MISURA ED INTEGRAZIONE
Appunti del Corso Analisi Matematica 4

Anno Accademico 2012-2013

Kevin R. Payne [1]
Università di Milano

[1] Appunti del docente redatti con l'aiuto della Dott.ssa. Elide Terraneo, esercitatrice del corso

Indice

Introduzione

Il corso di Analisi Matematica 4 si potrebbe intitolare "Misura ed Integrazione" visti i suoi obiettivi e contenuti. In particolare, vogliamo completare la base del calcolo integrale e differenziale in uno e più variabili presentando il concetto di misura astratta con particolare attenzione alle misure di Lebesgue e di Hausdorff per arrivare ad una teoria di integrazione moderna ed adeguata per trattare in modo rigoroso e uniforme i teoremi fondamentali del calcolo in più variabili. Più precisamente, i nostri obiettivi sono quattro.

Obiettivo 1: Migliorare la teoria di integrazione secondo Riemann (e la misura di Peano-Jordan associata).
Questo ci porterà a introdurre la *misura e l'integrale di Lebesgue* grazie ai quali potremo:

- arricchire la classe di insiemi "ammissibili" per includere tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ della forma U aperto, C chiuso, K compatto. Per la misura di Peano-Jordan, esistono aperti, chiusi, compatti **non** ammissibili;

- indebolire le ipotesi che consentono il passaggio al limite sotto il segno di integrale
$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k\,dx = \int_E\left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\right)dx.$$
Per l'integrale di Riemann, sono richieste la *convergenza uniforme* della successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e la limitatezza di E. Queste richieste sono troppo forti per avere una teoria robusta;

- eliminare la divisione nella teoria di integrazione in *integrabilità* e poi *integrabilità in senso generalizzato*.

Obiettivo 2: Estendere la teoria di integrazione su spazi M non piatti.
Questo ci porterà a introdurre la *misura di Hausdorff* ed integrali associati pgrazie ai quali potremo:

- integrare su curve, superficie, ipersuperficie (immerse in $\mathbb{R}^n$);

- definire concetti come *valor medio* di una funzione su M.

Obiettivo 3: Formulare una versione del TFCI [1] in più variabili.
Questo verà fatto tramite *l'integrazione per parti* e *la derivazione di integrali con parametro* e ci permetterà di ottenere:

- i Teoremi di Gauss-Green, della divergenza, di Stokes;
- un'apertura verso tantissime applicazioni.

Obiettivo 4: Completare la base del calcolo di integrali.
Questo verà fatto tramite:

- formule di *cambiamento di variabili* generali;
- i teoremi tipo TFCI ed IPP [2] già nominati;
- formule di *riduzione per "bucce"*.

[1]Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
[2]IPP= integrazione per parti

Capitolo 1

Misura ed integrale di Lebesgue

In questo capitolo, iniziamo con il primo obiettivo del corso. Il percorso che seguiremo è il seguente:[1]

1. Definire la <u>misura di Lebesgue m</u> su una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che comprendano in particolari aperti U e chiusi C.

2. Per <u>funzioni semplici</u> $s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}$ definire l'integrale
$$\int_E s(x)\, dm(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j m(E \cap E_j), \quad E \text{ misurabile},$$
(dove ogni E_j è *misurabile*, $E_j \cap E_k = \emptyset$ per $j \neq k$ e $c_j \neq 0$ in $\mathbb{R}$).

3. Introdurre le <u>funzioni misurabili</u> (ammissibili per l'integrazione) e mostrare che sono ben approssimate da funzioni semplici.

4. Definire <u>l'integrale di Lebesgue</u> di f tramite un'approssimazione con integrali di funzioni semplici.

1.1 Misura di Lebesgue

1.1.1 Misura esterna di Lebesgue

Il primo passo nella nostra costruzione della misura di Lebesgue è la definizione di una funzione $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ detta *misura esterna* che associa una grandezza $m^*(A)$ ad

[1] La referenza principale è Capitolo 5 di [4].

ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$. Il punto di partenza è di ricoprire A con un numero al più numerabili di *intervalli compatti*[2]

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad a_j \leq b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

dove ricordiamo che il *volume (n-volume)* di I viene defbinto da [3]

$$v(I) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Definizione 1.1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama *ricoprimento di Lebesgue (rdL) di A* una collezione $\{I_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ con $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$ (al più numerabile) t.c. $A \subset \bigcup_{k \in \mathcal{K}} I_k$.

N.B. Ogni A ha un rdL. Basta prendere $I_k = [-k, k]^n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ perché $I_k \nearrow \mathbb{R}^n$ ricopre tutto lo spazio.[4]

Definizione 1.1.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama *misura esterna (di Lebesgue) di A* la quantità

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}} v(I_k) : \ \{I_k\}_{k \in \mathcal{K}} \text{ è un rdL di } A \right\}. \tag{1.1.1}$$

Osservazione 1.1.1. (Confronto con la misura esterna di Peano-Jordan m^*_{PJ}) La misura esterna di Lebesgue $m^* = m^*_L$ è definita per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ mentre quella di PJ solo per A limitato. Inoltre, m^*_L è definita usando ricoprimenti con un numero **al più numerabili** di intervalli compatti anzichè un numero **finito** di intervalli nel caso di m^*_{PJ} (anche presi con interni disgiunti). Quindi abbiamo

$$m^*_L(A) \leq m^*_{PJ}(A), \ \ A \subset \mathbb{R}^n \ \text{ limitato},$$

ovvero che m^*_L è più fine di m^*_{PJ}.

Il primo esempio, prevedibile ma utile, è il seguente.

Esempio 1.1.1. Per ogni intervallo compatto I, si ha $m^*(I) = v(I)$.

Infatti, essendo $\{I\}$ un rdL di I, abbiamo $m^*(I) \leq v(I)$. Per la disuguaglianza apposta $m^*(I) \geq v(I)$, si usa la seguente proprietà di intervalli inscatolati:[5] *Per ogni intervallo compatto I ed ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono intervalli compatti H, J t.c.*

$$\begin{cases} H \subset I^\circ \subset I \subset J^\circ \\ v(J) - \varepsilon < v(I) < v(H) + \varepsilon \end{cases} \tag{1.1.2}$$

[2] $\mathcal{P}(X)$ indica l'insieme delle parti di un'insieme X.

[3] La notazione ":=" vuol dire "uguale per definizione".

[4] Usiamo i simboli $A_k \nearrow A, A_k \searrow A$ per indicare successioni $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ crescente, decresente (rispetto alla relazione di inclusione) con unione, intersezione A.

[5] Con A° intendiamo *l'interno di A* rispetto alla topologia di $\mathbb{R}^n$

Dato questo fatto, preso un rdL arbitrario $\{I_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di I, scegliamo un ricoprimento leggermente più grande $\{J_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ dove

$$I_k \subset J_k^\circ \;\text{ e }\; v(J_k) - \varepsilon 2^{-k} < v(I_k),\;\; k \in \mathcal{K}.$$

Abbiamo $I \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}} I_k \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}} J_k^\circ$. Per la compatezza di I, esiste $N \in \mathbb{N}$ per cui $I \subset \bigcup_{k=1}^{N} J_k^\circ$. Quindi

$$v(I) \leq \sum_{k=1}^{N} \left(v(I_k) + \varepsilon 2^{-k} \right) \leq \varepsilon + \sum_{k\in\mathcal{K}} v(I_k).$$

Si conclude prendendo l'estremo inferiore rispetto alla famiglia di tutti i rdL $\{I_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di I.

Proof of (1.1.2). Sfruttiamo due trasformazioni importanti, cioè le *traslazioni* e le *dilatazioni*.

