Progetto SAM (Analisi Matematica II)

L'incontro previsto per il giorno 22 maggio 2003 dalle ore 16.30 alle ore 18.30 si terrà in aula T del Dipartimento di Fisica. Sarà dedicato a successioni e serie di funzioni e verranno svolti in dettaglio gli esercizi sotto elencati. Si invitano gli studenti interessati a rivedere la teoria e a svolgere gli esercizi proposti.

Esercizi proposti

1) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$(*)_\alpha \qquad \begin{cases} y' = x^2(y^{1/3} + \alpha y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

a) Determinare, in dipendenza dal parametro reale α, la soluzione locale di $(*)_\alpha$.
b) Dimostrare che per ogni α reale esiste una ed una sola soluzione di $(*)_\alpha$ definita su tutto $\mathbf{R}$ e determinarla.
c) Disegnare, in dipendenza dal parametro reale α, un diagramma qualitativo della soluzione di $(*)_\alpha$ definita su tutto $\mathbf{R}$.

2) a) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x \\ y(\pi/4) = \alpha \\ y'(\pi/4) = \beta \end{cases} \quad , \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R} .$$

b) Determinare α e β in modo che esista finito $\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^2}$ dove y é la soluzione del problema di cui al punto a).

3) Scrivere, in dipendenza del parametro reale c , la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\log x}{x} + 1 \\ y(1) = c \end{cases} .$$

Stabilire se esistono valori di c per cui la soluzione risulta limitata in un intorno di 0 e valori per cui risulta limitata in un intorno di $+\infty$; in caso affermativo determinare tali valori.

4) Si consideri la seguente equazione differenziale

$$3xy^2y' = x^3 - y^3 .$$

a) Determinare l'integrale generale.

b) Tracciare il diagramma delle soluzioni soddisfacenti la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{con} \quad x_0 y_0 \neq 0 \ .$$

c) Tracciare il diagramma della soluzione soddisfacente la condizione iniziale

$$y(0) = 0 \ .$$

5) Si consideri la seguente equazione differenziale

$$x^3 y''' + |x| y' = |x| \ .$$

a) Determinarne le soluzioni per $x \neq 0$.

b) Stabilire se esistono soluzioni definite su tutto $\mathbf{R}$ e, in caso affermativo, calcolarle.