Successioni di funzioni

Determinare l'insieme di convergenza puntuale, e discutere la convergenza uniforme, delle seguenti successioni di funzioni.

1] $f_k(x) = k^{-k}\left(1 + k\left|\tan x\right|\right)^k$.

2] $f_k(x) = x^k e^{x/k} \quad (x > 0)$.

3] $f_k(x) = \log\left(\dfrac{kx+1}{kx-1}\right) \quad (x > 1)$.

4] $f_k(x) = \sin\left(\dfrac{2x+\pi k}{2k+3x}\right) \quad (x \geq 0)$.

5] $f_k(x) = \left(x^{2k} + e^{-kx}\right)^{1/k}$.

6] $f_k\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+kx}}$

7] $f_k\left(x\right) = \dfrac{\pi kx}{\pi + 4kx^2}$

8] $f_k\left(x\right) = \dfrac{3k^2 x}{\left(1 + k\left|x\right|\right)^2}$

9] $f_k\left(x\right) = \dfrac{\left(k-x\right)^2}{k^2+x^2}$

10] $f_k\left(x\right) = \dfrac{x^3 - kx^2}{k\left(x^2+1\right) + x^4}$

11] $f_k\left(x\right) = \begin{cases} \log x & \text{se } x \in (0,k) \cup (k+1,+\infty) \\ \\ \log x + \dfrac{\left(x-k\right)\left(k+1-x\right)}{k} & \text{se } x \in [k,k+1] \end{cases}$

12] $f_k\left(x\right) = \dfrac{x^3 - kx}{x^2+k}$

Serie di funzioni, serie di potenze

Determinare l'insieme di convergenza puntuale, e discutere la convergenza uniforme, delle seguenti serie di funzioni.

1] $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \sin\left(\frac{x}{k^4}\right)$, $|x| \leq \pi/2$.

2] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2 x}$, $x \in (0, +\infty)$.

3] $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{1+kx^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

4] $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{k+\sin x}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx}{e^{kx}}$, $x \in \mathbb{R}$.

6] $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)^k \frac{1}{k}$.

7] $\sum_{k=1}^{+\infty} kxe^{k\left(x^2-x\right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

8] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^{3/2}x}$, $x \in \mathbb{R}$.

9] Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,(ex)^n}{(n+1)^2}$.

10] La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R_1 = 1$, e la $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ha raggio $R_2 = 2$. Cosa si può dire dei raggi di convergenza delle serie:

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2a_n+b_n)x^n \quad ; \quad ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{n}a_n+b_n)x^n \quad ; \quad iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+\sqrt{|b_n|})x^n \quad ?$$

11] Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+e^{\alpha n})}{1+n^\alpha}(x-e^\alpha)^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare per quali α la serie converge in tutti i punti dell'intervallo $(2, 3)$.