1. Dato $I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ con centro in $p = (p_1, \ldots, p_n)$ dove $p_i = (a_i + b_i)/2$,consideriamo la traslazione $\widetilde{I} = \prod_{i=1}^{n} [-\alpha_i, \alpha_i]$[6] con centro in $\tilde{p} = 0$. Abbiamo $v(I) = v(\widetilde{I})$.
2. Per $\lambda > 0$ da specificare, consideriamo la dilatazione $\widetilde{J} = \prod_{i=1}^{n} [-\lambda\alpha_i, \lambda\alpha_i]$ dove
$$v(\widetilde{J}) = \lambda^n v(\widetilde{I}) = \lambda^n v(I).$$
3. Ora trasliamo $\widetilde{J}$ "in dietro" ad un inervallo compatto J con centro in p e abbiamo $v(J) = v(\widetilde{J}) = \lambda^n v(I)$. Ci serve $v(J) < v(I) + \varepsilon$, ovvero
$$\lambda^n v(I) < v(I) + \varepsilon,$$
e quindi basta scegliere $\lambda < (1 + \varepsilon/v(I))^{1/2}$. Una costruzione analoga fornisce anche l'intervallo compatto H.

□

Teorema 1.1.1. *(Prime proprietà di m^*) Siano $A, B, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora* [7]

a) $m^*(A) \in [0, +\infty]$ *con* $m^*(\emptyset) = 0$;

b) $A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$ *(monotonia);*

c) $m^*\left(\bigcup_{k\in K} A_k \right) \leq \sum_{k\in\mathcal{K}} m^*(A_k)$ *(subdadditività numerablile);*

d) $m^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

[6] Ovviamente $\alpha_i = b_i - p_i = (b_i - a_1)/2$.

[7] Questa è una versione modificata rispetto a quella presentata a lezione dove l'affermazione $m^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$ è stata messa in fondo e usiamo la monotonia di m^* nella dimostrazione.

Dimostrazione. Usiamo la definizione di m^*.

a) Notiamo che $0 \le v(I_k) < +\infty$ per ogni $k \in \mathcal{K}$ e quindi

$$0 \le \sum_{k\in\mathcal{K}} v(I_k) \le +\infty \text{ e poi } 0 \le m^*(A) \le +\infty,$$

dove abbiamo preso l'estremo interiore su tutti i rdL $\{I_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di A. Inoltre, se $A = \emptyset$, per ogni $\varepsilon > 0$, $\{I_\varepsilon\} = \{[0,\varepsilon]^n\}$ è un rdL di A con $v(I_\varepsilon) = \varepsilon^n$. Calcolando l'inf per $\varepsilon > 0$ abbiamo $m^*(\emptyset) = 0$.

b) Se $\{I_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ è rdL di B allora $\bigcup_{k\in\mathcal{K}} I_k \supseteq B \supseteq A$, cioè le famiglie di rdL di A e B soddisfano

$$\mathcal{RL}(B) \subseteq \mathcal{RL}(A).$$

Quindi l'estremo inferiore su $\mathcal{RL}(A)$ non è più grande di quello preso su $\mathcal{RL}(B)$.

c) La tesi è banale se $m^*(A_k) = +\infty$ per qualche k. Quindi WLOG [8] $m^*(A_k) = +\infty$ per ogni $k \in \mathcal{K}$. Per la definizione di $m^*(A_k)$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un rdL $\{I_{k,j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ di A_k t.c.

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} v(I_{k,j}) < m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{1.1.3}$$

La collezione $\{I_{k,j}\}_{j\in\mathcal{J},k\in\mathcal{K}}$ è un rdL di $\bigcup_{k\in\mathcal{K}} A_k$ e quindi usando (1.1.3) si trova

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{k\in\mathcal{K}} A_k\right) &\le \sum_{j\in\mathcal{J},k\in\mathcal{K}} \left(v(I_{j,k})\right) = \sum_{k\in\mathcal{K}}\left(\sum_{j\in\mathcal{J}} v(I_{j,k})\right) \\ &\le \sum_{k\in\mathcal{K}}\left(m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \varepsilon + \sum_{k\in\mathcal{K}} m^*(A_k), \end{aligned}$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. [9]

d) Per ogni $R > 0$ si ha $m^*(\mathbb{R}^n) \ge m^*([-R,R]^n) = (2R)^n$. Segue che $m^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

□

Osservazione 1.1.2. Come per la misura di PJ, un ruolo importante è giocato dagli insiemi "trascurabili" ovvero dagli insiemi di *misura esterna nulla*, cioè dagli insiemi A tali che $m^*(A) = 0$. Dal Teorema 1.1.1 abbiamo

a) $m^*(A) = 0 \Rightarrow m^*(B) = 0$ per ogni $B \subset A$ (per la monotonia);

[8] WLOG = Without loss of generality; cioè possiamo assumere l'ipotesi in più senza perdita di generalità.

