Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Seconda prova d'esonero: 17.1.2007. Versione A

Il candidato risolva **almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una normale di media $\mu = 35$ e varianza $\sigma^2 = 64$. Calcolare le probabilità $P(X \leq 30)$, $P(X \geq 25)$ ed $P(40 \leq X \leq 50)$.

(2) Determinare per quale valore della costante $c \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = c(x^2 + x^3)$ è una funzione di densità di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = [-1, 1]$. Per tale valore di c si calcoli poi la media e la varianza di questa densità di probabilità.

(3) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X\backslash Y$	2	4	6	
2	2/7	1/7		1/2
4	3/14		1/14	
			1/7	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali, e successivamente calcolare $M[X]$, $M[Y]$. X ed Y sono correlate?

(4) Sono dati due eventi indipendenti A e B le cui probabilità sono rispettivamente $p(A) = \frac{1}{5}$ e $p(B) = \frac{2}{3}$. Calcolare $p(A^c \cup B)$.

(5) Un esperimento ha prodotto le seguenti misure di una data grandezza:

$$6.1, \quad 5.3, \quad 5.9, \quad 5.2, \quad 6.3\ .$$

Calcolare la media e la varianza di questi dati.

(6) Un vaccino si è rivelato efficace nel 70% dei casi (ciò significa che esso protegge effettivamente dalla malattia in esame con una probabilità pari a 0.7). Qual è la probabilità che vaccinando una popolazione di 3000 abitanti più di 850 di essi contraggano comunque la malattia?

(7) Un dado a quattro facce, numerate "1", "2", "3" e "4", è costruito in modo che ad ogni lancio le facce "1", "3" e "4" abbiano la stessa probabilità, mentre la faccia "2" abbia una probabilità quadrupla della probabilità della faccia "1".
Tale dado è poi usato per un gioco che consiste in questo: il giocatore lancia il dado **due** volte e vince x euro se il prodotto dei due valori usciti è maggiore di "7", altrimenti perde "4" euro.
Calcolare le probabilità delle singole facce del dado e successivamente determinare il valore che va attribuito ad x affinché il gioco risulti equo.

Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Seconda prova d'esonero: 17.1.2007. Versione B

Il candidato risolva **almeno tre** tra i seguenti quesiti.

(1) Sono dati due eventi indipendenti A e B le cui probabilità sono rispettivamente $p(A) = \frac{2}{5}$ e $p(B) = \frac{1}{3}$. Calcolare $p(A^c \cup B^c)$.

(2) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una normale di media $\mu = 20$ e varianza $\sigma^2 = 36$. Calcolare le probabilità $P(X \leq 15)$, $P(X \geq 25)$ ed $P(17 \leq X \leq 23)$.

(3) Un vaccino si è rivelato efficace nel 80% dei casi (ciò significa che esso protegge effettivamente dalla malattia in esame con una probabilità pari a 0.8). Qual è la probabilità che vaccinando una popolazione di 4000 abitanti, meno di 750 di essi contraggano comunque la malattia?

(4) Un dado a quattro facce, numerate "1", "2", "3" e "4", è costruito in modo che ad ogni lancio le facce "1", "2" e "3" abbiano la stessa probabilità, mentre la faccia "4" abbia una probabilità tripla della probabilità della faccia "3".
Tale dado è poi usato per un gioco che consiste in questo: il giocatore lancia il dado **due** volte e vince x euro se il prodotto dei due valori usciti è maggiore di "7", altrimenti perde "2" euro.
Calcolare le probabilità delle singole facce del dado e successivamente determinare il valore che va attribuito ad x affinché il gioco risulti equo.

(5) Determinare per quale valore della costante $c \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = c(x^2 - x^3)$ è una funzione di densità di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = [-1, 1]$. Per tale valore di c si calcoli poi la media e la varianza di questa densità di probabilità.

(6) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X\backslash Y$	1	3	5	
3	2/7		1/14	1/2
5	3/14	3/14		
		5/14		

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali, e successivamente calcolare $M[X]$, $M[Y]$. X ed Y sono correlate?

(7) Un esperimento ha prodotto le seguenti misure di una data grandezza:

$$9.7, \quad 9.9, \quad 10.1, \quad 8.3, \quad 8.1\ .$$

Calcolare la media e la varianza di questi dati.

Soluzioni vers. A

(1) $P(X \leq 30) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{30-35}{8}) = \Phi(-\frac{5}{8}) = 1 - \Phi(\frac{5}{8}) \approx 1 - 0,732 = 0,267 = 26,7\%$,
$P(X \geq 25) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{25-35}{8}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq -\frac{5}{4}) = 1-\Phi(-\frac{5}{4}) = \Phi(\frac{5}{4}) \approx 0,894 = 89,4\%$,
$P(40 \leq X \leq 70) = P(\frac{40-35}{8} \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{50-35}{8}) = P(\frac{5}{8} \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{15}{8}) = \Phi(\frac{15}{8}) - \Phi(\frac{5}{8}) \approx 0,9699 - 0,7291 = 0,2408 \approx 24\%$.

