I **vettori**

rappresentati come *segmenti orientati*

(rappresentazione *geometrica*)

si intendono con l'origine coincidente con l'origine del *sistema di riferimento* (assi coordinati)

eccetto nei casi in cui si parli di "*vettori applicati*" (fisica) per i quali si specifica la collocazione del punto origine (*punto di applicazione*)

spazio:

monodimensionale (retta orientata, **x**),

bidimensionale (piano, **xy**)

tridimensionale (spazio tridim., **xyz**)

N-dimensionale (x_1,x_2,…,x_N)

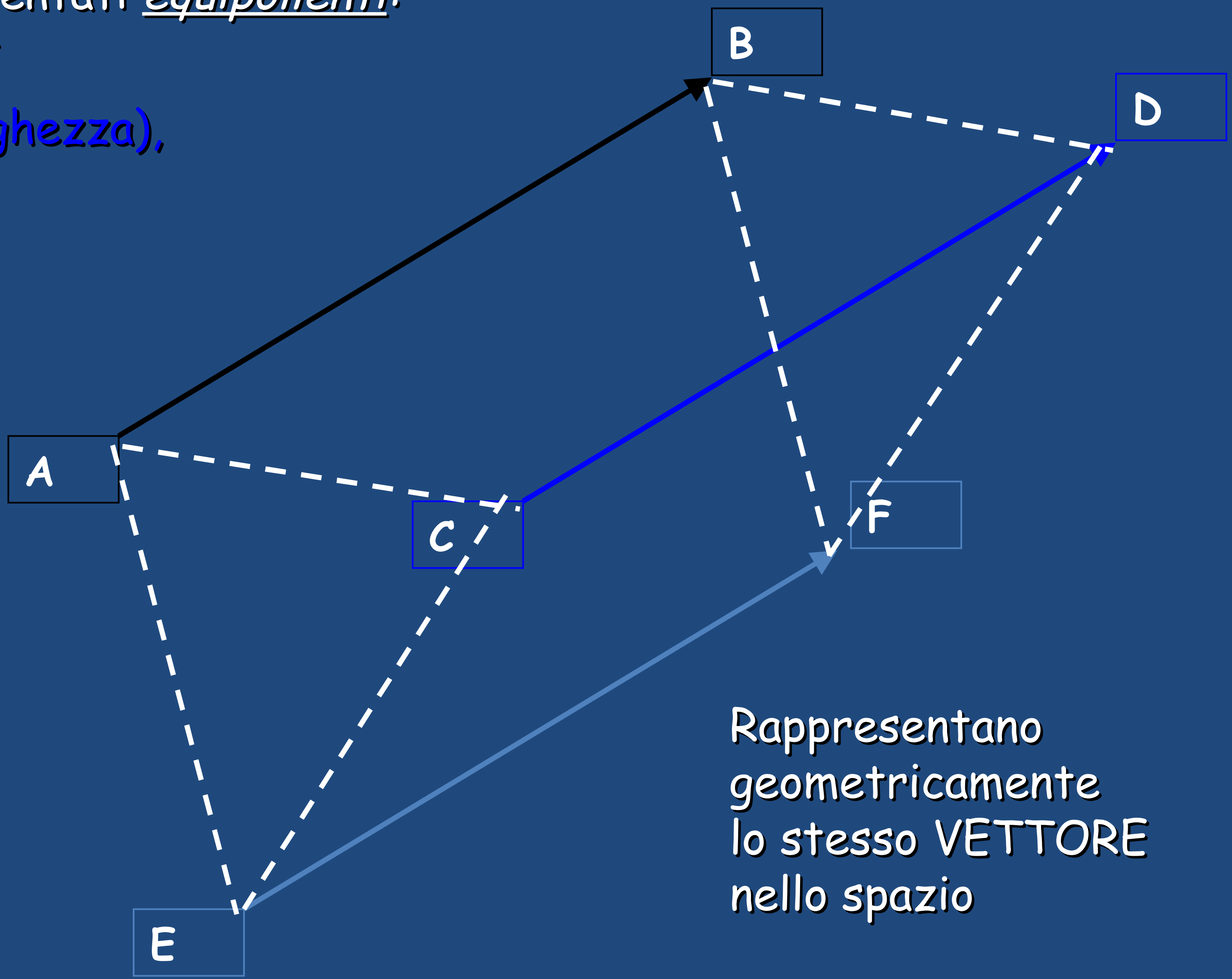
Segmenti orientati *equipollenti*:

hanno stessi

modulo (lunghezza),

direzione,

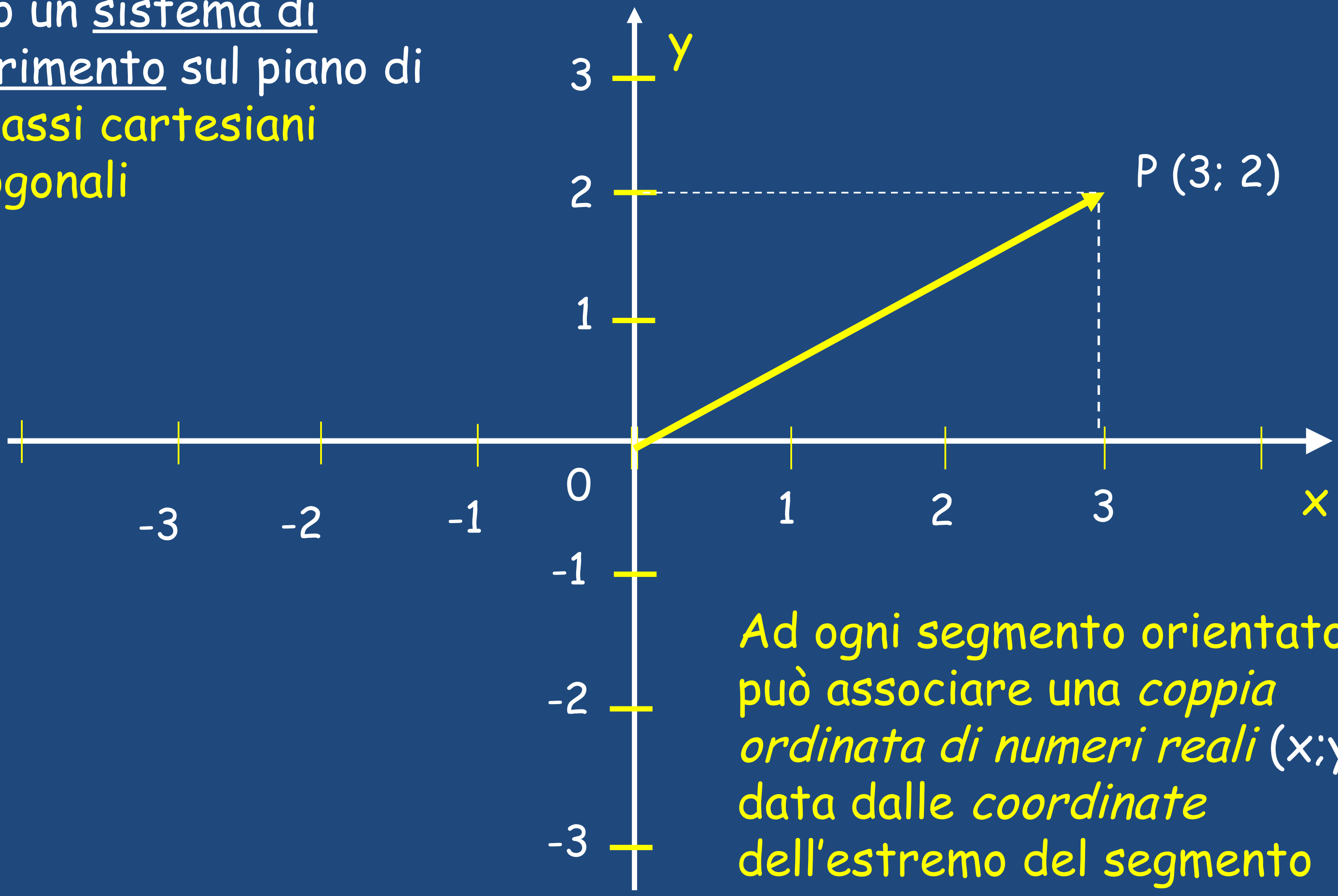
verso



Rappresentano geometricamente lo stesso VETTORE nello spazio

Vettori dello spazio bidimensionale (*R* ^{2})

