Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni

Appello: 16.2.2007

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 3$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

(2) Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^4 x\Big(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{2}{3x+1}\,dx, \qquad \int_0^1 (e^{2x} - e^{3x})\,dx.$$

(3) Derivare le seguenti funzioni:
$$f(x) = x\Big(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\Big), \qquad g(x) = \frac{2}{x^3} - 3x^2 + \frac{1}{x}, \qquad h(x) = \sqrt{2x - x^3}.$$

(4) Siano A e B due eventi tali che $p(A|B) = 0.6$, $p(B|A) = 0.3$ e $p(A \cup B) = 0.4$. Calcolare $p(A)$ e $p(B)$.

(5) I valori di una variabile aleatoria X sono distribuiti come una normale di media $\mu = 7$ e varianza $\sigma^2 = 12$. Calcolare le seguenti probabilità:
$$P(X \geq 8), \quad P(X \leq 10) \quad \text{e infine} \quad P(6 \leq X \leq 9).$$

(6) Sullo spazio campionario $\Omega = [0, 4]$ è definita la densità di probabilità
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{6} & \text{se } x \in [1,2] \\ -\frac{x}{3} + \frac{7}{6} & \text{se } x \in [2,3] \\ \frac{1}{6} & \text{se } x \in [3,4]. \end{cases}$$
Calcolarne la media μ e la varianza σ^2.

(7) Su un spazio campionario Ω sono date due variabili aleatorie X, Y di cui sono note le seguenti probabilità congiunte e marginali:

$X \backslash Y$	0	3	4	
1		1/2	1/24	
3				1/3
	1/4		1/4	

Completare la tabella delle probabilità congiunte e marginali e successivamente calcolare $M[X]$, $M[Y]$. X ed Y sono indipendenti? Sono correlate?

(8) Un editore stima che la probabilità che il fotocompositore compia un errore nel comporre una pagina della opera omnia di W. T. sia pari a 2%. L'opera in questione è composta da ben 6000 pagine. Qual è la probabilità che il numero di errori presenti nell'intera opera siano tra i 130 ed i 140?

Soluzioni

(1) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1-2x+x^2}}$ e così $f(3) = 2$ ed $f'(3) = 1$ per cui la retta cercata è $y = x - 1$.

(2) (a) $\displaystyle\int x\big(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\big)\ dx = \int \big(x^{3/2} + \sqrt{x}\big)\ dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

quindi $\displaystyle\int_0^4 x\big(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\big)\ dx = \Big[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]\Big|_0^4 = \frac{272}{15}$;

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+1}\ dx = \frac{2}{3}\log|3x+1| + c$

quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+1}\ dx = \Big[\frac{2}{3}\log|3x+1|\Big]\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\log 4$;

(c) $\displaystyle\int (e^{2x} - e^{3x})\ dx = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{3x}}{3} + c$

quindi $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} - e^{3x})\ dx = \Big[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{3x}}{3}\Big]\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{3} - \frac{1}{6}$.

(3) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$g'(x) = -\frac{6}{x^4} - 6x - \frac{1}{x^2}$,

$h'(x) = \dfrac{2 - 3x^2}{2\sqrt{2x - x^3}}$.

(4) Sappiamo che $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ e dalla definizione di probabilità condizionata discende che

$$p(A) = p(A \cap B)/p(B|A), \quad p(B) = p(A \cap B)/p(A|B),$$

quindi

$$\begin{aligned} 0.4 = p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= p(A \cap B)/p(B|A) + p(A \cap B)/p(A|B) - p(A \cap B) \\ &= p(A \cap B)(1/p(B|A) + 1/p(A|B) - 1) \\ &= p(A \cap B)(1/0.3 + 1/0.6 - 1) = 4 \cdot p(A \cap B) \end{aligned}$$

e quindi $p(A \cap B) = 0.4/4 = 0.1$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap B)/p(B|A) \approx 0.1/0.3 \approx 0.333 = 33.3\%\ , \\ p(B) &= p(A \cap B)/p(A|B) \approx 0.1/0.6 \approx 0.167 = 16.7\%\ . \end{aligned}$$

