PROGETTO SAM (ANALISI MATEMATICA II)

Il terzo incontro avrà luogo **martedi** 25 maggio dalle ore **15.30** alle ore **17.30** nell'aula **3** del Dipartimento di Matematica. Esso sarà dedicato alla teoria della misura.

Esercizio 1. Sia

$$f(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y^2 \sqrt[3]{y/x}}{(3+x^4+y^4)^n}.$$

stabilire se tale funzione appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2)$ ed in caso affermativo calcolarne il valore.

Esercizio 2. Per quali $\alpha, \beta \geq 0$ le funzioni

$$f_\beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\cdot n^\beta}}{(1+x^2)^n},$$

appartengono ad $L^1((\alpha, +\infty))$?

Esercizio 3. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{1+(x+y)^\alpha}$$

appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$?

Esercizio 4. Per $x \geq 0$ si consideri la successione:

$$f_n(x) = \frac{\chi_{[n,2n]}(x)}{1+x^{1/n}}.$$

E' vero che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx\ ?$$

Esercizio 5. Per ogni valore $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare il valore di

$$\int_D x^\alpha y^{\alpha+1}\ dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ :\ xy < 1\}$.

Esercizio 6. Per ogni valore $\alpha \in \mathbb{R}$ stabilire l'esistenza del seguente integrale

$$\int_D \frac{\sqrt{y}}{(x^2+y^2)^\alpha}\ dxdy$$

dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y < 1\}$; successivamente calcolarne il valore per $\alpha = 3/2$.

Esercizio 7. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_D \frac{\sqrt{yz/x}}{1 - x^2 - y^2} \, dxdydz$$

dove $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x < y, \ 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$.

Esercizio 8. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_D \frac{dxdy}{x}$$

dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| > 1, \ 1 < x^2 - y^2 < 4\}$.

Esercizio 9. Calcolare il volume della regione

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 1, \ z^2 - x^2 - y^2 > 0\}.$$

Esercizio 10. Calcolare il volume della regione

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} < 1\}.$$

(Suggerimento: usare la trasformazione $x = X^4$, $y = Y^4$, $z = Z^4$.)

Esercizio 11. Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)$ attraverso la superficie

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 = 1\}.$$

E' possibile utilizzare la formula di Stokes in questo caso?