## PROGETTO SAM (ANALISI MATEMATICA II)

I prossimi incontri, che avranno luogo il **mercoledì** dalle ore **17** alle ore **19** nell'aula **T** del Dipartimento di Fisica, saranno dedicati alla teoria della misura e dell'integrazione, con particolare riferimento al calcolo degli integrali multipli.

**Esercizio 1**. Dopo averne verificato la misurabilità, calcolare la misura di Lebesgue degli insiemi

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 < x^2 + y^2 < 2x,\ 1 \le z \le x^2 + y^2\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4,\ 0 < x^3 < z < x\}\ .$$

**Esercizio 2**. Dato

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0,\ z - 2 < x^2 + y^2 < (x^2 + y^2)^2\}\ ,$$

calcolare

$$\int_E (1 + z^2) e^{-x^2 - y^2}\, dxdydz\ .$$

**Esercizio 3**. Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \frac{x(x^2 + 4y^2)^\alpha}{x^2 + y^2}$$

è integrabile secondo Lebesgue sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x/2,\ x^2 + 4y^2 > 1\}\ .$$

**Esercizio 4**. Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \frac{y \operatorname{artg} y}{x^\alpha}$$

è integrabile secondo Lebesgue sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ |y| < x^2,\ |y| < 1/x\}\ .$$

**Esercizio 5**. Verificare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{x - y}{2x - y}$$

è integrabile sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x - y < 3,\ 0 < y < 2\}$$

e calcolare $\displaystyle\int_E f$ .

**Esercizio 6.** Calcolare

$$\int_E \frac{(y-x)^2}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ y > x - 1/x,\ (y-x)\cdot(x^2+y^2-1) < 0\}.$$

**Esercizio 7.** Dopo aver verificato che

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x + 5 - y^2/2 = 0\}$$

è una superficie regolare, calcolare la misura superficiale $\sigma(E)$ dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in S : y > 0,\ y + 2z > 0,\ y^2 + 4z^2 < 3\}.$$

**Esercizio 8.** Sia $S$ il grafico della funzione

$$f(x,y) = \log x - \log y$$

su $\Omega = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ e

$$E = \{(x,y,z) \in S : x \in (1,2),\ y \in (1,2)\}.$$

Calcolare

$$\int_E e^z \sqrt{x^2+y^2+x^2y^2}\,d\sigma\ .$$