(2) $c = \frac{3}{2}$.
$\mu = \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^3 + x^4)\,dx = \frac{3}{5}$,
$\sigma^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^4 + x^5)\,dx - \mu^2 = \frac{6}{25}$.

(3) La tabella completa è:

$X \backslash Y$	2	4	6	
2	2/7	1/7	1/14	1/2
4	3/14	3/14	1/14	1/2
	1/2	5/14	1/7	

$M[X] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$,
$M[Y] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{5}{14} + 6 \cdot \frac{1}{7} = \frac{23}{7}$,
$\mathrm{Cov}[X,Y] = (2 - M[X])(2 - M[Y]) \cdot \frac{2}{7} + (2 - M[X])(4 - M[Y]) \cdot \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{7}$;
le variabili X ed Y sono quindi correlate.

(4) Anche gli eventi A^c e B sono indipendenti, quindi

$$p(A^c \cap B) = p(A^c)p(B) = (1 - p(A))p(B).$$

Si ha quindi

$$p(A^c \cup B) = p(A^c) + p(B) - p(A^c \cap B) = (1 - \frac{1}{5}) + \frac{2}{3} - (1 - \frac{1}{5})\frac{2}{3} = \frac{14}{15}.$$

(5) $\mu = 5.76$, $\sigma^2 \approx 0.19$.

(6) Per comodità poniamo $N := 3000$. Numeriamo le persone vaccinate secondo una numerazione progressiva, da 1 a N. Per ogni $n \in \{1, \ldots, N\}$ sia X_n la variabile aleatoria che assume il valore 1 se la persona numero n si ammala, 0 altrimenti. Per ognuno di essi la probabilità di ammalarsi nonostante si siano vaccinati è pari a $p = 1 - 0.7 = 0.3$. Il numero totale di malati è la variabile aleatoria S data dalla somma $X_1 + \cdots + X_N$. S è distribuito come una binomiale di parametri $N = 3000$ e $p = 3/10$. Si chiede di calcolare $P(S > 850)$. Essendo binomiale, si ha

$$P(S > 850) = \sum_{n=851}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \sum_{n=851}^{3000} \binom{3000}{n} (0.3)^n (0.7)^{3000-n}$$

che però non è di agevole esecuzione. Possiamo però utilizzare il teorema del limite centrale:
$M[S] = N \cdot p = 3000 \cdot 0.3 = 900$,
$Var[S] = N \cdot p \cdot (1-p) = 3000 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 630$,
quindi

$$p(S > 851) = P(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} > \frac{851 - 900}{\sqrt{630}}) = P(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} > -1.95) = 1 - \Phi(-1.95)$$
$$= \Phi(1.95) \approx 0.97 = 97\%.$$

(7) Le probabilità delle facce sono rispettivamente:

$$p(\text{“2”}) = 4/7, \quad p(\text{“1”}) = p(\text{“3”}) = p(\text{“4”}) = 1/7.$$

Lanciando due volte il dato si realizza uno delle seguenti possibilità:

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1					
2					
3					
4					

Le probabilità marginali di questa tabella sono quelle appena trovate, ovvero

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1					1/7
2					4/7
3					1/7
4					1/7
	1/7	4/7	1/7	1/7	

Visto che i risultati dei lanci sono tra loro indipendenti, le probabilità congiunte sono:

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1	1/49	4/49	1/49	1/49	1/7
2	4/49	16/49	4/49	4/49	4/7
3	1/49	4/49	1/49	1/49	1/7
4	1/49	4/49	1/49	1/49	1/7
	1/7	4/7	1/7	1/7	

I casi in cui il giocatore vince la partita sono quelli riportati in grassetto

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1	1/49	4/49	1/49	1/49	1/7
2	4/49	16/49	4/49	**4/49**	4/7
3	1/49	4/49	**1/49**	**1/49**	1/7
4	1/49	**4/49**	**1/49**	**1/49**	1/7
	1/7	4/7	1/7	1/7	

La probabilità di vittoria per il giocatore è quindi data dalla somma delle probabilità in grassetto, ovvero: 12/49. La vincita media è quindi

$$M[\text{vincita}] = x \cdot \frac{12}{49} - 4 \cdot \frac{37}{49}.$$

Poiché il gioco è detto equo quando $M[\text{vincita}] = 0$, ciò accade se e solo se x soddisfa la relazione

$$x \cdot \frac{12}{49} - 4 \cdot \frac{37}{49} = 0 \qquad x = \frac{37}{3} \approx 12.34 \text{ euro.}$$

Soluzioni vers. B

(1) Anche gli eventi A^c e B^c sono indipendenti, quindi

$$p(A^c \cap B^c) = p(A^c)p(B^c) = (1 - p(A))(1 - p(B)).$$

Si ha quindi

$$p(A^c \cup B^c) = p(A^c) + p(B^c) - p(A^c \cap B^c) = (1 - \frac{1}{5}) + (1 - \frac{2}{3}) - (1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{2}{3}) = \frac{13}{15}.$$

