Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni, D. Poggioli

Appello: 3.7.2012 versione (A)

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 1$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = (x + 7)^{2/3}$.

(2) Derivare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}, \qquad g(x) = \sqrt[5]{x + 4}, \qquad h(x) = (x + 1)\log(x - 1).$$

(3) Calcolare i seguenti integrali.

$$\int_1^2 (3 + \frac{4}{x})\,dx, \qquad \int_0^\pi (2x^3 - \cos x)\,dx, \qquad \int_0^2 \frac{x^2 - 3x - 5}{x + 2}\,dx.$$

(4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} + x\cos x}{x - 3x^4 - \sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1 + 2x}}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2} - x^{5/3} + x - 3}{(x^5 - 2x + 3)^{1/3}}.$$

(5) In una particolare specie di farfalle le ali sono di colore bruno nel 90% degli individui e di colore bianco nel rimanente 10%. In un prato in cui vivono 450 farfalle di questa specie, quale è la probabilità che più di 50 farfalle abbiano le ali bianche? **Si risponda avendo cura di giustificare ogni passaggio**.

(6) In un periodo di 120 anni ci sono stati nel mondo 87 terremoti di alta intensità.
   a) Calcolare il numero medio di terremoti di alta intensità in un anno.
   b) Calcolare la probabilità che il numero di terremoti in un anno selezionato a caso sia esattamente 2.
   c) Quale sarà il numero di anni su 120 in cui si sono verificati 2 terremoti?

(7) La tabella riassume il gruppo sanguigno e il fattore Rh di un campione di 100 persone.

	0	A	B	AB
Rh+	38	25	11	6
Rh-	7	6	4	3

   a) Scegliendo a caso una persona, determinare la probabilità che:
      1. il suo gruppo sanguigno non sia 0
      2. abbia il gruppo AB o il fattore Rh+
      3. abbia il fattore Rh- sapendo che ha gruppo A
   b) Scegliendo a caso tre persone, determinare la probabilità che abbiano il gruppo B.

(8) Su 150 analisi effettuate in un laboratorio, sono state riscontrate le seguenti frequenze dei vari gruppi sanguigni.

Gruppo	Fr. assolute
0	78
A	48
B	15
AB	9

   a) Calcolare le corrispondenti frequenze percentuali.
   b) Calcolare la probabilità che scelti due individui a caso essi abbiano lo stesso gruppo sanguigno.
   c) Come è noto le trasfusioni di sangue sono possibili: dal gruppo 0 a tutti i gruppi; dal gruppo A ai gruppi A, AB; dal gruppo B ai gruppi B, AB; dal gruppo AB al gruppo AB. Calcolare la probabilità che un individuo scelto a caso possa donare il proprio sangue a un secondo individuo scelto a caso.

Corso di Ist. di Matematiche per Farmacia

G. Molteni, D. Poggioli

Appello: 3.7.2012 versione (B)

Il candidato risolva almeno tre tra i seguenti quesiti.

(1) Determinare l'equazione della retta che nel punto di ascissa $x = 2$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = (x + 25)^{2/3}$.

(2) Derivare le seguenti funzioni:
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{x^2 + 3x + 3}, \qquad g(x) = \sqrt[4]{x - 3}, \qquad h(x) = (x - 4)\cos(x + 4).$$

(3) Calcolare i seguenti integrali.
$$\int_2^3 (\frac{3}{x} - 2)\,dx, \qquad \int_0^\pi (4x^4 + 2\sin x)\,dx, \qquad \int_0^2 \frac{x^2 + 4x - 6}{x + 3}\,dx.$$

(4) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + x^2 \sin x - 3\sqrt{x}}{x^2 - x^5 + x\log x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 4x} - e^{2x}}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2/3} - 2x^{5/6} + 3x - 1}{(x^5 - x - 4)^{1/6}}.$$

(5) In una particolare specie di farfalle le ali sono di colore bruno nel 80% degli individui e di colore bianco nel rimanente 20%. In un prato in cui vivono 550 farfalle di questa specie, quale è la probabilità che meno di 420 farfalle abbiano le ali brune? **Si risponda avendo cura di giustificare ogni passaggio**.

(6) In un periodo di 120 anni ci sono stati nel mondo 99 terremoti di alta intensità.
   a) Calcolare il numero medio di terremoti di alta intensità in un anno.
   b) Calcolare la probabilità che il numero di terremoti in un anno selezionato a caso sia esattamente 2.
   c) Quale sarà il numero di anni su 120 in cui si sono verificati 2 terremoti?

