Progetto SAM (Analisi Matematica II)

L'incontro previsto per il giorno 8 maggio 2003 dalle ore 16.30 alle ore 18.30 si terrà in aula T del Dipartimento di Fisica. Sarà dedicato a successioni e serie di funzioni e verranno svolti in dettaglio gli esercizi sotto elencati. Si invitano gli studenti interessati a rivedere la teoria e a svolgere gli esercizi proposti.

Esercizi proposti

1) Si consideri la seguente serie di potenze nel campo reale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

a) Determinarne il raggio di convergenza

b) Calcolare, nei punti interni all'intervallo di convergenza, la somma della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n''(x)$ e da questa dedurre la somma della serie di partenza.

2) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{2}{n} + \cos^4 x\right)^n \qquad , \qquad x \in [0, \pi] \ , \ n \geq 1 \ .$$

a) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n(x)\}$ in $[0, \pi]$.

b) Studiare la convergenza puntuale della successione $\{f_n'(x)\}$ in $[0, \pi]$. Tale convergenza può essere uniforme? (Motivare la risposta).

3) Si consideri la successione $\{f_n\}$ di funzioni così definite:

$$f_n(x) = \begin{cases} \log x & , \quad 1 \leq x \leq n \\ \log n + \dfrac{x-n}{x^2} & , \quad x > n \end{cases}$$

Dopo aver tracciato un diagramma qualitativo delle funzioni f_n , studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[1, +\infty)$ della successione data.

4) Si consideri la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n^4 x^a & , \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{3n^2}\right] \\ n^4 \left(\dfrac{2}{3n^2} - x\right)^a & , \quad x \in \left(\dfrac{1}{3n^2}, \dfrac{2}{3n^2}\right) \\ 0 & , \quad x \in \left[\dfrac{2}{3n^2}, 1\right] \end{cases} \quad , \qquad a > 0$$

a) Dimostrare che per ogni $x \in [0,1]$ e per ogni $a > 0$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \ .$$

b) Stabilire per quali valori di $a > 0$ la successione f_n converge ad f uniformemente su $[0,1]$.

c) Stabilire per quali valori di $a > 0$ vale la relazione

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt \ .$$

5) Sia $E = \{w \in \mathcal{C} : Re\, w \geq 1/2\}$. Determinare per quali $z \in E$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{z^{2n}}{n^2} + \frac{1}{n^3}(z^{-1} - 1)^{3n} \right\} \ .$$

6) Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 3}$ la successione di funzioni così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \in [0, 1/n) \cup (2/n, 1] \\ x^3 - (n^2x^2 - 3nx + 2) & \text{per } x \in [1/n, 2/n] \end{cases}$$

Mostrare che tale successione converge puntualmente su $[0,1]$ e calcolare la funzione limite. Stabilire successivamente se la convergenza è uniforme in $[0,1]$.