Dato un sistema di riferimento sul piano di due assi cartesiani ortogonali

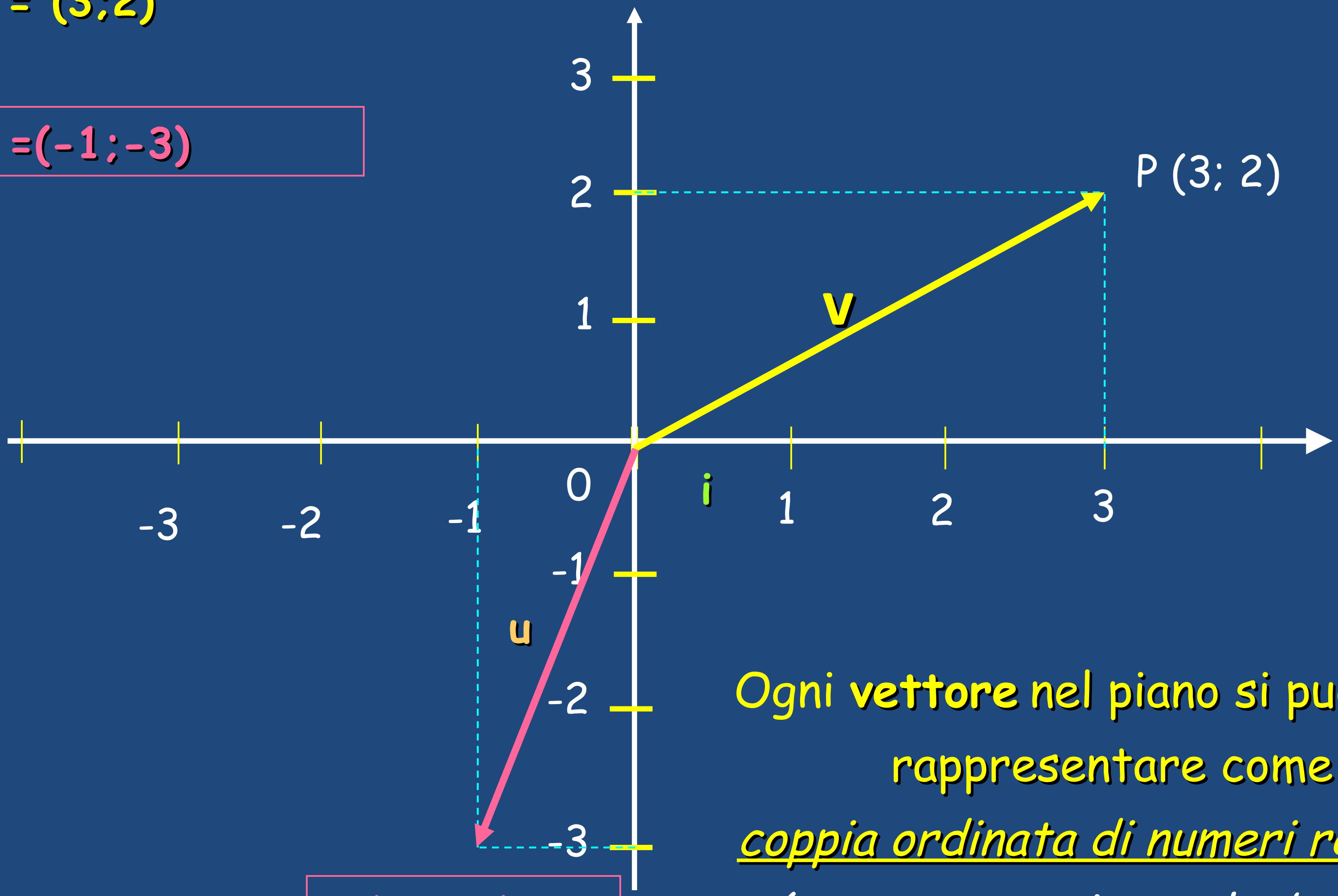


Ad ogni segmento orientato si può associare una *coppia ordinata di numeri reali* (x;y), data dalle *coordinate* dell'estremo del segmento orientato

Vettori dello spazio bidimensionale (R^2)

v = (3;2)

u =(-1;-3)



u (-1; -3)

Ogni **vettore** nel piano si può quindi rappresentare come

coppia ordinata di numeri reali

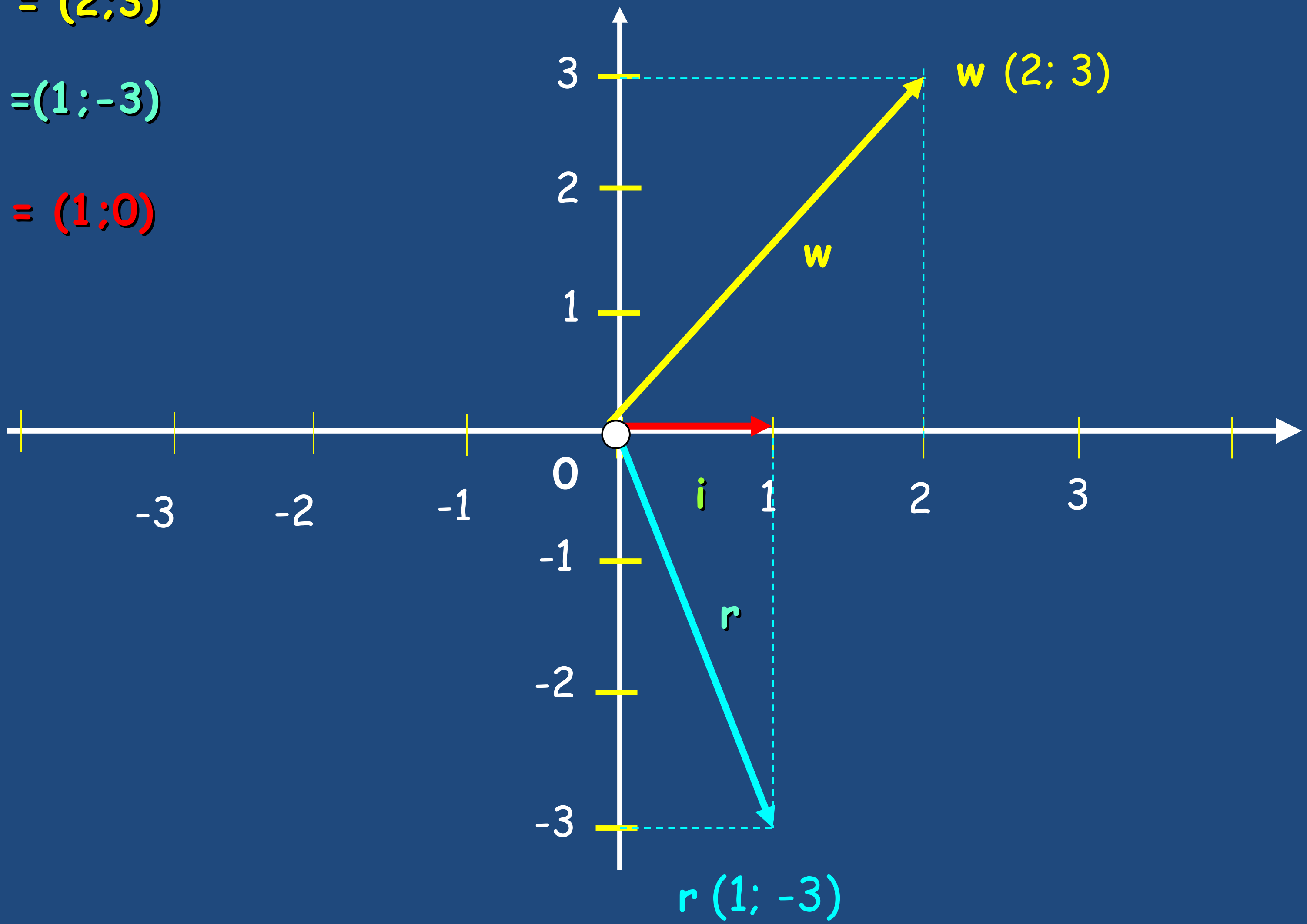
(rappresentazione *algebrica* o analitica)

Vettori dello spazio bidimensionale (R^2)

w = (2;3)

r =(1;-3)