[9] Notiamo che nella doppia sommatoria, tutti tutti gli addendi sono non negativi e quindi possiamo fare prima la somma in j e poi quella in k (o viceversa). Questo fatto è una versione discreta del Teorema di Fubini-Tonelli (v. paragrafo 1.6).

b) $m^*(A_k) = 0$ per ogni $k \in \mathcal{K} \Rightarrow m^*\left(\bigcup_{k\in\mathcal{K}} A_k\right) = 0$ (per la subadditività).

Esempio 1.1.2. (A con $m^*(A) = 0$)

a) $A = I = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$ intervallo compatto con almeno un lato di lunghezza nulla ($a_i = b_i$ per qualche i) . Infatti

$$m^*(I) = v(I) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = 0$$

b) $A = \partial I$ il bordo di un intervallo compatto. Infatti $\partial I = \bigcup_{i=1}^{2n} F_i$ con F_i una faccia di ∂I. Ogni F_i è un intervallo del tipo a), per cui

$$m^*(\partial I) \leq \sum_{i=1}^{2n} m^*(F_i) = 0.$$

c) A al più numerabile (finito o numerabile). Infatti, se $A = \{a\}$ con $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ allora $A = [a_1, a_1] \times \cdot \times [a_n, a_n]$ perciò $m^*(A) = 0$. Se $A = \cup_{k\in\mathcal{K}} A_k$ con $A_k := \{a_k\}$ dove $a_k \in \mathbb{R}^n$, allora per la subadditività si ha

$$0 \leq m^*\left(\bigcup_{k\in\mathcal{K}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathcal{K}} m^*(A_K) = 0.$$

d) $A = \mathbb{Q}^n$ è numerabile, quindi $m^*(\mathbb{Q}^n) = 0$ anche se $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ è denso.

Osservazione 1.1.3. Esistono insiemi **più che numerabile** $A \subset \mathbb{R}^n$ con $m^*(A) = 0$. Un esempio importante è il seguente.

Esempio 1.1.3. (*L'insieme di Cantor* per $n = 1$) Si definisce $C \subset I = [0, 1]$ con $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k$ e la famiglia $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è costruita per induzione:

- $C_1 = I \setminus (1/3, 2/3) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$;
- $C_2 = C_1 \setminus [(1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)]$, etc.
- al passo k, C_k è l'unione di 2^k intervalli chiusi di lunghezza 3^{-k}

C è chiuso e si verifica che ogni punto di C è un punto di accumulazione per C, ovvero C è un insieme *perfetto*. Quindi C è più che numerabile (v. §4.5 di [MV]). D'altre parte, ha misura estena nulla perché

$$m^*(C) \leq m^*(C_k) = \frac{2^k}{3^k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Si può consultare Cap. 3 di [7] per diverse generalizzazioni.

1.1.2 Insiemi misurabili e la misura di Lebesgue

Osservazione 1.1.4. (Importante) Anche se è comodo avere m^* definita per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$, per l'integrazione è MOLTO UTILE [10] avere *l'additività numerabile* della misura:

$$\begin{cases} \{A_k\}_{k\in\mathcal{K}} \\ A_k \cap A_j = \emptyset, \quad j \neq k \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} m^*\left(\bigcup_{k\in\mathcal{K}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathcal{K}} m^*(A_k). \tag{1.1.4}$$

La misura esterma m^* non soddisfa questa proprietà per tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. In particolare, $\exists\, A_1, A_2$ disgiunti t.c. $m^*(A_1 \cup A_2) < m^*(A_1) + m^*(A_2)$.