(7) La tabella riassume il gruppo sanguigno e il fattore Rh di un campione di 100 persone.

	0	A	B	AB
Rh+	38	25	11	6
Rh-	7	6	4	3

   a) Scegliendo a caso una persona, determinare la probabilità che:
      1. il suo gruppo sanguigno non sia A
      2. abbia il gruppo A o il fattore Rh-
      3. abbia il fattore Rh- sapendo che ha gruppo B
   b) Scegliendo a caso tre persone, determinare la probabilità che abbiano il gruppo 0.

(8) Su 150 analisi effettuate in un laboratorio, sono state riscontrate le seguenti frequenze dei vari gruppi sanguigni.

Gruppo	Fr. assolute
0	75
A	39
B	24
AB	12

   a) Calcolare le corrispondenti frequenze percentuali.
   b) Calcolare la probabilità che scelti due individui a caso essi abbiano lo stesso gruppo sanguigno.
   c) Come è noto le trasfusioni di sangue sono possibili: dal gruppo 0 a tutti i gruppi; dal gruppo A ai gruppi A, AB; dal gruppo B ai gruppi B, AB; dal gruppo AB al gruppo AB. Calcolare la probabilità che un individuo scelto a caso possa donare il proprio sangue a un secondo individuo scelto a caso.

Soluzioni Tema A

(1) In generale, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame abbiamo
$f(1) = 8^{2/3} = 4$,
e dato che $f'(x) = \frac{2}{3}(x+7)^{-1/3}$ si ha $f'(1) = 1/3$,
di conseguenza otteniamo $y = 2 - \frac{1}{2}(x+1)$, ovvero $3y = x + 11$.

(2) $f'(x) = -2x^2 + 4x(x^2 - x - 1)^2$,
$g'(x) = -\frac{1}{5(x+1)^{4/5}}$,
$h'(x) = \log(x-1) + \frac{x+1}{x-1}$.

(3) $\int_1^2 (3 + \frac{4}{x})\, dx = (3x + 2\sqrt{x})\Big|_1^2 = (6 + 2\sqrt{x}) - (3+2) = 1 + 2\sqrt{2}$,
$\int_0^\pi (2x^3 - \cos x)\, dx = (\frac{x^4}{2} - \sin x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^4}{2}$,
$\int_0^2 \frac{x^2-3x-5}{x+2}\, dx = \int_0^2 (x - 5 + \frac{5}{x+2}) dx = (\frac{x^2}{2} - 5x + 5\log|x+2|)\Big|_0^2 = (2 - 10 + 5\log 4) - 5\log 2 = -8 + 5\log 2$.

(4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} + x\cos x}{x - 3x^4 - \sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-3x^4} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - (1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2} - x^{5/3} + x - 3}{(x^5 - 2x + 3)^{1/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^{5/3}}{x^{5/3}} = -1$.

(5) Sia $p = 0.1$ la probabilità che una farfalla data abbia ali bianche. Sia S il numero totale di farfalle dalle ali bianche trovate in un campione di $N = 450$ individui. Quello che si chiede di calcolare è $p(S > 50)$. S è distribuito come una binomiale con parametri N, p e quindi possiamo scrivere

$$p(S > 50) = \sum_{n=51}^{450} p(S = n) = \sum_{n=51}^{450} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \sum_{n=51}^{450} \binom{450}{n} (0.1)^n (0.9)^{450-n}.$$

Questa somma è troppo complessa per poter essere eseguita effettivamente. Fortunatamente però possiamo approssimare il calcolo richiesto utilizzando il teorema del limite centrale, poiché

$$\mu = M[S] = 450 * 0.1 = 45 \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}[S] = 450 * 0.1 * 0.9 = 40.5$$

così che l'approssimazione sarà accettabile. Abbiamo

$$p(S > 50) = p(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} > \frac{50-45}{\sqrt{4.5}}) = p(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} > 0.78) = 1 - \Phi(0,78) \approx 22.8\%.$$

Con l'altra approssimazione si ha

$$p(S \geq 51) = p(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} > \frac{51-45}{\sqrt{4.5}}) = p(\frac{S-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} > 0.94) = 1 - \Phi(0,94) \approx 17.4\%$$

Il valor medio delle due stime dà $(22.8\% + 17.4\%)/2 = 20.1\%$, (in buon accordo con il dato vero, che è pari a 19.2%).

