Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Appello: 26.1.2007

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 1$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \log(1 + 6x - 6x^2)$.

(2) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^2 \frac{x+4}{x-3}\, dx, \qquad \int_0^1 (3x + 2x^5 + x^6)\, dx, \qquad \int_0^5 \sqrt{3x+1}\, dx.$$

(3) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{5x^2 + 3x - 2}{3x - 7}, \qquad g(x) = x^3 - \frac{4}{x^3} + \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}, \qquad h(x) = \sqrt{1 - 3x^2}.$$

(4) Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y indipendenti, per le quali è noto che

$$M[X] = 3, \quad \mathrm{Var}[X] = 4, \quad M[Y] = 5, \quad \mathrm{Var}[Y] = 9.$$

Calcolare $M[2X + 3Y]$, $\mathrm{Var}[3X]$, $\mathrm{Var}[2X - 6Y]$, $M[X \cdot Y]$.

(5) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una normale di media $\mu = 10$ e varianza $\sigma^2 = 9$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 8), \quad P(X \leq 11) \quad \text{e infine} \quad P(7 \leq X \leq 14).$$

(6) Sullo spazio campionario $\Omega = [0, 4]$ è definita la densità di probabilità

$$f(x) = \frac{3}{16}(x-2)^2.$$

Calcolarne la media μ e la varianza σ^2.

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	3	5	7	
4	2/15	1/60		1/5
10	8/15		1/5	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e successivamente calcolare $M[X]$, $M[Y]$. X ed Y sono correlate?

(8) Il mal funzionamento dell'apparato W ha tre sole possibili cause, dette "causa A", "causa B" e "causa C". Il costruttore di W dichiara che se la causa A si realizza, essa produce il guasto di W nel 30% dei casi, se a realizzarsi è la causa B essa produce il guasto di W nel 40% dei casi e, da ultimo, che se a realizzarsi è la causa C essa determina il guasto di W nel 20% dei casi.
Gianni acquista l'apparato W e lo installa in un ambiente in cui probabilità che l'evento "causa A" si verifichi è 10% mentre la probabilità che a verificarsi sia l'evento "causa B" è 30%. Calcolare anzitutto la probabilità che si verifichi l'evento "causa C".
A seguito di un mal funzionamento di W, Gianni decide di consultare il call-center messo a disposizione dei suoi clienti dal costruttore di W. Il tecnico del call-center non ha accesso a W e decide di guidare Gianni nel tentativo di risolvere il mal funzionamento. Le cause A,B,C hanno però rimedi distinti e quindi per non perdere tempo conviene partire dalla causa più probabile: qual è?

Soluzioni

(1) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame $f'(x) = \frac{6-12x}{1+6x-6x^2}$ e così $f(1) = \log(1) = 0$ ed $f'(1) = -6$ per cui la retta cercata è $y = -6x + 6$.

(2) (a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x-3}\,dx = \int (1 + \frac{7}{x-3})\,dx = x + 7\log|x-3| + c$

quindi $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+4}{x-3}\,dx = [x + 7\log|x-3|]\Big|_1^2 = 1 - 7\log 2$;

(b) $\displaystyle\int (3x + 2x^5 + x^6)\,dx = \frac{3x^2}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{7} + c$

quindi $\int_0^1 (3x + 2x^5 + x^6)\,dx = [\frac{3x^2}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{7}]\Big|_0^1 = \frac{83}{42}$;

(c) $\int \sqrt{3x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{2}{9}u^{3/2} = \frac{2}{9}(3x+1)^{3/2} + c$ (nei calcoli precedenti si è usata la sostituzione $u = 3x + 1$)

quindi $\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx = \frac{2}{9}(3x+1)^{3/2}\Big|_0^5 = \frac{2}{9}(4^3 - 1) = 14$.

(3) $f'(x) = \dfrac{15x^2 - 70x - 15}{(3x-7)^2}$,

$g'(x) = 3x^2 + \frac{12}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$,

$h'(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}$.

(4) Usando le proprietà formali della media e della varianza si ha:

$$M[2X + 3Y] = 2M[X] + 3M[Y] = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21, \quad \mathrm{Var}[3X] = 3^2\,\mathrm{Var}[X] = 3^2 \cdot 4 = 32.$$

L'indipendenza di X ed Y garantisce la loro non correlazione, ovvero $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$, di conseguenza

$$\mathrm{Var}[2X - 6Y] = \mathrm{Var}[2X] + \mathrm{Var}[-6Y] = 2^2 \cdot \mathrm{Var}[X] + (-6)^2 \cdot \mathrm{Var}[Y] = 2^2 \cdot 4 + (-6)^2 \cdot 9 = 340;$$

inoltre, sempre dalla non correlazione segue $0 = \mathrm{Cov}[X, Y] = M[XY] - M[X] \cdot M[Y]$ e così $M[XY] = M[X] \cdot M[Y] = 3 \cdot 5 = 15$.