Esempio 1.1.4. (Paradosso di Banach-Tarski) Data la bolla unitaria $B_1(0)$, esistono $A_1, A_2 \subset B_1(0)$ disgiunti per cui

$$B_1(0) = A_1 \cup A_2 \text{ e } m^*(A_1) = m^*(A_2) = m^*(B_1(0)).$$

Per questo motivo, vogliamo ridurre la classe di insiemi "ammissibili". Usiamo un'idea di Carathéodory di distinguire quelli insiemi che "tagliano bene" ogni sottoinsione di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.3. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *misurabile (secondo Lebesgue)* se e solo se

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{1.1.5}$$

Denotiamo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n :\ E$ è misurabili secondo Lebesgue $\}$.

Definizione 1.1.4. La *misura di Lebesgue* è la restrizione della misura esterna m^* agli insiemi misurabili $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$; cioè

$$m(E) := m^*(E), \quad \forall\, E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.6}$$

N.B. La misura $m = m^*{}_{|\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ è automaticamente monotona e subadditiva su $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Vogliamo dimostrare che è anche additiva, ovvero vale la proprietà (1.1.4).

Proposizione 1.1.1. *E è misurabile se e solo se E^c è misurabile.*

Dimostrazione. Usando la definizione, E^c è misurabile se per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$m^*(A) = m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap (E^c)^c.$$

Poiché $(E^c)^c = E$ abbiamo esattamente (1.1.5). □

Proposizione 1.1.2. *Sia E con $m^*(E) = 0$. Allora E è misurabile e $m(E) = 0$.*

[10] Per esempio per essere in grado di scomporre gli integrali associati in somme di integrali su sottodomini.

Dimostrazione. Si usa la mononotonia e la subadditività di m^*. Infatti, dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} m^*(A) &\leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \quad \text{(subadditività)} \\ &\leq 0 + m^*(A \cap E^c) \quad \text{(monotonia e } m^*(E) = 0) \\ &\leq m^*(A) \quad \text{(monotonia)} \end{aligned}$$

e quindi abbiamo l'uguaglianza nella prima riga del conto. □

Dato che insiemi di misura esterna nulla sono misurabili, tutti gli insiemi dell'Esempio 1.1.2 sono misurabili (e hanno misura nulla). Inoltre, anche gli intervalli compatti sono misurabili e la loro misura è uguale al loro n-volume.

Proposizione 1.1.3. *Ogni intervallo compatto I è misurabile e*

$$m(I) = m^*(I) = v(I).$$

Dimostrazione. Consultare [4] Teorema 5.1.10. Il punto chiave è stabilire (1.1.5) per $A = J$ un intervallo compatto; cioè

$$m^*(J) = m^*(J \cap I) + m^*(J \cap I^c), \quad \forall\, J.$$

□

Teorema 1.1.2. *Siano $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

a) $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

b) $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.

c) $E_1 \subseteq E_2$ *con* $m(E_1) < +\infty \Rightarrow m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1)$.

Dimostrazione. Usiamo la definizione di misurabilità e le proprietà della misura esterna.

a) Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ spezziamo prima con $E_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e poi $E_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e poi sfruttiamo la monotonia. Infatti

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &\geq m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c), \end{aligned}$$

e quindi $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Per l'affermazione $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, notiamo che

$$(E_1 \cap E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

usando la Proposizione 1.1.1 ed il caso delle unioni. Passando al complemento abbiamo la tesi. Per mostrare $E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, basta notare

$$E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c.$$

b) Basta fare un conto usando la misurabilità di E_1, E_2 e $E_1 \cup E_2$ ed il fatto che $E_1 \cap E_2 = \emptyset$:

$$\begin{aligned} m(E_1 \cup E_2) &= m^*(E_1 \cup E_2) \\ &= m^*((E_1 \cup E_2) \cap E_1) + m^*((E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) \quad (\text{ma } E_1 \cap E_2 = \emptyset) \\ &= m^*(E_1) + m^*(E_2) = m(E_1) + m(E_2). \end{aligned}$$

c) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow E_2 = (E_2 \setminus E_1) \cup E_1$ che è un'unione disgiunta. Per la parte b) abbiamo

$$m(E_2) = m(E_2 \setminus E_1) + m(E_1) \quad \text{con } m(E_1) < +\infty.$$

□

Osservazione 1.1.5. Usando il Teorema 1.1.2 e l'induzione, si mostra facilmente che unioni ed intersezioni **finite** di insiemi misurabili sono misurabili e che la misura è *additiva finitamente*; cioè