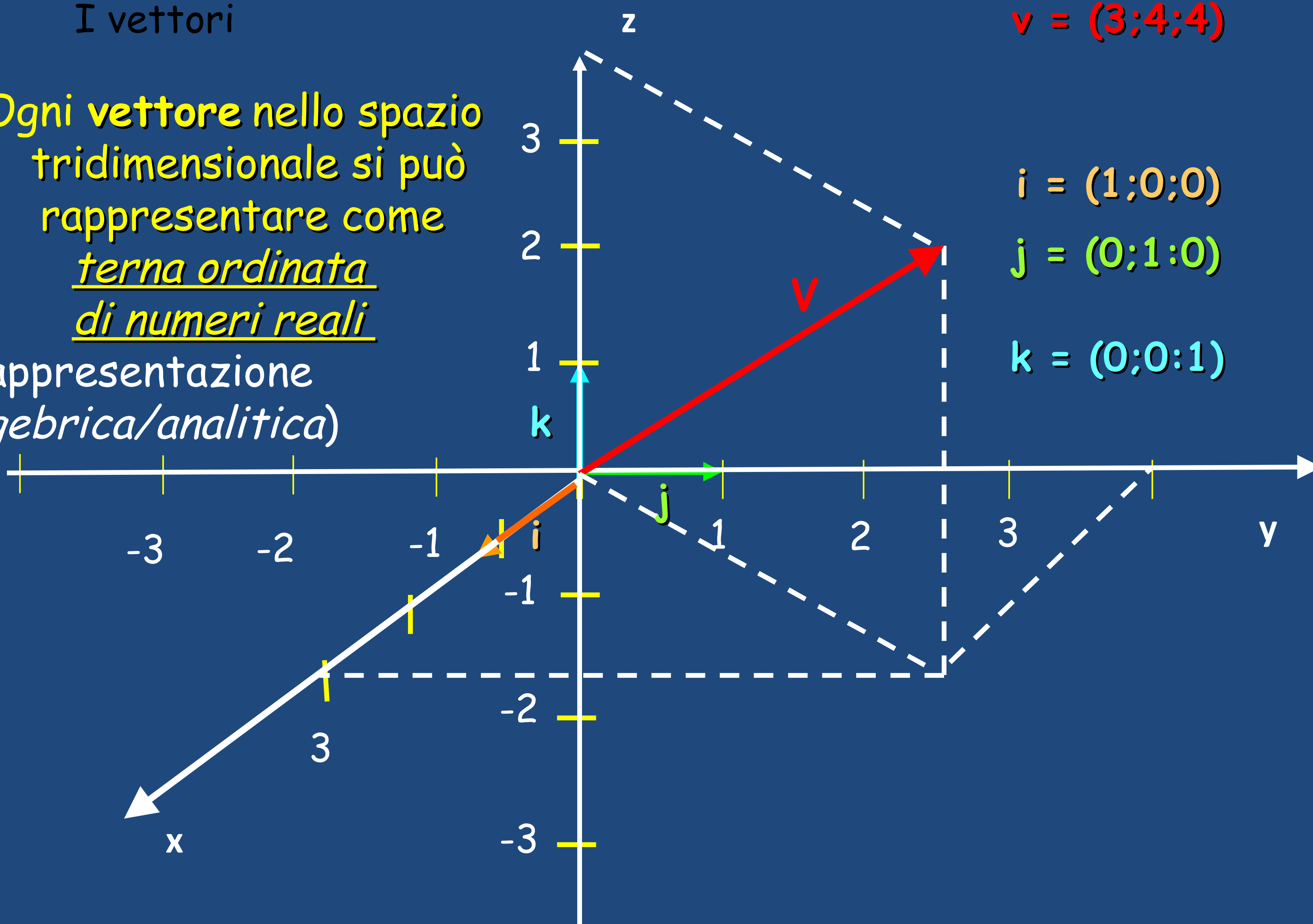
i = (1;0)



Vettori dello spazio tridimensionale (R^3)

I vettori

Ogni **vettore** nello spazio tridimensionale si può rappresentare come *terna ordinata di numeri reali* (rappresentazione *algebrica/analitica*)



v = (3;4;4)

i = (1;0;0)

j = (0;1:0)

k = (0;0:1)

Modulo di un vettore

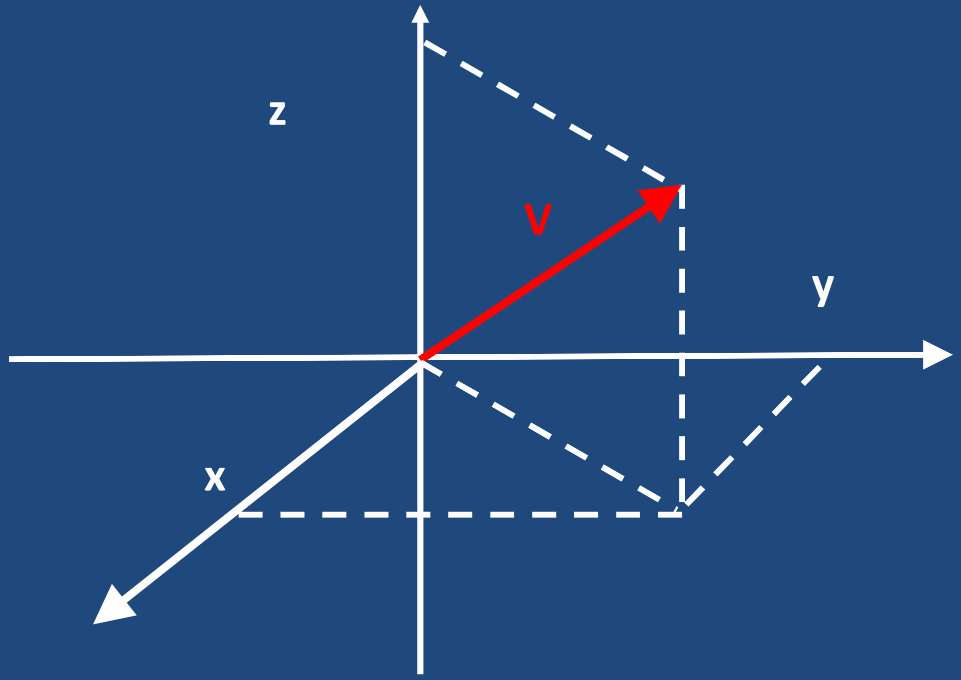
Dato il vettore **v**, il suo *modulo* $|\mathbf{v}|$ è la *lunghezza,* in valore assoluto, del segmento orientato che rappresenta il vettore (fino a tre dimensioni - spazio $\boldsymbol{R}^3$)

Se un vettore è dato mediante le sue coordinate:

v = (x; y; z) $\Rightarrow$ $|\mathbf{v}|$ = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Modulo di un vettore

La precedente relazione per il modulo di un vettore dello spazio ***R*** ^{3} (vettore a tre coordinate):



v = (x; y; z) $\Rightarrow$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

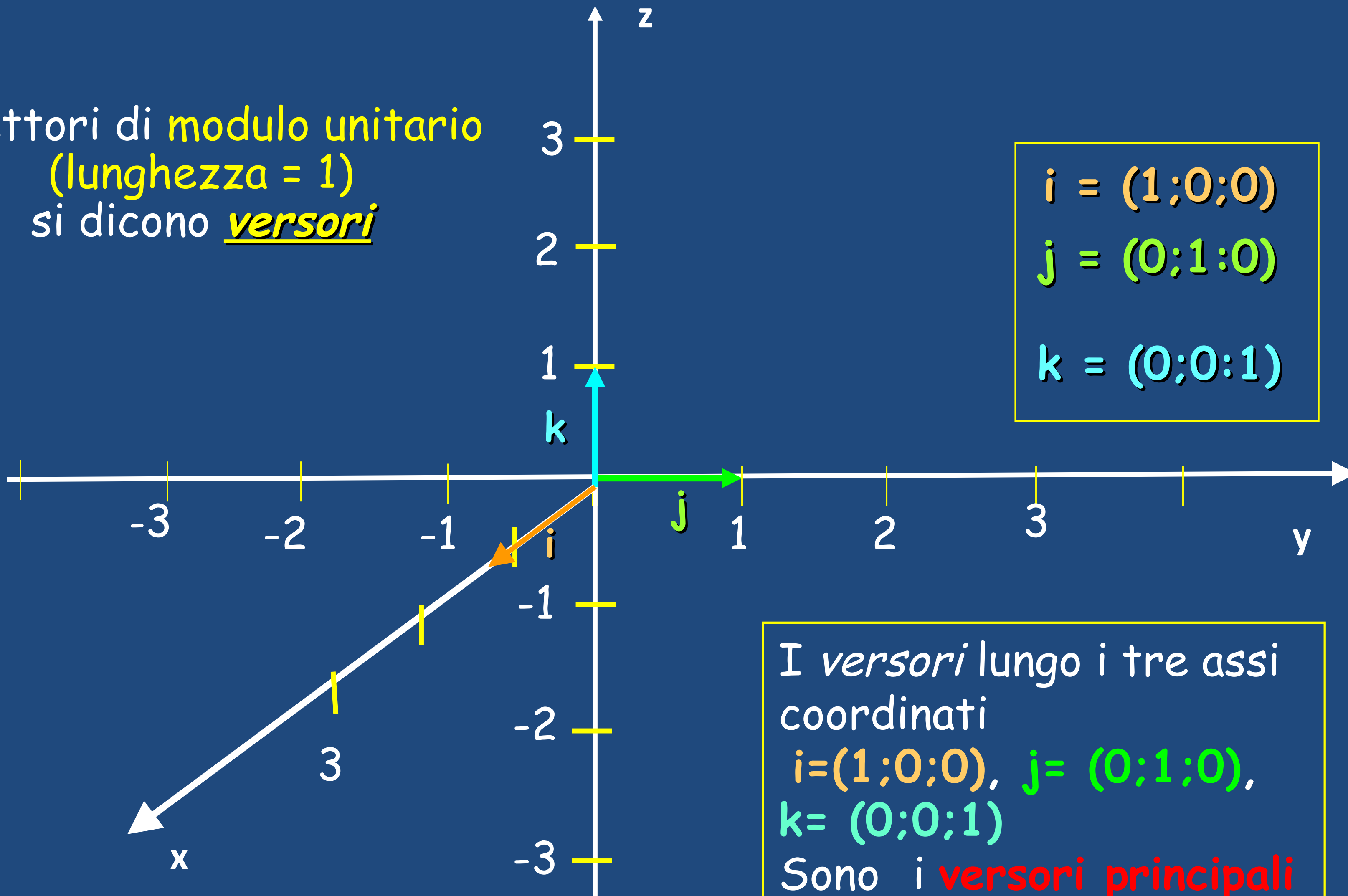
deriva dal *Teorema di Pitagora generalizzato nello spazio.*

