Progetto SAM (Analisi Matematica II)

L'incontro previsto per il giorno 24 giugno 2003 dalle ore 16.30 alle ore 18.30 si terrà in aula T del Dipartimento di Fisica. Sarà dedicato a successioni e serie di funzioni e verranno svolti in dettaglio gli esercizi sotto elencati. Si invitano gli studenti interessati a rivedere la teoria e a svolgere gli esercizi proposti.

Esercizi proposti

1) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^3 x^2 \mathrm{e}^{-nx}$$

stabilire se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \ .$$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-n^2 x} \ .$$

3) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{artg}\left(\mathrm{e}^{\,nx}\right) - nx}{n^2(\sqrt{n}+1)} \ .$$

Dopo aver mostrato che essa converge puntualmente su $\mathbf{R}$, determinare gli intervalli sui quali la convergenza é uniforme.

4) Stabilire se la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{xy}{n^2 + |xy|^3}$$

converge uniformemente in $\mathbf{R}^2$.

5) Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(6n^2 - x)}{n^6(x + 2n^2)} & \text{se} \quad 0 \le x \le 6n^2 \\ 0 & \text{se} \quad x > 6n^2 \ . \end{cases}$$

a) Studiare la convergenza semplice ed uniforme di $\{f_n(x)\}$ in $[0, +\infty)$.

b) Detta f la funzione limite, stabilire se è vera o falsa ciascuna delle seguenti relazioni

$$i) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^R f_n(t)\, dt = \int_0^R f(t)\, dt$$

$$ii) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \ .$$

5) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^n \chi_{[0,n\pi]}(x) \ .$$

a) Mostrare che la serie converge puntualmente su tutto $\mathbf{R}$.

b) Stabilire se la convergenza è uniforme