(5) $P(X \geq 8) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{8-10}{\sqrt{9}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq -0.\overline{6}) = \Phi(0.\overline{6}) \approx 0.745 = 74.5\%$,

$P(X \leq 11) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{11-10}{\sqrt{9}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 0.\overline{3}) = \Phi(0.\overline{3}) \approx 0.629 = 62.9\%$,

$$\begin{aligned} P(7 \leq X \leq 14) &= P(\tfrac{7-10}{\sqrt{9}} \leq \tfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \tfrac{14-10}{\sqrt{9}}) = P(-1 \leq \tfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 1.\overline{3}) \\ &= \Phi(1.\overline{3}) - \Phi(-1) = \Phi(1.\overline{3}) - 1 + \Phi(1) \\ &\approx 0.908 - 1 + 0.841 = 0.749 = 74.9\%. \end{aligned}$$

(6) Media $\mu = \int_0^4 x f(x) dx = \frac{3}{16}\int_0^4 x(x-2)^2\,dx = 2$.
Varianza $\sigma^2 = \int_0^4 x^2 f(x) dx - 2^2 = \frac{3}{16}\int_0^4 x^2(x-2)^2\,dx - 4 = \frac{12}{5}$.

(7) Le probabilità congiunte sono:

$X \backslash Y$	3	5	7	
4	2/15	1/60	1/20	1/5
10	8/15	1/15	1/5	4/5
	2/3	1/12	1/4	

e quindi $M[X] = 44/5$, $M[Y] = 25/6$. Le variabili risultano indipendenti e di conseguenza sono certamente non correlate.

(8) I dati del problema possono essere riassunti nella seguente lista di informazioni:

$$p(\text{W guasto } |\text{“causa A”}) = 0.3,$$
$$p(\text{W guasto } |\text{“causa B”}) = 0.4,$$
$$p(\text{W guasto } |\text{“causa C”}) = 0.1,$$

e che

$$p(\text{“causa A”}) = 0.1, \qquad p(\text{“causa B”}) = 0.3\ .$$

Visto che le cause possibili sono solo tre, si ha

$$p(\text{“causa A”}) + p(\text{“causa B”}) + p(\text{“causa C”}) = 1$$

e quindi la probabilità dell'evento “causa C” è pari a

$$p(\text{“causa C”}) = 1 - 0.1 - 0.3 = 0.6\ .$$

Per affrontare la risoluzione dal guasto conviene partire dalla causa che si rivela più probabile **una volta tenuto conto che W è guasto**. Ciò significa che conviene partire da quella causa x tra A, B, C in corrispondenza delle quali $p(\text{“causa x”}|\text{W guasto })$ è massima. Per calcolare tali probabilità usiamo la formula di Bayes, così che

$$p(\text{“causa A”}|\text{W guasto }) = \frac{p(\text{W guasto } |\text{“A”}) \cdot p(\text{“A”})}{p(\text{W guasto } |\text{“A”}) \cdot p(\text{“A”}) + p(\text{W guasto } |\text{“B”}) \cdot p(\text{“B”}) + p(\text{W guasto } |\text{“C”}) \cdot p(\text{“C”})} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.3 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.6} \approx 0.143 = 14.3\%,$$

$$p(\text{“causa B”}|\text{W guasto }) = \frac{p(\text{W guasto } |\text{“B”}) \cdot p(\text{“B”})}{p(\text{W guasto } |\text{“A”}) \cdot p(\text{“A”}) + p(\text{W guasto } |\text{“B”}) \cdot p(\text{“B”}) + p(\text{W guasto } |\text{“C”}) \cdot p(\text{“C”})} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.3 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.6} \approx 0.571 = 57.1\%,$$

$$p(\text{“causa C”}|\text{W guasto }) = \frac{p(\text{W guasto } |\text{“C”}) \cdot p(\text{“C”})}{p(\text{W guasto } |\text{“A”}) \cdot p(\text{“A”}) + p(\text{W guasto } |\text{“B”}) \cdot p(\text{“B”}) + p(\text{W guasto } |\text{“C”}) \cdot p(\text{“C”})} = \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.3 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.6} \approx 0.286 = 28.6\%.$$

Dai calcoli precedenti risulta che conviene supporre che il guasto sia dovuto alla causa B.