(2) $P(X \leq 15) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{15-20}{6}) = \Phi(-\frac{5}{6}) = 1 - \Phi(\frac{5}{6}) \approx 1 - 0.7967 = 0.2033 \approx 20.3\%$,
$P(X \geq 25) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{25-20}{6}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{5}{6}) = 1 - \Phi(\frac{5}{6}) \approx 1 - 0.7967 = 0.2033 \approx 20.3\%$,
$P(17 \leq X \leq 23) = P(\frac{17-20}{6} \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{23-20}{6}) = P(-\frac{1}{2} \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{1}{2}) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) - 1 + \Phi(0.5) \approx 0.383 = 38.3\%$.

(3) Per comodità poniamo $N := 4000$. Numeriamo le persone vaccinate secondo una numerazione progressiva, da 1 a N. Per ogni $n \in \{1, \dots, N\}$ sia X_n la variabile aleatoria che assume il valore 1 se la persona numero n si ammala, 0 altrimenti. Per ognuno di essi la probabilità di ammalarsi nonostante si siano vaccinati è pari a $p = 1 - 0.8 = 0.2$. Il numero totale di malati è la variabile aleatoria S data dalla somma $X_1 + \cdots + X_N$. S è distribuito come una binomiale di parametri $N = 4000$ e $p = 2/10$. Si chiede di calcolare $P(S < 750)$. Essendo binomiale, si ha

$$P(S < 750) = \sum_{n=0}^{749} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \sum_{n=0}^{749} \binom{4000}{n} (0.2)^n (0.8)^{4000-n}$$

che però non è di agevole esecuzione. Possiamo però utilizzare il teorema del limite centrale:
$M[S] = N \cdot p = 4000 \cdot 0.2 = 800$,
$Var[S] = N \cdot p \cdot (1-p) = 4000 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 640$,
quindi

$$\begin{aligned} p(S < 750) &= P(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} < \frac{750-800}{\sqrt{640}}) = P(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} < -1.97) = \Phi(-1.97) \\ &= 1 - \Phi(1.97) \approx 1 - 0.98 \approx 0.02 = 2\%. \end{aligned}$$

(4) Le probabilità delle facce sono rispettivamente:

$$p(\text{“4”}) = 1/2, \quad p(\text{“1”}) = p(\text{“2”}) = p(\text{“3”}) = 1/6.$$

Lanciando due volte il dato si realizza uno delle seguenti possibilità:

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1					
2					
3					
4					

Le probabilità marginali di questa tabella sono quelle appena trovate, ovvero

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1					1/6
2					1/6
3					1/6
4					1/2
	1/6	1/6	1/6	1/2	

Visto che i risultati dei lanci sono tra loro indipendenti, le probabilità congiunte sono:

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1	1/36	1/36	1/36	1/12	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/12	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/12	1/6
4	1/12	1/12	1/12	1/4	1/2
	1/6	1/6	1/6	1/2	

I casi in cui il giocatore vince la partita sono quelli riportati in grassetto

lancio 1\lancio 2	1	2	3	4	
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	**1/12**	1/6
3	1/36	1/36	**1/36**	**1/12**	1/6
4	1/12	**1/12**	**1/12**	**1/4**	1/2
	1/6	1/6	1/6	1/2	

La probabilità di vittoria per il giocatore è quindi data dalla somma delle probabilità in grassetto, ovvero: 11/18. La vincita media è quindi

$$M[\text{vincita}] = x \cdot \frac{11}{18} - 2 \cdot \frac{7}{18}.$$

Poiché il gioco è detto equo quando $M[\text{vincita}] = 0$, ciò accade se e solo se x soddisfa la relazione

$$x \cdot \frac{11}{18} - 2 \cdot \frac{7}{18} = 0 \qquad x = \frac{14}{11} \approx 1.27 \text{ euro.}$$

(5) $c = \frac{3}{2}$.
$\mu = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^3 - x^4)\,dx = -\frac{3}{5}$,
$\sigma^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^4 - x^5)\,dx - \mu^2 = \frac{6}{25}$.

(6) La tabella completa è:

$X\backslash Y$	1	3	5	
3	2/7	1/7	1/14	1/2
5	3/14	3/14	1/14	1/2
	1/2	5/14	1/7	

$M[X] = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4$,
$M[Y] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{5}{14} + 5 \cdot \frac{1}{7} = \frac{16}{7}$,
$\mathrm{Cov}[X, Y] = (3 - M[X])(1 - M[Y]) \cdot \frac{2}{7} + (3 - M[X])(3 - M[Y]) \cdot \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{7}$;
le variabili X ed Y sono quindi correlate.

(7) $\mu = 9.22$, $\sigma^2 \approx 0.71$.