Il/la sig. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . autorizza la Facoltà di Farmacia a far comparire il proprio nominativo negli elenchi che verranno approntati per la divulgazione sulle pagine web di facoltà del risultato conseguito con il presente elaborato.

# Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

**G. Molteni**

## Appello: 4.6.2007

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Derivare le seguenti funzioni:
$$f(x) = x\log(2+3x), \qquad g(x) = x^3 - \frac{3}{x^2} - \sqrt{x}, \qquad h(x) = \sqrt{x+x^3}.$$

(2) Calcolare le seguenti primitive:
$$\int \frac{1}{x^2}(\sqrt{x}+2)\,dx, \quad \int \frac{x}{3x+1}\,dx, \quad \int (\sin(3x)-\cos(2x))\,dx.$$

(3) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 3$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = 3x\sqrt{1+x}$.

(4) Determinare il valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x) := c(x-1)^2$ risulti essere una densità di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = [0,2]$. Successivamente calcolare la media $\mu$ e la varianza $\sigma^2$ della densità trovata.

(5) Siano A e B due eventi tali che $p(A) = 0.2$, $p(B|A) = 0.5$ e $p(A \cup B) = 0.6$. Calcolare $p(B)$.

(6) I valori di una variabile aleatoria $X$ sono distribuiti come una normale di media $\mu = 10$ e varianza $\sigma^2 = 10$. Calcolare le seguenti probabilità:
$$P(X \geq 8), \quad P(X \leq 12) \quad \text{e infine} \quad P(7 \leq X \leq 11).$$

(7) Su un spazio campionario $\Omega$ sono date due variabili aleatorie $X, Y$ di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

| $X\backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/18 | 1/6 | | | 1/3 |
| 2 | 1/9 | | 5/18 | | |
| | | | 1/3 | 1/6 | |

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e successivamente calcolare $M[X]$, $M[Y]$. $X$ ed $Y$ sono indipendenti? Sono correlate?

(8) Una coppia di dadi a quattro facce numerate $1, 2, 3, 4$ è stata truccata in modo che al lancio di ogni dado la faccia 2 compaia con probabilità $1/3$, mentre le altre facce restano tra loro equiprobabili. Qual è la probabilità che lanciando la coppia di dati la somma dei numeri sulle facce sia 6?

# Soluzioni

(1) $f'(x) = \log(2+3x) + \dfrac{3x}{2+3x}$,

$g'(x) = 3x^2 + \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$h'(x) = \dfrac{1+3x^2}{2\sqrt{x+x^3}}$.

(2) (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}(\sqrt{x}+2)\,dx = \int \left(x^{-3/2} + 2x^{-2}\right)dx = -2x^{-1/2} - 2x^{-1} + c$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{1}{3x+1}\right)dx = \frac{x}{3} - \frac{1}{9}\log|3x+1| + c$;

(c) $\displaystyle\int (\sin(3x) - \cos(2x))\,dx = -\frac{\cos(3x)}{3} - \frac{\sin(2x)}{2} + c.$

(3) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$. Nel caso in esame $f'(x) = 3\sqrt{1+x} + \frac{3x}{2\sqrt{1+x}}$ e così $f(3) = 18$ ed $f'(3) = 33/4$ per cui la retta cercata è $4y = 33x - 27$.

(4) Perché $f(x) = c(x-1)^2$ sia una densità in $[0,2]$ è necessario che il suo integrale in $[0,2]$ valga 1, quindi si ha

$$1 = \int_0^2 c(x-1)^2\,dx = c\int_{-1}^1 u^2\,du = c\frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = c\frac{2}{3} \quad\Longrightarrow\quad c = \frac{3}{2}.$$

Con tale valore di $c$ la funzione risulta a valori non negativi e continua a tratti, quindi è effettivamente una densità in $[0,2]$. La sua media è pari a

$$\mu = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x\frac{3}{2}(x-1)^2\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x(x-1)^2\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \frac{3}{2}\Big(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_0^2 = 1.$$

Il valore della media corrisponde al punto medio di $\Omega$ poiché la densità è simmetrica rispetto a tale punto. Varianza

$$\sigma^2 = \int_0^2 x^2 f(x)dx - \mu^2 = \int_0^2 \frac{3x^2}{2}(x-1)^2\,dx - 1$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^2 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx - 1 = \frac{3}{2}\Big(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2 - 1 = \frac{3}{5}.$$

