Progetto SAM (Analisi Matematica II)

L'incontro previsto per il giorno 26 giugno 2003 dalle ore 16.30 alle ore 18.30 si terrà in aula T del Dipartimento di Fisica. Sarà dedicato a forme differenziali e verranno svolti in dettaglio gli esercizi sotto elencati. Si invitano gli studenti interessati a rivedere la teoria e a svolgere gli esercizi proposti.

Esercizi proposti

1) Si consideri la forma differenziale

$$\frac{y^2}{x^2+y^4}\,dx - \frac{2xy}{x^2+y^4}\,dy\ .$$

a) Stabilire se essa è esatta in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$ e, in caso affermativo calcolarne il potenziale.

b) La forma data è esatta in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Giustificare la risposta.

2) Sia g una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ e sia ω la forma differenziale in $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ definita da

$$\omega(x,y) = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\,g(x^2+y^2)\right] dx + \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x\,g(x^2+y^2)\right] dy$$

i) Determinare le eventuali funzioni g per cui ω è chiusa in $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

ii) Esistono funzioni g per cui ω è esatta in $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$? In caso affermativo determinare un potenziale di ω .

3) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2xy}{x^2+y^2+\mathrm{e}^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Verificare che esso ammette una ed una sola soluzione $y = y(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$.

b) Determinare $y(x)$.

c) Tracciare un diagramma qualitativo di $y(x)$ che ne evidenzi i limiti, gli eventuali massimi e minimi, il segno, ecc. ... .

d) Stabilire se $y(x)$ appartiene a $L^1(\mathbf{R})$.

4) Si consideri la forma differenziale

$$\big(2g(x)\mathrm{e}^{\,y}+1\big)dx-\big(g(x)\mathrm{e}^{\,y}-2\big)dy\ .$$

Determinare $g\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ con $g(0)=1$ in modo che la forma sia esatta e calcolarne il relativo potenziale.

5) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\dfrac{\frac{x}{y-x}-\log\left(y-x\right)-2x-y}{\frac{x}{y-x}+x} \\ y(-1/2)=1/2 \end{cases}$$

e stabilire se la soluzione è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.