Si generalizza ulteriormente per gli spazi astratti ***R*** ^{n} a più di tre dimensioni, portando alla già citata relazione generale:

v = (x_1; x_2; x_3; … ; x_n) $\Rightarrow$ $|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{1}^{n} {}_i x_i^{\,2}}$

Vettori dello spazio tridimensionale (R^3)

I vettori di modulo unitario
(lunghezza = 1)
si dicono ***versori***



i = (1;0;0)

j = (0;1:0)

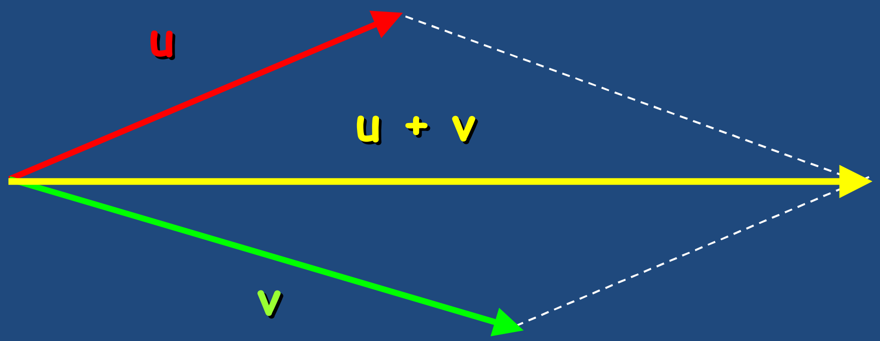
k = (0;0:1)

I *versori* lungo i tre assi coordinati
i=(1;0;0), j= (0;1;0), k= (0;0;1)
Sono i **versori principali**

Somma e differenza di vettori

In rappresentazione *geometrica* la ***somma*** di due vettori degli spazi R^2 e R^3 *è data dalla*

"regola del parallelogramma":



Somma e differenza di vettori

In rappresentazione *algebrica* la ***somma (o la differenza)*** di due vettori (di coordinate date) è un terzo vettore che ha come coordinate la somma (o la differenza) delle coordinate corrispondenti.

Es,:

dati: **u** = (1; -3; 2); **v** = (2; 0; 5)

u + v = (3; -3; 7) ; **u - v** = (-1; -3; -3)

Vettori dello spazio n-dimensionale (R^n)

Oltre le tre dimensioni non è possibile nessuna rappresentazione geometrica dei vettori, ma solo

la **rappresentazione algebrica (o analitica)**:

Un vettore è rappresentato da una

successione ordinata di n numeri (n-pla ordinata)

v = $(x_1; x_2; x_3; ....; x_n)$

Per un vettore dello spazio $\boldsymbol{R}^n$ (vettore a *n* coordinate), il suo modulo è dato da:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{1}^{n} {}_i x_i^{\,2}}$$

Distanza tra due punti

Dati due vettori:

u = (x_1; x_2; x_3)

v = (y_1; y_2; y_3)

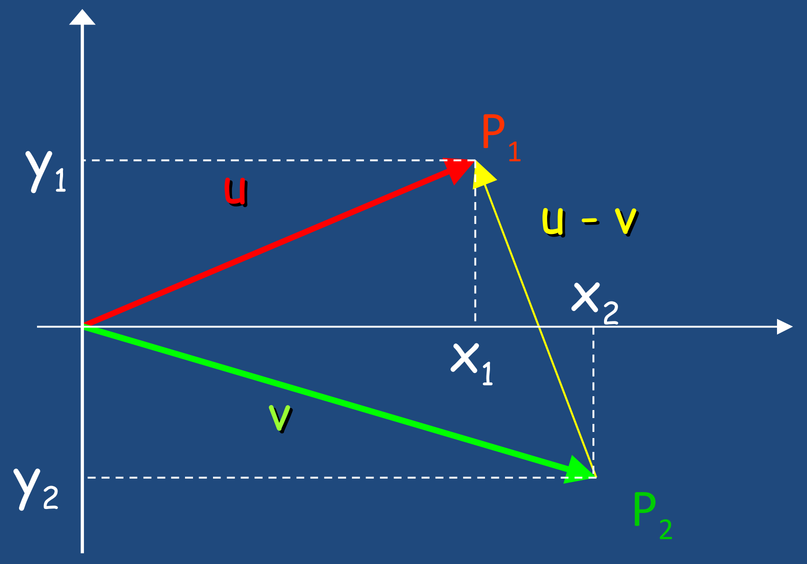
Il modulo della *differenza* tra i due vettori ***u*** e **v** (in ***R*** ^{2} o ***R*** ^{3}

|u - **v**| è dato da:

$$|u - \mathbf{v}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

dove il terzo addendo $(z_1\text{-}z_2)^2$ è nullo nel caso che i vettori siano

di *R*^{2} *(vettori del piano x, y).*



Distanza tra due punti

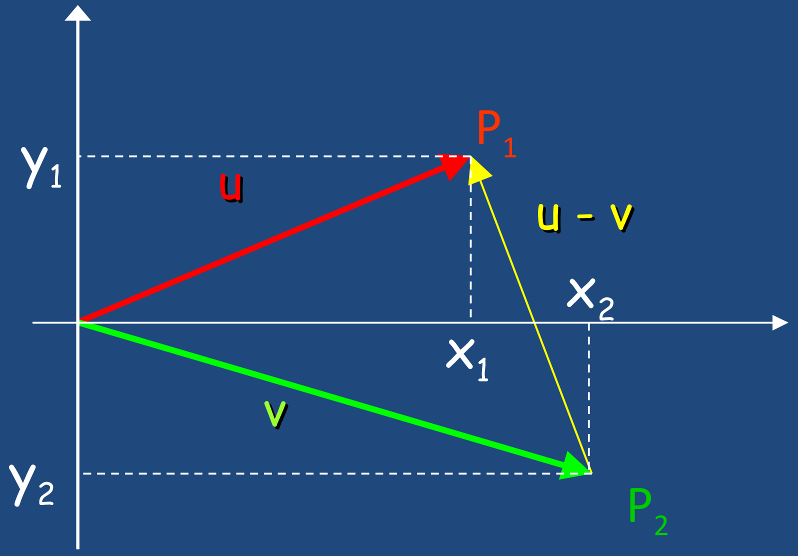
Dati due vettori:
u = (x_1; x_2; x_3); **v** = (y_1; y_2; y_3)
se consideriamo i loro estremi P_1 e P_2 (le cui coordinate sono quelle indicate), il *modulo della differenza dei due vettori* (vedi rappresentazione geometrica – dia n° 23 -) corrisponde alla distanza (numero assoluto!) tra i punti estremi P_1 e P_2.

