Il/la sig. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . autorizza la Facoltà di Farmacia a far comparire il proprio nominativo negli elenchi che verranno approntati per la divulgazione sulle pagine web di facoltà del risultato conseguito con il presente elaborato.

# Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

**G. Molteni**

## Appello: 19.9.2007

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 1$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-3}$.

(2) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 4}, \qquad g(x) = \frac{3}{x^2} - 2x^5 + \sqrt{x}, \qquad h(x) = \log(1 - x + 2x^3).$$

(3) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)\, dx, \quad \int_1^3 \frac{dx}{5x - 1}, \quad \int_0^1 (1 + 2x)e^x\, dx.$$

(4) Siano A e B due eventi tali che $p(A^c \cup B) = \frac{29}{35}$, $p(A^c \cap B) = \frac{12}{35}$ e $p(A|B) = 0.4$. Calcolare $p(A)$ e $p(B)$; successivamente stabilire se $A$ e $B$ sono indipendenti.

(5) Determinare il valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x) := x + c$ risulti essere una densità di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = [0, 1]$. Successivamente calcolare la media $\mu$ e la varianza $\sigma^2$ della densità trovata.

(6) I valori di una variabile aleatoria $X$ sono distribuiti come una normale di media $\mu = 6$ e varianza $\sigma^2 = 16$. Calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \geq 4), \quad P(X \leq 5) \quad \text{e infine} \quad P(2 \leq X \leq 7).$$

(7) Il medesimo esperimento è condotto da due laboratori diversi, che indichiamo con $A$ e con $B$, i quali hanno a disposizione strumentazioni diverse. Il laboratorio $A$ ottiene la seguente serie di misure:

3.2  3.5  3.5  3.7  3.6

mentre le misure ottenute da $B$ sono:

3.4  3.6  2.9  3.9  4.0

Calcolare media e varianza delle misure di ciascun laboratorio. Quale laboratorio ha ottenuto misurazioni più significative?

(8) Su un spazio campionario $\Omega$ sono date due variabili aleatorie $X, Y$ di cui sono note le probabilità congiunte secondo il seguente schema:

| $X\backslash Y$ | 2 | 4 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/3 | 1/6 | |
| 2 | | 1/4 | |
| | | | |

Calcolare $M[X]$, $M[Y]$, $\mathrm{Cov}[X, Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $M[XY]$ e $M[X^2 + Y^2]$. $X$ ed $Y$ sono indipendenti? Sono correlate?

# Soluzioni

(1) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame $f'(x) = \frac{\frac{2x-3}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(2x-3)^2}$ e così $f(1) = -1$ ed $f'(1) = -5/2$ per cui la retta cercata è $2y = 3 - 5x$.

(2) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 11}{(x-4)^2}$,

$g'(x) = \dfrac{-6}{x^3} - 10x^4 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$h'(x) = \dfrac{6x^2 - 1}{1 - x + 2x^3}$.

(3) (a) $\int (x^3 - 2x + 1)\ dx = x^4/4 - x^2 + x$

quindi $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)\ dx = [x^4/4 - x^2 + x]\Big|_0^1 = 1/4$

(b) $\int \dfrac{dx}{5x-1} = \dfrac{1}{5}\log|5x - 1|$

quindi $\int_1^3 \dfrac{dx}{5x-1} = \dfrac{1}{5}\log|5x-1|\Big|_1^3 = \dfrac{\log(7/2)}{5}$

(c) $\int (1 + 2x)e^x\ dx = (2x - 1)e^x$

quindi $\int_0^1 (1 + 2x)e^x\ dx = [(2x-1)e^x]\Big|_0^1 = 1 + e$

(4) Dalla relazione $p(A^c \cup B) = p(A^c) + p(B) - p(A^c \cap B)$ otteniamo che

$$p(A^c) + p(B) = p(A^c \cap B) + p(A^c \cup B) = \frac{12}{35} + \frac{29}{35} = \frac{41}{35}$$

Inoltre, dalla definizione di probabilità condizionata discende che

$$\frac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = p(A^c|B) = 1 - p(A|B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

e quindi $p(B) = p(A^c \cap B)/0.6 = (12/35)/0.6 = 4/7$ e così $p(A^c) = \frac{41}{35} - p(B) = \frac{41}{35} - \frac{4}{7} = \frac{3}{5}$, da cui $p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 3/5 = \frac{2}{5}$.
Infine, visto che

$$p(A^c \cap B) = \frac{12}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = p(A^c) \cdot p(B)$$

scopriamo che $A^c$ e $B$ sono eventi indipendenti; è noto che ciò implica l'indipendenza anche degli eventi $A$ e $B$.

