - 3x + 4), \qquad h(x) = \frac{1 + x + x^2}{2x^3 + 3}.$$

Soluzioni versione A

(1) 2, $-1/12$, $3/2 - 3\log(3/2)$.

(2) $y = 1 + 1/2(x-1)$.

(3) Sì, infatti da $f(x) = f(y)$ segue che $x + \frac{x}{1+x^2} = y + \frac{y}{1+y^2}$ da cui, razionalizzando e raccogliendo segue che $(x-y)((xy)^2 - xy + 2 + x^2 + y^2) = 0$ in cui il secondo fattore non ha soluzioni (si ricordi che $t^2 - t + 2 > 0$ per ogni t, quindi anche la quantità $(xy)^2 - xy + 2 > 0$ per ogni x, y).

(4) 1, -3, -1.

(5) Sì, sì, no.

(6) $f(x) = 2 - x - x^2 + o(x^2)$.

(7)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3 - 5x^4 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^4},\\
g'(x) &= (2x-1)\sin x + (x^2 - x + 3)\cos x,\\
h'(x) &= \frac{-x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x}{(x^3 + 2x - 1)^2}.
\end{aligned}$$

Soluzioni versione B

(1) Sì, sì, sì.

(2) 4, $11/30$, $3/2 - 2\log 2$.

(3) -1, $-3/2$, 0.

(4) $y = 1 - 4/7(x-1)$.

(5)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - 10x + 1/\sqrt{x} + 6/x^4,\\
g'(x) &= (2x+2)\cos(x^2 + 2x - 1),\\
h'(x) &= \frac{-x^2 + 8x - 2}{(x^2-2)^2}.
\end{aligned}$$

(6) Sì, infatti da $f(x) = f(y)$ segue che $x + \frac{x}{3+4x^2} = y + \frac{y}{3+4y^2}$ da cui, razionalizzando e raccogliendo segue che $(x-y)((4xy)^2 - 4xy + 12 + 12x^2 + 12y^2) = 0$ in cui il secondo fattore non ha soluzioni (si ricordi che $t^2 - t + 12 > 0$ per ogni t, quindi anche la quantità $(4xy)^2 - 4xy + 12 > 0$ per ogni x, y).

(7) $f(x) = -5 - 3x + x^2/2 + o(x^2)$.

Soluzioni versione C

(1) $17/4, 1-3\pi/2, -2+4\log(3/2)$.

(2) 2,−1, 1/5.

(3) Sì, infatti da $f(x) = f(y)$ segue che $x + \frac{x}{3+x^2} = y + \frac{y}{3+y^2}$ da cui, razionalizzando e raccogliendo segue che $(x-y)((xy)^2 - xy + 12 + 3x^2 + 3y^2) = 0$ in cui il secondo fattore non ha soluzioni (si ricordi che $t^2 - t + 12 > 0$ per ogni t, quindi anche la quantità $(xy)^2 - xy + 12 > 0$ per ogni x, y).

(4) No, no, no.

(5)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -9/x^4 - 1/\sqrt{x} + 1 - 4x^3, \\ g'(x) &= \frac{2x-3}{x^2-3x+3}, \\ h'(x) &= \frac{x^4+6x^3-4x-6}{(x^2+3x)^2}. \end{aligned}$$

(6) $y = 1 + (x-1)$.

(7) $f(x) = -4 - 3x + 2x^2 + o(x^2)$.

Soluzioni versione D

(1) No, sì, no.

(2) $-3-\pi/2, 19/60, 3/2 - 3\log(3/2)$.

(3) Sì, infatti da $f(x) = f(y)$ segue che $x + \frac{x}{1+2x^2} = y + \frac{y}{1+2y^2}$ da cui, razionalizzando e raccogliendo segue che $(x-y)((2xy)^2 - 2xy + 2 + 2x^2 + 2y^2) = 0$ in cui il secondo fattore non ha soluzioni (si ricordi che $t^2 - t + 2 > 0$ per ogni t, quindi anche la quantità $(2xy)^2 - 2xy + 2 > 0$ per ogni x, y).

(4) $-1/4, -2, 0$.

(5) $f(x) = 4 - x + x^2 + o(x^2)$.

(6) $y = 1 - 7/4(x-1)$.

(7)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3/(2\sqrt{x}) - 3x^2 - \frac{8}{x^3}, \\ g'(x) &= \frac{3x^2-3}{x^3-3x+4}, \\ h'(x) &= \frac{-2x^4-4x^3-6x^2+6x+3}{(2x^3+3)^2}. \end{aligned}$$