Nell' esempio in figura abbiamo:

$P_1 = (x_1; y_1)$; $P_2 = (x_1; y_1)$

La loro distanza, $d(P_1P_2)$ è:

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



PRODOTTI

Prodotto di un numero per un vettore

Per qualsiasi insieme di vettori si definisce il
prodotto di un numero (reale) c per un vettore **v** :

$$\mathbf{u} = c\,\mathbf{v}$$

Il risultato di tale moltiplicazione è un vettore (**u**) che ha:

- stessa direzione di **v** (**u** parallelo a **v**)
- verso concorde o discorde a quello di v, a seconda che c sia rispettivamente positivo o negativo
- modulo di **u** uguale a modulo di c per modulo di **v**

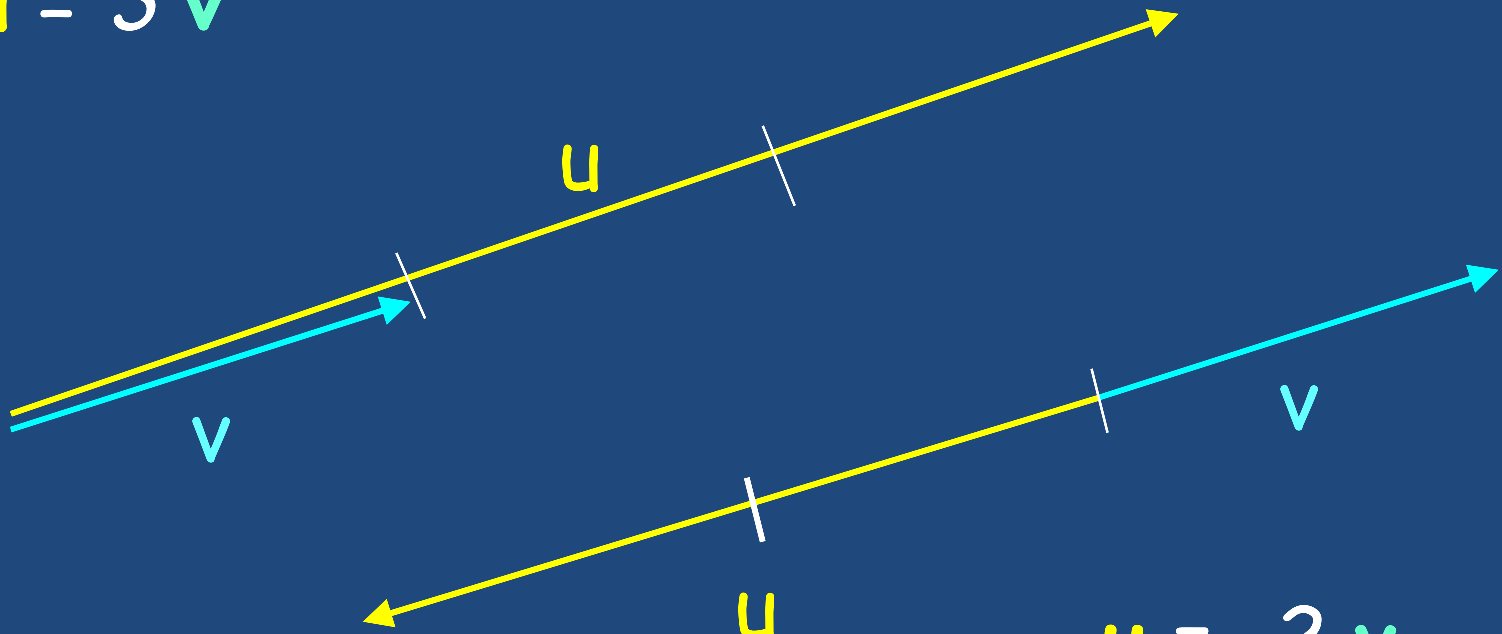
$$|\mathbf{u}| = |c|\,|\mathbf{v}|$$

PRODOTTI

Prodotto di un numero per un vettore

Es.:

$\mathbf{u} = 3\,\mathbf{v}$



$\mathbf{u} = -2\,\mathbf{v}$

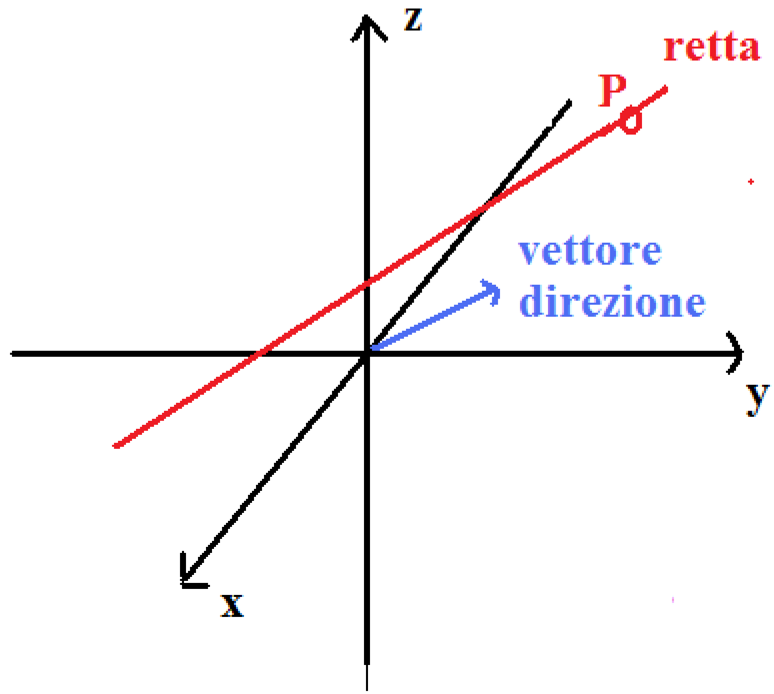
Esempio: equazione retta nello spazio

Per determinare l'equazione di una retta nello spazio passante per il punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ e parallelo al vettore (direzione) v=(a,b,c) si sfrutta il fatto Che vettori paralleli sono uno il multiplo scalare dell'altro. Quindi il vettore per P e per qualsiasi altro punto generico $Q=(x,y,z)$ è un multiplo del vettore direzione v:

$\overrightarrow{PQ} = t(a,b,c)$ dove t è un numero reale qualsiasi (scalare)

o

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (at, bt, ct)$



Equazioni di una retta nello spazio

Utilizzando le rispettive componenti si arriva a tre equazioni

$$x - x_0 = at \ , \ y - y_0 = bt \quad z - z_0 = ct$$

o

$$x = x_0 + at \ , \ y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct$$

Queste equazioni sono dete le equazioni parametriche della retta

Se le componenti del vettore direzioni sono tutte diverse da zero, ogni equazione può essere risolta rispetto al parametro t

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Queste equazioni sono dette le equazioni simmetriche della retta

Example 1: trovare le equazioni della retta passante per il punto (2, 3, -4) e parallela al vettore v=(-1, 2, 5)

Equazioni parametriche:

$$x = 2 - t \quad , \quad y = 3 + 2t \quad \text{and} \quad z = -4 + 5t$$

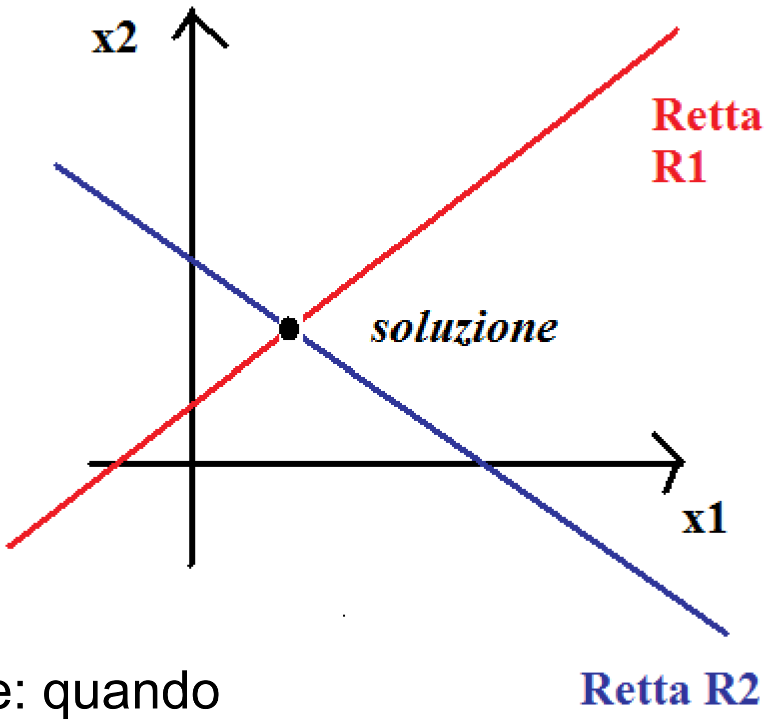
Equazioni simmetriche:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{5}$$

Sistema lineare 2x2 (due equazioni in due incognite x_1,x_2

Interpretazione geometrica:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad retta \quad R_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad retta \quad R_2 \end{cases}$$



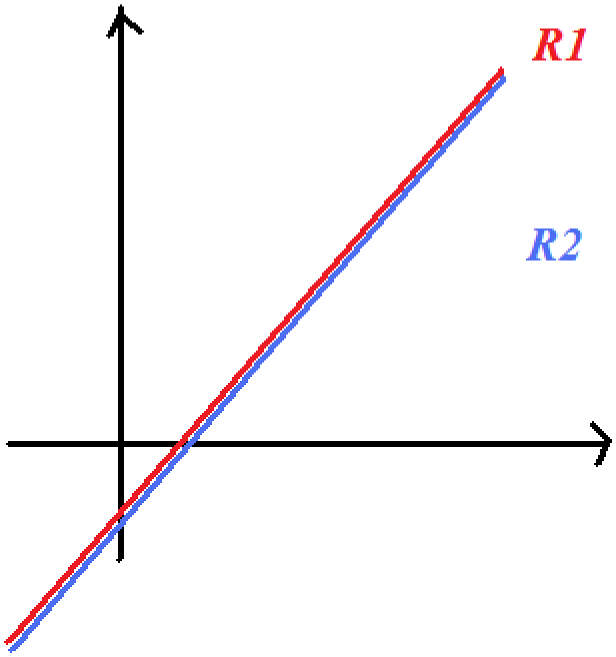
Quando esiste ed è unica la soluzione: quando
Le rette NON sono parallele.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad retta \;\; R_1 \\ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad retta \;\; R_2 \end{cases}$$

