

Esercizi I

- (1) Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy,

$$\begin{aligned}u'(t) &= (1+t)u(t), t > 0 \\ u(0) &= 10\end{aligned}$$

- (2) Si consideri l'equazione logistica,

$$u'(t) = A(B - u(t))u(t),$$

dove A e B sono parametri positivi. Riscaldare l'equazione riconducendola alla versione adimensionale

$$U'(\tau) = (1 - U(\tau))U(\tau)$$

(Suggerimento occorre riscaldare la variabile $u(t) = u^*U(t)$, con u^* parametro opportuno, ed il tempo $t = t^*\tau$, con t^* parametro). Trovare la soluzione generale dell'equazione riscaldata e ritornare alle variabili originali u, t .

- (3) Si consideri la funzione in due variabili $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$,
- trovare il dominio (in questo caso, il più grande sottoinsieme di \mathbb{R}^2 per cui è definita l'espressione della z);
 - trovare alcune curve di livello (per $z = k = \text{costante}$);
 - Possiamo considerare il punto $(0, 0)$ un punto in cui la funzione z è continua?
 - La funzione ha punti di massimo e/o punti di minimo?
- (4) Calcolare le derivate parziali, nel generico punto (x, y) dei rispettivi domini, delle seguenti funzioni,

$$f_1(x, y) = xy - 3x^2 + y^4 - 1, \quad f_3(x, y) = \log(xy),$$

$$f_2(x, y, z) = x \sin(y) + z \cos(x) + y^2 x^2 z^2, \quad f_4(x, y, z, t) = \frac{x}{y} + \frac{z}{t}.$$

- (5) Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni nei punti indicati,

$$f(x, y) = x^3 - y^4 - 4xy, \quad \text{in } (1, 2)$$

$$f(x, y, z) = x/y + xy + z^2x, \quad \text{in } (1, 1, 1)$$

$$f(x, y) = x \cos(xy), \quad \text{in } (-1, \pi).$$

(6) Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, si trovi il vettore gradiente $\nabla f(x, y) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$, nel punto $P \equiv (1, 1)$ e si verifichi graficamente che il vettore è perpendicolare alla curva di livello passante per lo stesso punto P .

(7) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio del seguente modello differenziale,

$$u'(t) = 0.5(10 - u(t))u^2(t).$$

(8) Trovare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione

$$z(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

nel punto di coordinate $(1, 2, z(1, 2))$. Esiste un piano tangente orizzontale?

(9) Determinare i punti di equilibrio e scrivere i problemi linearizzati corrispondenti per il sistema,

$$\begin{aligned} X'(t) &= 0.1(20 - X(t))X(t) - 0.01X(t)Y(t) \\ Y'(t) &= -0.2Y(t) + 0.08X(t)Y(t) \end{aligned}$$

Pagina web del corso:

<http://www.mat.unimi.it/users/naldi/biot12.html>

Indirizzo di posta elettronica:

giovanni.naldi@unimi.it