(5) Perché $f(x) = x + c$ sia una densità in $[0, 1]$ è necessario che il suo integrale in $[0, 1]$ valga 1, quindi si ha

$$1 = \int_0^1 (x + c)\, dx = [\frac{x^2}{2} + c]\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + c \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{1}{2}.$$

Con tale valore di $c$ la funzione risulta a valori non negativi e continua a tratti, quindi è effettivamente una densità in $[0,1]$. La sua media è pari a

$$\mu = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(x+1/2)\,dx = \int_0^1 (x^2+x/2)\,dx$$
$$= [x^3/3 + x^2/4]\Big|_0^1 = \frac{7}{12}.$$

Varianza

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 f(x)dx - \mu^2 = \int_0^1 x^2(x+1/2)\,dx - (7/12)^2$$
$$= \int_{-1}^1 (x^3 + x^2/2)\,dx - (7/12)^2 = [\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}]\Big|_0^1 - (7/12)^2 = \frac{11}{144}.$$

(6) $P(X \geq 4) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq \frac{4-6}{\sqrt{16}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \geq -1/2) = 1 - \Phi(-1/2)$
$= \Phi(1/2) \approx 0.691 = 69.1\%$,

$P(X \leq 5) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{5-6}{\sqrt{16}}) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq -1/4) = \Phi(-1/4) = 1 - \Phi(1/4) \approx 1 - 0.598 =$ $40.2\%$,

$P(2 \leq X \leq 7) = P(\frac{2-6}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{7-6}{\sqrt{16}}) = P(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq 1/4)$
$= \Phi(1/4) - \Phi(-1) = \Phi(1/4) - 1 + \Phi(1) \approx 0.439 = 43.9\%$.

(7) In entrambi i casi si tratta di spazi campionari con cinque elementi, equiprobabili. Indichiamo com $\mu_A$ e $\sigma_A^2$ la media e la varianza per il laboratorio $A$, e con $\mu_B$ e $\sigma_B^2$ quelle per il laboratorio $B$. Si ha:

$$\mu_A = \sum_\alpha p(\alpha)\cdot\alpha = \frac{1}{5}(3.2+3.5+3.5+3.7+3.6) = 3.5$$
$$\sigma_A^2 = \sum_\alpha p(\alpha)\cdot\alpha^2 - \mu_A^2 = \frac{1}{5}(3.2^2+3.5^2+3.5^2+3.7^2+3.6^2) - 3.5^2 = 0.028$$
$$\mu_B = \sum_\beta p(\beta)\cdot\beta = \frac{1}{5}(3.4+3.6+2.9+3.9+4.0) = 3.56$$
$$\sigma_B^2 = \sum_\beta p(\beta)\cdot\beta^2 - \mu_B^2 = \frac{1}{5}(3.4^2+3.6^2+2.9^2+3.9^2+4.0^2) - 3.56^2 = 0.1544.$$

I risultati più significativi sono quelli ottenuti da $A$ poiché mostrano una varianza inferiore di quella dei dati di $B$.

(8) Anzitutto completiamo la tabella, osservando che la somma di tutte le probabilità congiunte deve essere 1 per cui $1/3+1/6+p(2,2)+1/4 = 1$ da cui $p(2,2) = 1/4$. La tabella delle probabilità congiunte è quindi

| $X\backslash Y$ | 2 | 4 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/3 | 1/6 | |
| 2 | 1/4 | 1/4 | |
| | | | |

e le probabilità marginali sono

| $X\backslash Y$ | 2 | 4 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/3 | 1/6 | 1/2 |
| 2 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| | 7/12 | 5/12 | |

Quindi

$$\begin{aligned}
M[X] &= 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\\
M[X^2] &= 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\\
M[Y] &= 2\cdot\frac{7}{12} + 4\cdot\frac{5}{12} = \frac{17}{6}\\
M[Y^2] &= 2^2\cdot\frac{7}{12} + 4^2\cdot\frac{5}{12} = 9\\
M[XY] &= 1\cdot 2\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot 4\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{3}.
\end{aligned}$$

Abbiamo così

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X,Y] &= M[XY] - M[X]M[Y] = \frac{13}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{6} = \frac{1}{12}\\
\mathrm{Var}[X] &= M[X^2] - (M[X])^2 = \frac{5}{2} - (\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}\\
\mathrm{Var}[Y] &= M[Y^2] - (M[Y])^2 = 9 - (\frac{17}{6})^2 = \frac{35}{36}\\
M[X^2+Y^2] &= M[X^2] + M[Y^2] = \frac{5}{2} + 9 = \frac{23}{2}.
\end{aligned}$$

Le variabili non sono né indipendenti né non correlate, poiché $\mathrm{Cov}[X,Y] = 1/12 \neq 0$.