Possibilità:

Determinante

$$a_{11} / a_{12} \neq a_{21} / a_{22} \;\; \Rightarrow \;\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$



$$a_{11} / a_{12} = a_{21} / a_{22} \;\; \Rightarrow \;\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

PRODOTTO scalare (o interno)

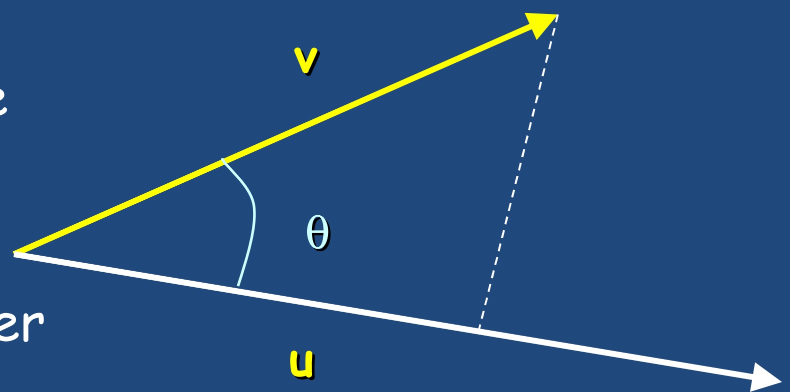
di due vettori

In rappresentazione geometrica:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$$

Prodotto dei moduli (lunghezze dei vettori) per il coseno dell'angolo tra i vettori

ovvero: modulo di un vettore per la proiezione dell'altro sulla direzione del primo



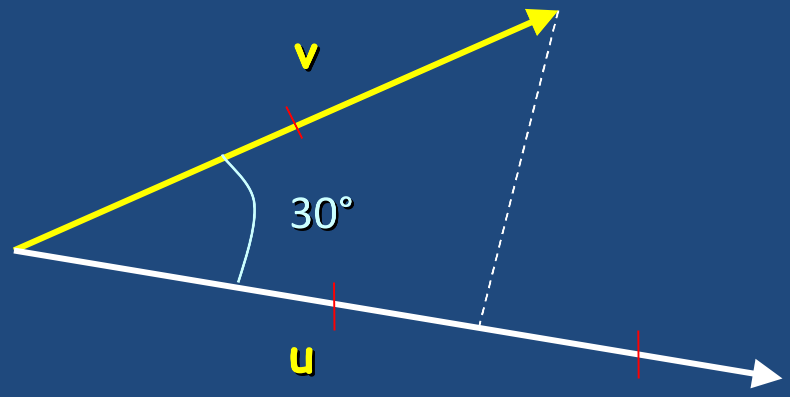
PRODOTTI

Prodotto *scalare o interno* di due vettori

Esempio 1:

$|\mathbf{v}| = 2$; $|\mathbf{u}| = 2.2$; $\theta = 30° \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{3}/2$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = 2 \bullet 2.2 \bullet \sqrt{3}/2 \approx 3.81$$



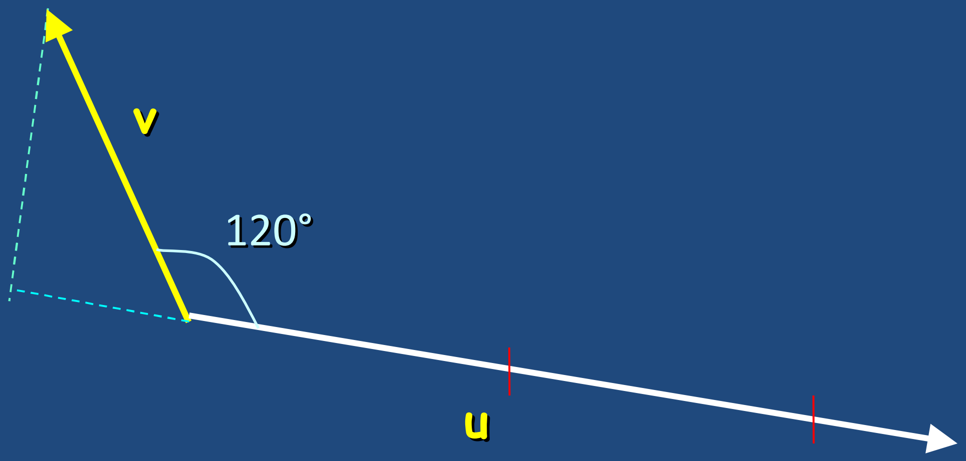
PRODOTTI

Prodotto *scalare o interno* di due vettori

Esempio 2:

$|\mathbf{v}| = 1$; $|\mathbf{u}| = 2.2$; $\theta = 120° \Rightarrow \cos\theta = -1/2$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = 1 \bullet 2.2 \bullet (-1/2) = -1.1$$



$$i \bullet k = i \bullet j = j \bullet k = 0, \quad i \bullet i = 1,\ j \bullet j = 1,\ k \bullet k = 1$$

$$U = x\,i + y\,j + z\,k$$

In <u>rappresentazione algebrica</u>:

Il *prodotto scalare* si può ottenere se sono date le coordinate dei vettori :

$\mathbf{u} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$

$\mathbf{v} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$

Il loro prodotto scalare è:

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Es.: $\mathbf{u} = (3;\ -1;\ 4)$; $\mathbf{v} = (2;\ 5;\ -3)$

$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = 3*2 + (-1)*5 + 4*(-3) = -11$

PRODOTTI

Prodotto *scalare o interno* di due vettori

In rappresentazione algebrica:

Il prodotto scalare di due vettori nello spazio n-dimensionale R^n (n coordinate):

$\mathbf{u} = (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$

$\mathbf{v} = (y_1; y_2; y_3; \dots; y_n)$

Il loro *prodotto scalare* è: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, x_i y_i$

Es.: $\mathbf{u} = (3; -1; 4; 0; 5)$; $\mathbf{v} = (2; 5; -3; 1; -2)$

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 3*2 + (-1)*5 + 4*(-3) + 0*1 + 5*(-2) = -21$

PRODOTTI

Prodotto *scalare o interno* di due vettori

Attraverso il prodotto scalare possiamo dare la:

Condizione di perpendicolarità tra due vettori :

*Due vettori (siano **u** e **v**)* non nulli sono *perpendicolari* (o *ortogonali*) se e solo se

Il loro prodotto scalare è nullo (u • v=0)

Es.: **u** = (3; -1; -1); **v** = (2; 5; 1)

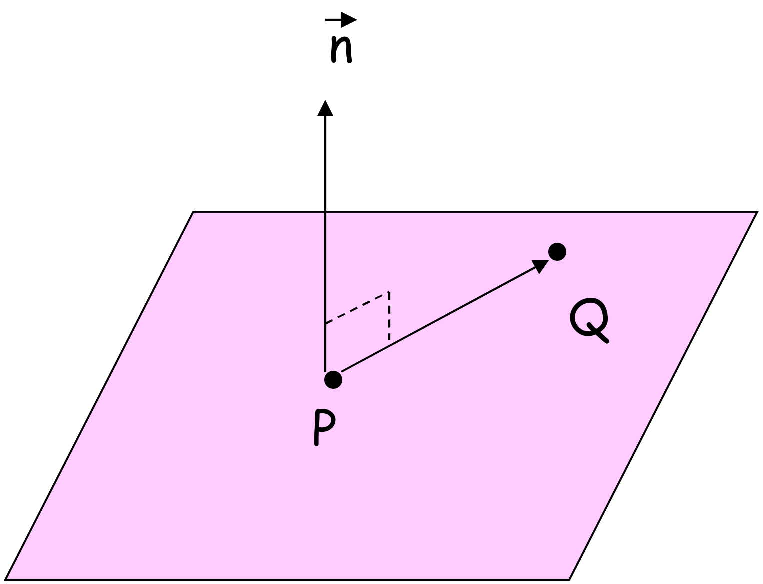
u • v = 3∗2 + (-1)∗5 + (-1) ∗(1) = 0 ;

i due vettori sono perpendicolari

Equazione di un Piano nello Space

Sia assegnato un punto P nel piano ed un vettore n normale al piano stesso. Un qualsiasi punto Q nel piano deve essere tale che $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{n}$ sono ortogonali

Quindi il loro prodotto scalare deve essere nullo.



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$(a,b,c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Esempio: Assegnato il vettore n=(3, 1, -2) normale al piano contente il punto P=(2, 3, -1), scriver l'equazione del piano.