(6) Il numero medio di terremoti è semplicemente il numero di terremoti registrati in 120 anni / 120 anni, ovvero $87/120 = 0.725$. In base a questo dato, la probabilità che in

un anno qualsiasi si verifichino esattamente n terremoti ha distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 0.725$, e quindi

$$p(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi

$$p(2) = e^{-0.725}\frac{0.725^2}{2!} \approx 12.7\%.$$

Ci si attende quindi che su un totale di 120 anni, in $120 \cdot 0.127 \approx 15$ di essi si siano verificati esattamente due terremoti all'anno.

(7) Le probabilità sono quindi

	0	A	B	AB
Rh+	0.38	0.25	0.11	0.06
Rh-	0.07	0.06	0.04	0.03

con marginali pari a:

	0	A	B	AB	
Rh+	0.38	0.25	0.11	0.06	0.8
Rh-	0.07	0.06	0.04	0.03	0.2
	0.45	0.31	0.15	0.09	

Si ha quindi:

$$p(\text{gruppo non 0}) = p(\{A, B, AB\}) = p(A) + p(B) + p(AB) = 0.31 + 0.05 + 0.09 = 0.55 = 55\%,$$

$$\begin{aligned} p(\text{gruppo } AB \text{ o fattore } Rh+) &= p(\text{gruppo } AB \cup \text{fattore } Rh+) \\ &= p(AB) + p(Rh+) - p(AB \cap Rh+) = 0.09 + 0.8 - 0.06 \\ &= 0.83 = 83\%, \end{aligned}$$

$$p(Rh - |A) = \frac{p(\{Rh-\} \cap \{A\})}{p(A)} = \frac{p(Rh-, A)}{p(A)} = \frac{0.06}{0.31} \approx 19.2\%.$$

Infine, è ragionevole supporre che la scelta delle tre persone con gruppo B avvenga in condizioni di indipendenza, per tale motivo

$$p(\text{scelte tre persone con gruppo } B) = p(\{B\}) \cdot (\{B\}) \cdot (\{B\}) = p(\{B\})^3 = 0.15^3 \approx 0.3\%.$$

Questo però solo la scelta delle tre persone non esclude dalle scelte successive le persone già scelte (ovvero solo se la la scelta avviene con reimmissione). Se si desidera invece calcolare la probabilità che scelte tre persone **distinte**, esse abbiano gruppo B si dovrà tener conto che ad ogni estrazione successiva, la persona scelta al passo precedente non è più disponibile, e così si avrà

$$p(\text{tre persone distinte con gruppo } B) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} \cdot \frac{13}{98} \approx 0.28\%.$$

(8) Le frequenze percentuali sono

Gruppo	Fr. assolute
0	$78/150 = 0.52$
A	$48/150 = 0.32$
B	$15/150 = 0.1$
AB	$9/150 = 0.06$

Scegliendo due persone si avranno quindi le seguenti coppie di possibili gruppi sanguigni

	0	A	B	AB
0				
A				
B				
AB				

con marginali pari a:

	0	A	B	AB	
0					0.52
A					0.32
B					0.1
AB					0.06
	0.52	0.32	0.1	0.06	

Le due persone sono scelte indipendentemente una dall'altra, quindi probabilità congiunte saranno prodotto delle corrispondenti marginali e si avrà

	0	A	B	AB	
0	0.2704	0.1664	0.052	0.0312	0.52
A	0.1664	0.1024	0.032	0.0192	0.32
B	0.052	0.032	0.01	0.006	0.1
AB	0.0312	0.0192	0.006	0.00036	0.06
	0.52	0.32	0.1	0.06	

Possiamo ora rispondere alle domande poste nell'esercizio:

$$\begin{aligned} p(\text{gruppo sanguigno uguale}) &= p((0,0)) + p((A,A)) + p((B,B)) + p((AB,AB)) \\ &= 0.2704 + 0.1024 + 0.01 + 0.00036 \approx 38\%, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &p(\text{persona 1 può donare a persona 2}) \\ &\quad = p((0,0)) + p((0,A)) + p((0,B)) + p((0,AB)) + p((A,A)) + p((A,AB)) \\ &\qquad + p((B,B)) + p((B,AB)) + p((AB,AB)) \\ &\quad = 0.2704 + 0.1664 + 0.052 + 0.0312 + 0.1024 + 0.0192 + 0.01 + 0.006 + 0.00036 \approx 65.8\%. \end{aligned}$$