

PROGETTO SAM (ANALISI MATEMATICA I)

Il sesto incontro avrà luogo **lunedì** 12 Maggio alle ore **16.30** in aula **6** del Dipartimento di Matematica. Esso sarà dedicato all'esistenza di integrali impropri e studio di funzioni integrali oltre che alla discussione di ogni problema sollevato dai partecipanti.

Gli esercizi sottoelencati saranno tra quelli svolti in aula; sarebbe utile, per gli studenti, provare a risolverli in anticipo.

Esercizio 1. Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'esistenza degli integrali seguenti

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x^{2\alpha}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} + \alpha}{x + \sin x} dx, \quad \int_0^1 \frac{(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha}{\sin(x) - \sin(x^\alpha)} dx \quad \alpha > 0.$$

Esercizio 2. Determinare lo sviluppo asintotico per $x \rightarrow 0$ della seguente funzione:

$$\int_x^1 \frac{e^u - 1}{u^2} \log u \, du.$$

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo asintotico per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$ della seguente funzione:

$$\int_0^x \frac{1}{u^{2/3} + \sin(u)} \, du.$$

Esercizio 4. Studiare le seguenti funzioni integrali:

$$\int_0^x \frac{u^3 - u}{\sin u} \, du, \quad \int_1^x \log((\sin u)^2) \, du.$$

Esercizio 5. Studiare la seguente funzione integrale; in particolare determinare il comportamento della funzione per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow -1$.

$$\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} \, du$$

Esercizio 6. Sviluppare al quarto ordine con resto di Peano nel punto $x = 0$ la funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-u} \cdot \log(1-2u) \, du.$$

Determinare poi al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + x^\alpha}{x^3}.$$