Soluzione: Forma Standard

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$3(x - 2) + 1(y - 3) - 2(z + 1) = 0$$

Semplificando si arriva anche alla forma generale,

$$3x - 6 + y - 3 - 2z - 2 = 0$$

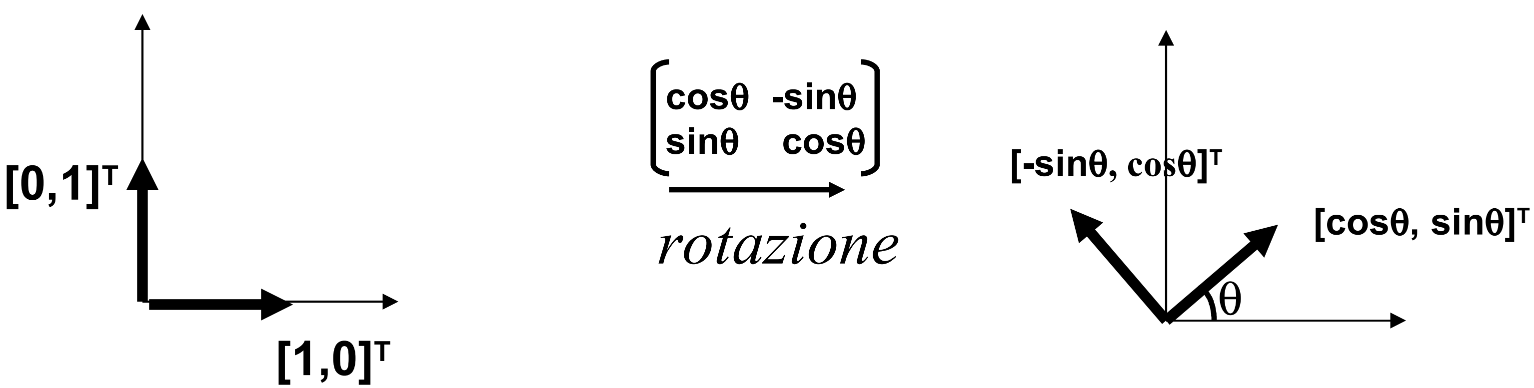
o

$$3x + y - 2z - 11 = 0$$

Componenti vettore $V=(v_1,v_2)$, nujove componenti (dopo rotazione) $V=(v'1,v'2)$, si ha:

$$v_1 \cos(\theta) - v_2 \sin(\theta) = v'_1$$
$$v_1 \sin(\theta) + v_2 \cos(\theta) = v'_2$$

(Definizione prodotto Matrice vettore)



PRODOTTO VETTORIALE:

Solo in R^3

Esso è un *vettore* e si indica con la scrittura: **u Λ v**

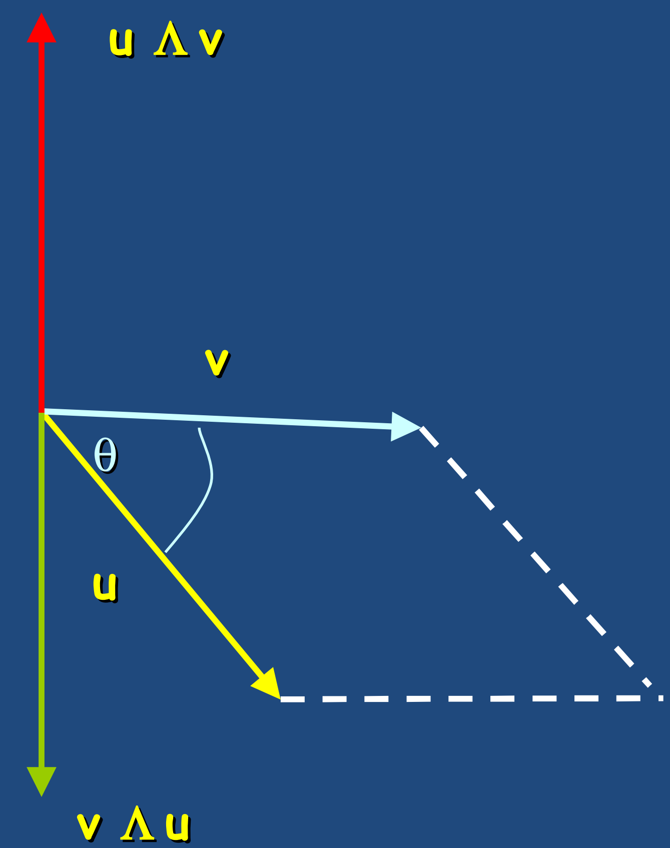
Come si calcola:

Modulo: $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\text{sen}\,\theta$

(area del parallelogrammo di lati **u** e **v**)

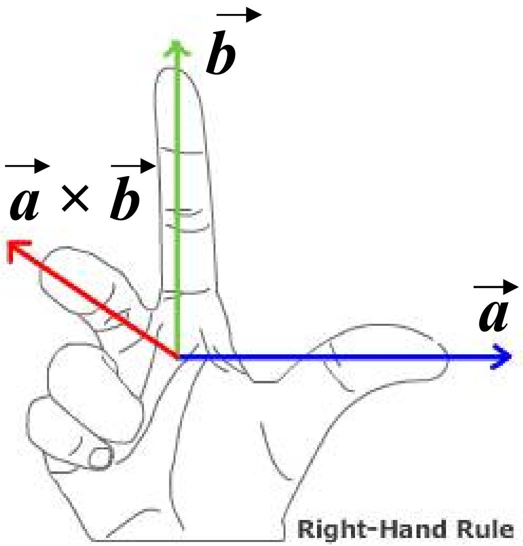
Direzione: perpendicolare al piano di **u** e **v**

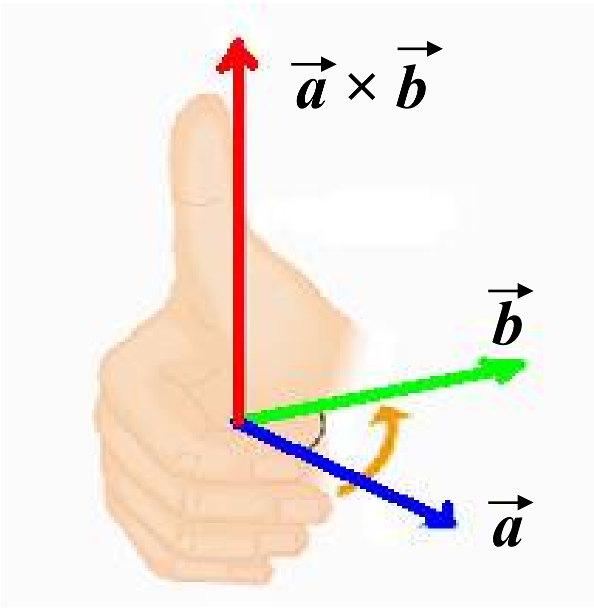
Verso: come in figura



La regola della mano destra

- <u>Prima formulazione</u>
  - Si dispone il pollice lungo il primo vettore
  - Si dispone l’indice lungo il secondo vettore
  - Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale
- <u>Seconda formulazione</u>
  - Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice
  - Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l’angolo θ di rotazione sia minore di π
  - Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettoriale





Ne *segue* che il prodotto vettoriale <u>non è commutativo</u>, ma *anticommutativo*:

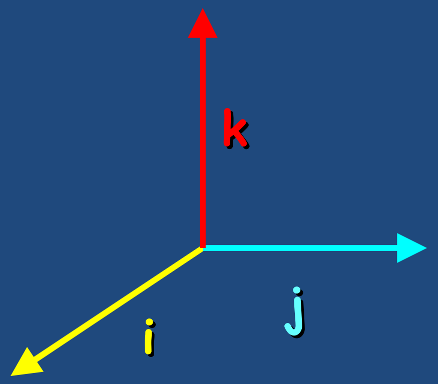
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = - \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$$

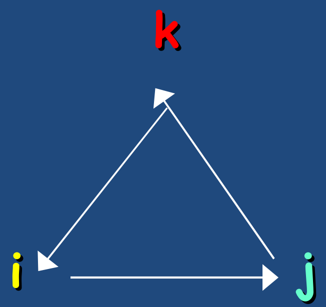
PRODOTTI

Prodotto *vettoriale* tra i versori principali **i j k**

(vettori di modulo unitario lungo x, y, z)

$i \, \Lambda \, j = k$	$j \, \Lambda \, i = -k$
$j \, \Lambda \, k = i$	$k \, \Lambda \, j = -i$
$k \, \Lambda \, i = j$	$i \, \Lambda \, k = -j$





Procedendo nel verso delle frecce, “un vertice per il successivo” dà per prodotto “il terzo vertice”, mentre nel verso contrario alle frecce otteniamo “l’opposto del terzo vertice”

PRODOTTI

Prodotto *vettoriale*

Due vettori non nulli sono paralleli se e solo se

Il loro prodotto vettoriale è nullo.

