Progetto SAM (Analisi Matematica II)

L'incontro previsto per il giorno 15 maggio 2003 dalle ore 16.30 alle ore 18.30 si terrà in aula T del Dipartimento di Fisica. Sarà dedicato a successioni e serie di funzioni e verranno svolti in dettaglio gli esercizi sotto elencati. Si invitano gli studenti interessati a rivedere la teoria e a svolgere gli esercizi proposti.

Esercizi proposti

1) Siano

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x-y)^\alpha} & , \quad x+y<2 \\ 0 & , \quad x+y \geq 2 \end{cases}$$

$$D_\alpha = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ \alpha \max(x,y) \leq 2\}$$

dove α è un parametro reale positivo.

Stabilire per quali valori di α si ha $f_\alpha \in L^1(D_\alpha)$.

2) Sia

$$f_n(x) = \frac{\sqrt[n]{|sinx|}}{x(x+\mathrm{e}^{-nx^2})}$$

a) Mostrare che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $f_n \in L^1(\mathbf{R}^+)$

b) Dopo aver determinato $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, stabilire se $f \in Ł^1(\mathbf{R}^+)$

c) Stabilire se vale la seguente uguaglianza $\int_{\mathbf{R}^+} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^+} f_n$.

3) Per a, b parametri reali positivi siano:

$$D_a = \{(x,y) : \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ x^a \leq y \leq 1\} \ ,$$

$$F(a,b) = \iint_{D_a} \frac{y}{(x^2+y^2)^b} \, dx \, dy \ .$$

i) Determinare l'insieme $E := \{(a,b) : F(a,b) < +\infty\}$ e rappresentarlo graficamente.

i) Dimostrare che $F \in \mathcal{C}^1(E)$ e scrivere l'espressione delle derivate parziali prime motivando il procedimento seguito.

4) Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2\,(1-\cos(x/n))}{(x+n)^3\,\log^2(x+n)}\,dx \;=\; 0\ .$$

5) Calcolare, in dipendenza dal parametro reale positivo α , la misura dell'insieme

$$E_\alpha := \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : z>0\ ,\ x\geq y\ ,\ (z+1)^\alpha(x^2+4y^2)\leq 1\}\ .$$