PROGETTO SAM (ANALISI MATEMATICA II)

L' incontro di **mercoledì 26 marzo** (aula **T** del Dipartimento di Fisica dalle ore **17** alle ore **19**) sarà dedicato alle forme differenziali.

Esercizio 1. Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è l'arco il cui sostegno è la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

percorso in senso antiorario e ω è la forma differenziale

$$\omega = \left\{ \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \right\} dx + \left\{ \frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \right\} dy.$$

La forma ω è esatta su $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$? La forma ω è esatta su $\mathbb{R}^2 - \underline{0}$?

Esercizio 2. Per quali valori del parametro reale a la forma differenziale

$$\omega_a = (x^4 + axe^z)dx - y^6 dy + e^z dz$$

è esatta in $\mathbb{R}^3$? Calcolare poi $\int_{\underline{\varphi}} \omega_a$ dove

$$\underline{\varphi}(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad t \in [0, 4\pi].$$

Esercizio 3. La forma differenziale

$$\omega = \frac{x^3 + xy^2 + y}{x^2+y^2} dx - \frac{x + 3x^2 y + 3y^3}{x^2+y^2} dy$$

è esatta su $\mathbb{R}^2 - \underline{0}$?.Calcolare poi per ogni $r > 0, r \neq 1$

$$\int_{\underline{\varphi}_r} \omega \ ,$$

dove

$$\underline{\varphi}_r(t) = (r\cos t, 1 + r\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 4. Verificare che la forma differenziale

$$\omega = x\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} - 1\right) dx + y\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + 1\right) dy + z\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + 1\right) dz$$

è esatta su $\mathbb{R}^3 - \underline{0}$ e calcolarne il potenziale F tale che $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 0$. Verificare poi che

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\right\}$$

è una superficie regolare e scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.