MMFC - LM in BIOT. MOL. E BIOINF. - 17/11/2012

Esercizi II

(1) Il carbonio si presenta di solito nell'atmosfera nella forma C_{12}, ma una percentuale è presente nella forma radioattiva C_{14}. Con la respirazione, per gli animali, o la fotosintesi, per i vegetali, questa viene fissata con una concentrazione media di una parte su 750 miliardi, cioè

$$C(0) \approx 1.33 \cdot 10^{-12}.$$

La concentrazione $C(t)$ di C_{14} in un tessuto non vivente segue la legge di decadimento $C'(t) = -kC(t),\ k > 0$, con tempo di dimezzamento pari a circa 5570 anni. Se in un papiro troviamo che $C(t) \approx 9 \cdot 10^{-13}$, quanto è vecchio il reperto? Potremmo considerarlo autentico?

(2) Si consideri un bacino con 500 litri d'acqua in cui sono disciolti 10 Kg di sale. Nel bacino viene introdotta nuova acqua con un flusso di 8 litri al minuto in cui vi sono 5 grammi di sale per litro. Dal bacino esce liquido con il medesimo flusso di 8 litri al minuto. Si immagini che si formi una miscela di acqua sale omogenea, quanto sale c'è nel bacino dopo 90 minuti?

Per rispondere descrivere la dinamica del processo attraverso un'opportuna equazione differenziale ed un'opportuna condizione iniziale.

(3) Discutere l'andamento qualitativo dell'equazione differenziale

$$u'(t) \;=\; ru(t)\left(1 - \frac{u(t)}{K}\right)\left(\frac{u(t)}{K_0} - 1\right)$$

con $u(0) > 0$, t positivo crescente, $0 \;<\; K_0 \;<\; K$, $r > 0$.

(4) Dati i vettori (pensati applicati nell'origine), $\mathbf{U} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{V} = (1, -1, 5)$, si calcoli il modulo del vettore $\mathbf{U} - \mathbf{V}$ e il prodotto scalare $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$.

(5) Dati i vettori $\mathbf{U} = (2, -\sqrt{5}, 1)$, $\mathbf{V} = (1, -\sqrt{5}, -2)$ si calcoli l'angolo da essi formato.

(6) Dai i vettori $\mathbf{U} = (0, 3, -2)$, $\mathbf{V} = (2, 2, 0)$, si trovi un vettore $\mathbf{W}$ non nullo ortogonale a entrambi.

(7) Si consideri il problema di determinare il coefficiente α della retta $r(x) = \alpha x$ che approssimi al meglio, nel senso dei minimi quadrati, i dati (x_i, y_i), $i = 1, 2, ...$ Applicare quanto dedotto per la ricerca di tale retta nel caso dei seguenti valori dei dati,

$$(1, 1/2),\ (3/2, 1),\ (2, 5/4),\ (5/2, 3/2).$$

(8) Dire se sono ortogonali le funzioni $f_1(x) \equiv 1$, $f_2(x) = x$, rispetto alla funzione $g(x) = \cos(x)$ considerando il prodotto scalare,

$$(f, g) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(x)g(x)dx.$$

(9) Supponendo che la funzione f definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{se } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

sia sviluppabile rispetto alla base "classica" di Fourier (si pensi che f sia estesa per periodicità su tutta la retta reale). Calcolare i coefficienti a_k e b_k nell'espansione

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Pagina web del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/naldi/biot12.html
Indirizzo di posta elettronica:
giovanni.naldi@unimi.it