(5) Dalla definizione di probabilità condizionata discende che

$$p(B|A) = p(A\cap B)/p(A) \quad\Longrightarrow\quad p(A\cap B) = p(B|A)\cdot p(A) = 0.5\cdot 0.2 = 0.1.$$

Inoltre sappiamo che $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ per cui

$$p(B) = p(A\cup B) - p(A) + p(A\cap B) = 0.6 - 0.2 + 0.1 = 0.5 = 50\%.$$

(6) $P(X \geq 8) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{8-10}{\sqrt{10}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq -0.632) = 1 - \Phi(-0.632) = \Phi(0.632) \approx 0.735 = 73.5\%$,

$P(X \leq 12) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{12-10}{\sqrt{10}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 0.632) = \Phi(0.632) \approx 0.735 = 73.5\%$,

$$P(7 \le X \le 11) = P(\tfrac{7-10}{\sqrt{10}} \le \tfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \le \tfrac{11-10}{\sqrt{10}}) = P(-0.948 \le \tfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \le 0.316)$$
$$= \Phi(0.316) - \Phi(-0.948) = \Phi(0.316) - 1 + \Phi(0.948) \approx 0.447 = 44.7\%.$$

(7) Le probabilità congiunte sono:

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/18 | 1/6 | 1/18 | 1/18 | 1/3 |
| 2 | 1/9 | 1/6 | 5/18 | 1/9 | 2/3 |
| | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 | |

e quindi $M[X] = 5/3$, $M[Y] = 3/2$. Le variabili non sono indipendenti poiché, ad esempio

$$p(X = 1, Y = 1) = 1/6 \neq 1/3 \cdot 1/3 = p(X = 1) \cdot p(Y = 1).$$

Inoltre $\mathrm{Cov}[X, Y] = 1/18$ (il calcolo è un po' più rapido se si usa la formula $\mathrm{Cov}[X, Y] = M[XY] - M[X] \cdot M[Y]$) e quindi $X$ ed $Y$ sono correlate.

(8) Anzitutto calcoliamo la probabilità con cui al lancio di un dado esce una delle facce diverse dalla 2. Nel testo si dice che la faccia 2 ha probabilità 1/3, quindi resta una probabilità pari a $1-1/3 = 2/3$ da spartirsi tra le altre facce. Dato che il testo afferma che esse sono equiprobabili, a ciascuna di esse compete un terzo della loro probabilità totale, e quindi le facce $1, 3, 4$ hanno tutte probabilità pari a $1/3 \cdot 2/3 = 2/9$. L'esperimento consiste però nel lancio **indipendente** di due dadi: le probabilità appena calcolate vanno quindi intese come probabilità marginali associate ad una probabilità congiunta ancora da calcolarsi, e che rappresentiamo nella tabella:

| dado 1 \ dado 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | Marginale dado 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 2/9 |
| 2 | | | | | 1/3 |
| 3 | | | | | 2/9 |
| 4 | | | | | 2/9 |
| Marginale dado 2 | 2/9 | 1/3 | 2/9 | 2/9 | |

Dato che i lanci sono indipendenti, la probabilità congiunta è data dal prodotto delle marginali, per cui la tabella si completa nel modo seguente

| dado 1 \ dado 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | Marginale dado 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4/81 | 2/27 | 4/81 | 4/81 | 2/9 |
| 2 | 2/27 | 1/9 | 2/27 | **2/27** | 1/3 |
| 3 | 4/81 | 2/27 | **4/81** | 4/81 | 2/9 |
| 4 | 4/81 | **2/27** | 4/81 | 4/81 | 2/9 |
| Marginale dado 2 | 2/9 | 1/3 | 2/9 | 2/9 | |

La somma dei valori della coppia vale 6 solo per le seguenti coppie:

$$(2, 4) \quad (3, 3) \quad (4, 2)$$

Quindi la probabilità cercata è

$$p(''a + b = 6'') = p((2, 4)) + p((3, 3)) + p((4, 2)) = 2/27 + 4/81 + 2/27 = 16/81.$$