MMFC - LM in BIOT. MOL. E BIOINF. - Esercizi da prove scritte

Giustificare sinteticamente le risposte

(1) Si consideri la funzione in due variabili

$$z = f(x, y) = 4\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right),$$

- trovare il dominio (in questo caso, il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ per cui è definita l'espressione della z);
- trovare alcune curve di livello (per $z = k = \texttt{costante}$);
- La funzione ha punti di massimo e/o punti di minimo?

(2) Si consideri il seguente problema ai valori iniziali,

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t) - 1)(y(t) - 2) \\ y(0) = C \end{cases}$$

con C parametro reale. Determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità, disegnare l'andamento delle soluzioni al variare di $C \in \mathbb{R}$.

(3) Si consideri la funzione $F(x, y) = xe^y$, determinare il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(1, 1, F(1, 1))$ (ovvero linearizzare la F nel punto $(1, 1)$). Trovare le componenti del vettore gradiente ∇F nel punto $(1, 2)$ e trovare quali vettori $\mathbf{U}$ sono ortogonali a $\nabla F(1, 2)$.
5

(4) Si consideri il problema di determinare i coefficienti α e β della funzione $m(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ che approssimi al meglio, nel senso dei minimi quadrati, i dati (x_i, y_i), $i = 1, 2, ...$ Applicare quanto dedotto per la ricerca di tale funzione $m(x)$ nel caso dei seguenti valori dei dati,

$$(0, 1),\ (\pi/2, 2),\ (\pi, 4),\ (3\pi/2, 2).$$

(5) Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali che rappresenta l'interazione tra due popolazioni di biomassa $u(t)$, $v(t)$,

$$u'(t) = u(1 - u) - \alpha uv$$

$$v'(t) = \tfrac{v}{2}(1 - v) - \beta uv$$

con α e β parametri positivi. Studiare l'esistenza e la stabilità dei punti di equilibrio al variare di β con $\alpha = 1/2$ fissato.

(6) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{3x^2 + y + 1}$$

per quali valori (x,y) è definita? Disegnare qualitativamente il dominio di definizione e alcune curve di livello all'interno di tale dominio.

(7) Si trovino i punti di equilibrio della seguente equazione differenziale,

$$y'(t) = y(t)\,(4 - y(t))\,(5 - y(t))\,,$$

e se ne discuta la stabilità. Tracciare alcuni grafici ,qualitativi, di soluzioni del problema ai valori iniziali al variare di $y(0) = y_0 > 0$.

(8) Si determini il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = e^{(x^2+y^2)}$$

nel punto $(1, 1, f(1,1))$. Esistono punti in cui si annulla il gradiente ∇f?

(9) Due popolazioni interagenti di densità $x(t)$ e $y(t)$ che hanno un fenomeno di competizione al proprio interno e tra di loro, abbiano una dinamica descrivibile con il seguente sistema di equazioni differenziali (qui $x = x(t)$, $y = y(t)$)

$$\begin{cases} x'(t) = 0.1\left(1 - \frac{x}{b}\right) x - \alpha x y \\ \\ y'(t) = 0.1\left(1 - \frac{y}{b}\right) y - \alpha x y \end{cases}$$

con b, α parametri positivi. Rendere il sistema adimensionale nella forma:

$$\begin{cases} X'(t) = (1 - X)\,X - aXY \\ \\ Y'(t) = (1 - Y)\,Y - aXY \end{cases}$$

con a parametro positivo. Trovare i valori dei punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro a. Cosa può suggerire tale analisi dal punto di vista della dinamica delle popolazioni? (**Suggerimento**: distinguere i casi, $0 < a < 1$ e $a > 1$)

(10) Il carbonio si presenta di solito nell'atmosfera nella forma C_{12}, ma una percentuale è presente nella forma radioattiva C_{14}. Con la respirazione, per gli animali, o la fotosintesi, per i vegetali, questa viene fissata con una concentrazione media di una parte su 750 miliardi, cioè

$$C(0) \approx 1.33 \cdot 10^{-12}.$$

La concentrazione $C(t)$ di C_{14} in un tessuto non vivente segue la legge di decadimento $C'(t) = -kC(t),\ k > 0$, con tempo di dimezzamento pari a circa 5570 anni. Se in un papiro troviamo che $C(t) \approx 9 \cdot 10^{-13}$, quanto è vecchio il reperto? Potremmo considerarlo autentico?

(11) Si consideri un bacino con 500 litri d'acqua in cui sono disciolti 10 Kg di sale. Nel bacino viene introdotta nuova acqua con un flusso di 8 litri al minuto in cui vi sono 5 grammi di sale per litro. Dal bacino esce liquido con il medesimo flusso di 8 litri al minuto. Si immagini che si formi una miscela di acqua sale omogenea, quanto sale c'è nel bacino dopo 90 minuti?

Per rispondere descrivere la dinamica del processo attraverso un'opportuna equazione differenziale ed un'opportuna condizione iniziale.

(12) Discutere l'andamento qualitativo dell'equazione differenziale

$$u'(t) \ = \ ru(t)\left(1 - \frac{u(t)}{K}\right)\left(\frac{u(t)}{K_0} - 1\right)$$

con $u(0) > 0$, t positivo crescente, $0 \ < \ K_0 \ < \ K$, $r > 0$.