(5) $P(X \geq 8) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{8-7}{\sqrt{12}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq 0.288) = 1 - \Phi(0.288) \approx 0.388 = 38.8\%$,

$P(X \leq 10) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{10-7}{\sqrt{12}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 0.866) = \Phi(0.866) \approx 0.805 = 80.5\%$,

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 9) &= P(\tfrac{6-7}{\sqrt{12}} \leq \tfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \tfrac{9-7}{\sqrt{12}}) = P(-0.288 \leq \tfrac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 0.577) \\ &= \Phi(0.577) - \Phi(-0.288) = \Phi(0.577) - 1 + \Phi(0.288) \approx 0.329 = 32.9\%. \end{aligned}$$

(6) Media

$$\mu = \int_0^4 x f(x)dx = \int_0^1 x\frac{1}{6}\,dx + \int_1^2 x(\frac{x}{3}-\frac{1}{6})\,dx + \int_2^3 x(-\frac{x}{3}+\frac{7}{6})\,dx + \int_3^4 x\frac{1}{6}\,dx = 2.$$

Il valore della media corrisponde al punto medio di Ω poiché la densità è simmetrica rispetto a tale punto. Varianza

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_0^4 x^2 f(x)dx - \mu^2 \\ &= \int_0^1 x^2\frac{1}{6}\,dx + \int_1^2 x^2(\frac{x}{3}-\frac{1}{6})\,dx + \int_2^3 x^2(-\frac{x}{3}+\frac{7}{6})\,dx + \int_3^4 x^2\frac{1}{6}\,dx - 4 \\ &= \frac{x^3}{18}\Big|_0^1 + (\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{18})\Big|_1^2 + (-\frac{x^4}{12}+\frac{7x^3}{18})\Big|_2^3 + \frac{x^3}{18}\Big|_3^4 - 4 = \frac{17}{18}.\end{aligned}$$

(7) Le probabilità congiunte sono:

$X\backslash Y$	0	3	4	
1	1/8	1/2	1/24	2/3
3	1/8	0	5/24	1/3
	1/4	1/2	1/4	

e quindi $M[X] = 5/3$, $M[Y] = 5/2$. Le variabili non sono indipendenti poiché, ad esempio

$$p(X=1, Y=0) = 1/8 \neq 1/4 \cdot 2/3 = p(X=1)\cdot p(Y=0).$$

Tuttavia $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$ (il calcolo è un po' più rapido se si usa la formula $\mathrm{Cov}[X,Y] = M[XY] - M[X]\cdot M[Y]$) e quindi X ed Y sono non correlate.

(8) Sia S la variabile aleatoria che conta il numero di pagine nelle quali è presente un errore; S è distribuito come una binomiale di parametri $N := 6000$ e $p := 0.02$. Il problema chiede di calcolare $p(130 \leq S \leq 140)$, quindi

$$(*) \qquad p(130 \leq S \leq 140) = \sum_{n=130}^{140} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \sum_{n=130}^{140} \binom{6000}{n} (0.02)^n \cdot (0.98)^{6000-n}.$$

Osserviamo che $M[S] = N \cdot p = 6000 \cdot 0.02 = 120$ e che $\mathrm{Var}[S] = N \cdot p \cdot (1-p) = 6000\cdot 0.02 \cdot 0.98 = 117.6$; sono quindi soddisfatte le ipotesi per poter approssimare (tramite il teorema del limite centrale) la variabile S con una variabile gaussiana. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}p(130 \leq S \leq 140) &= p(\frac{130-120}{\sqrt{117.6}} \leq \frac{S - M[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \leq \frac{140-120}{\sqrt{117.6}}) \\ &= p(0.922 \leq \frac{S-M[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \leq 1.844) = \Phi(1.844) - \Phi(0.922) \\ &\approx 0.146 = 14.6\%.\end{aligned}$$

È interessante osservare che il valore esatto della probabilità, calcolato tramite l'espressione in $(*)$ è 0.15776. Lo scarto tra il valore esatto e quello approssimato è quindi pari a circa 1%.