$\theta = 0$

$\theta = \pi$

Infatti due vettori paralleli (*stessa direzione*) formano un angolo θ di 0° (verso concorde) o di π (verso discorde):

In entrambe i casi sen $\theta = 0$; quindi il prodotto esterno è nullo in conseguenza del suo modulo nullo

($|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta$)

PRODOTTI

Prodotto vettoriale in rappresentzione analitica

Il prodotto esterno di due vettori di date coordinate:

$V = (x_1; y_1; z_1)$; $U = (x_2; y_2; z_2)$

si calcola esprimendoli come combinazione lineare dei versori principali **i**, **j**, **k** e applicando la proprietà distributiva

(rammentando i prodotti esterni tra i versori):

$V \wedge U = (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \wedge (x_2 i + y_2 j + z_2 k) =$

$(y_1 z_2 - y_2 z_1)\, \mathbf{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\, \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, \mathbf{k}$

Es.: $V = (1; -1; 4)$; $U = (2; 0; -3)$

$V \wedge U = [(-1)*(-3) - 0*4]\, \mathbf{i} + [4*2 - (-3)*1]\, \mathbf{j} + [1*0-2*(-1)]\, \mathbf{k} =$

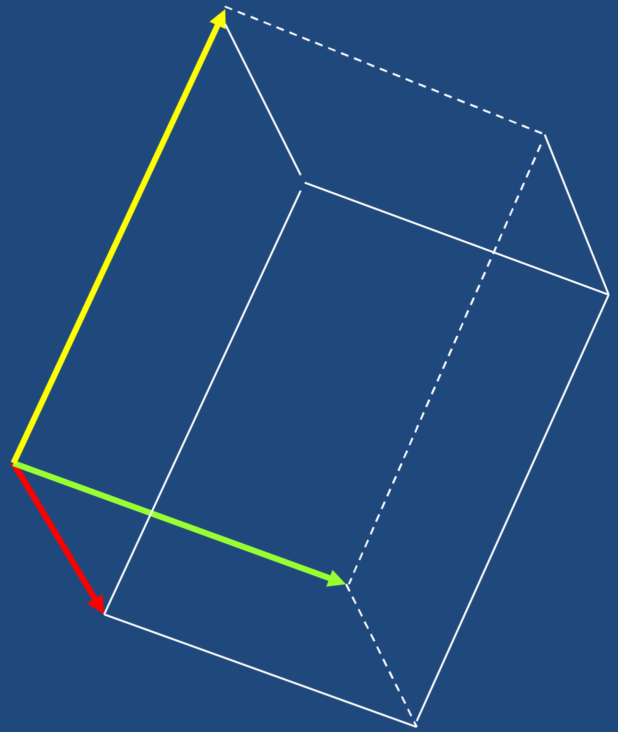
$= \mathbf{3\, i + 11 j + 2k}$

PRODOTTO misto

Implica *tre vettori* (ad. es. **u**, **v**, **w**) e si indica con la scrittura: **(u Λv) • w**

ed è un *numero (scalare)* :

il prodotto vettoriale di **u** e **v** è a sua volta moltiplicato scalarmente per **w**.



Geometricamente ha il significato del ***Volume*** del parallelepipedo che ha i tre vettori come spigoli

Esempio: Dati tre punti (1, 2, -1), (4, 0,3) e (2, -1, 5) in un piano, trovare l'equazione del piano nella forma generale.

Soluzione: Per scrivere l'equazione del piano dobbiamo trovare una direzione normale al piano stesso. Prima trovo due vettori complanari e poi, utilizzando il prodotto vettoriale, possiamo identificare un vettore normale.

Due vettori: da (1, 2, -1) a (4, 0, 3): (4-1, 0-2, 3+1) = (3,-2,4)=U
da (1, 2, -1) a (2, -1, 5): (2-1, -1-2, 5+1) = (1,-3,6)=V

Prodotto vettore:

$$U \wedge V = 0\,i - 14\,j - 7\,k = -14\,j - 7\,k$$

Equazione del piano:

$$0(x-1) - 14(y-2) - 7(z+1) = 0$$

$$-14y - 7z + 21 = 0$$

o

$$2y + z - 3 = 0$$

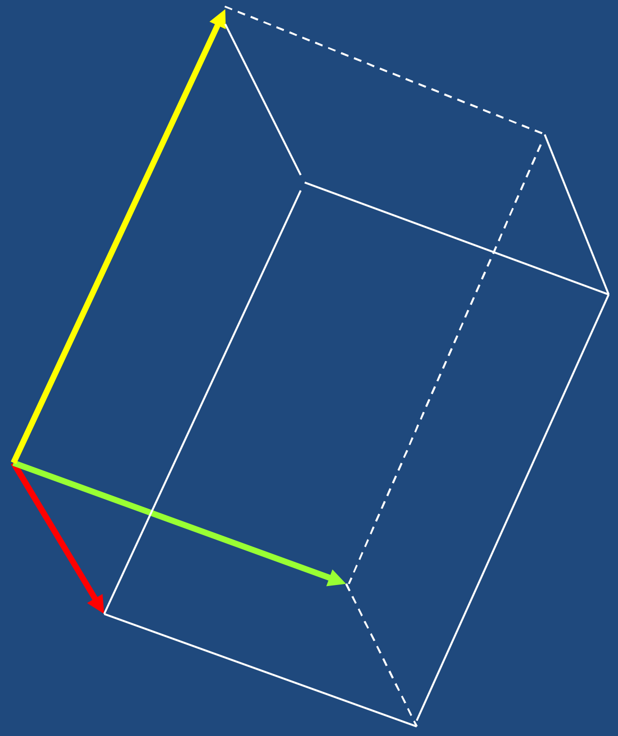
PRODOTTI

Prodotto *misto*

Il prodotto misto dà un criterio di

Complanarità di tre vettori:

Tre vettori non nulli sono complanari se e solo se il loro prodotto misto è nullo.



IMPORTANTE

Combinazione lineare di vettori

Dati due o più vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... $\mathbf{u}_n$,

se si moltiplica ciascuno di essi per un numero arbitrario (diverso da zero) e poi si sommano i vettori così ottenuti, si ottiene una *combinazione lineare* dei vettori dati.

Quindi se:

$\mathbf{w} = c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2} + \ldots + c_n\mathbf{u_n}$

(dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono numeri reali)

diciamo che il vettore w è una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, … $\mathbf{u_n}$.

Es.: $\mathbf{u} = (2, 3, -5)$; $\mathbf{v} = (1, 0, 4)$

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} = (4, 6, -10) + (1, 0, 4) = (5, 6, -6)$$

w è una combinazione lineare dei vettori **u** e **v**.

n vettori (due o più) ($\mathbf{u}_1$; $\mathbf{u}_2$; …; $\mathbf{u}_n$) si dicono

linearmente dipendenti

se ciascuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri n-1 vettori.

Ciò equivale a dire che la combinazione lineare degli n vettori è nulla (uguale al vettore nullo) per valori dei coefficienti c_i non tutti nulli.

Se ciascuno degli n vettori ($\mathbf{u}_1$; $\mathbf{u}_2$; ...; $\mathbf{u}_n$) ***non*** si può esprimere come combinazione lineare degli altri, vale a dire che la combinazione lineare degli n vettori è nulla (uguale al vettore nullo) *solo* per valori dei coefficienti c_i tutti nulli,

allora gli n vettori si dicono

linearmente indipendenti

Esempi:

1.- Due vettori *paralleli* sono lin. dipendenti

2.- Due vettori *non* paralleli sono lin. indipendenti.

3.- Tre vettori compalnari sono lin. dipendenti

4.- Tre vettori non complanari sono lin. indipendenti

BASE

Un insieme di vettori costituisce un *sistema di base* (una base) per lo spazio R^n se è:

-Un insieme di vettori linearmente indipendenti

- ogni vettore può essere espresso come combinazione lineare degli n vettori

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

L'equazione vettoriale $Ax = b$ è quindi equivalente a un *sistema di equazioni lineari* (= di primo grado), o semplicemente *sistema lineare* nelle incognite x_1, x_2, x_3 (in questo caso il sistema è "quadrato" 3x3)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Da quanto visto pare che un sistema lineare può avere:

a) Un'*unica soluzione* (terna ordinata di valori x_1^*, x_2^*, x_3^*, vale a dire un vettore $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*; x_3^*)$)

b) Infinite soluzioni

c) Nessuna soluzione

Un sistema lineare Ax =b può essere visto come la ricerca di una

combinazione lineare delle colonne di A (vettori) con cui ottenere

Il vettore b (termine noto). I coefficienti della combinazione lineare

Sono i valori delle (incognite) $x_1, x_2,\ldots,x_n$