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\right) = \sum_{k=1}^{N} m(E_k) \ \text{ se } \ E_1, \dots E_N \ \text{ sono disgiunti e misurabili.} \tag{1.1.7}$$

Inoltre, queste affermazioni valgono anche per le famiglie **al più numerabili** di insiemi misurabili. Questo è il contenuto del seguente teorema fondamentale.

Teorema 1.1.3. *Sia $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

a) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k, \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$ *sono misurabili.*

b) Se inoltre $E_j \cap E_k = \emptyset$ per ogni $j \neq k$, allora

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k). \tag{1.1.8}$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di misurabilità, le proprietà della misura esterna ed il Teorema 1.1.2.

a) Poiché $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \left(\bigcup E_k^c\right)^c$, ci basta considerare il caso dell'unione. WLOG possiamo prendere gli insiemi disgiunti. Altrimenti consideriamo la collezione $\{\widetilde{E}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di insiemi disgiunti definita da

$$\widetilde{E}_1 = E_1, \widetilde{E}_2 = E_2 \setminus E_1, \dots \widetilde{E}_k = E_k \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{k-1}).$$

dove

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{E}_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

Per ogni $N \in \mathbb{N}$, il Teorema 1.1.2 dice che

$$F_N := \bigcup_{j=1}^{N} E_j \text{ è misurabile}$$

e dobbiamo mostrare che $F := \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$ è misurabile. Affermiamo che

$$\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n : \quad m^*(A \cap F_N) = \sum_{j=1}^{N} m^*(A \cap E_j). \tag{1.1.9}$$

Infatti, usando la misurabilità degli insiemi E_k e la definizione di F_N si ha

$$\begin{aligned} m^*(A \cap F_N) &= m^*(A \cap F_N \cap E_N) + m^*(A \cap F_N \cap E_N^c) \\ &= m^*(A \cap E_N) + m^*(A \cap F_{N-1}) \\ &= m^*(A \cap E_N) + m^*(A \cap F_{N-1} \cap E_{N-1}) + m^*(A \cap F_{N-1} \cap E_{N-1}^c) \\ &= m^*(A \cap E_N) + m^*(A \cap E_{N-1}) + m^*(A \cap \cap F_{N-2}). \end{aligned}$$

Iterando ancora si ottiene (1.1.9). Adesso usiamo la misurabilità di F_N per ottenere

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_N) + m^*(A \cap F_N^c) \\ &= \sum_{j=1}^{N} m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap F_N^c) \\ &\geq \sum_{j=1}^{N} m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap F^c), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche la monotonia ($F_N \subseteq F$). Calcolando il limite per $N \to +\infty$ e usando la subadditività otteniamo

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap F^c) \\ &\geq m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c) \qquad \left(\bigcup_{j-1}^{+\infty} E_j = F \right) \\ &\geq m^*(A). \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Quindi abbiamo l'uguaglianza e la misurabilità di F.

b) Usiamo la misurabilità di F e prendiamo $A = F$ in (1.1.10) per ottenere

$$\begin{aligned} m(F) = m^*(F) &\geq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(F \cap E_j) + m^*(F \cap F^c) \\ &\geq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j) \geq m^*(F), \end{aligned}$$

e qundi
$$m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = m(F) = \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} m(E_j).$$

□

Osservazione 1.1.6. La terna $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), m)$ è uno *spazio di misura* $(X, \mathcal{A}(X), \mu)$; cioè

i) $\mathbb{R}^n$ un insieme;

ii) $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$; cioè

- $\emptyset \in \mathbb{R}^n$;
- $E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
- $\{E_k\}_{k\in\mathcal{K}} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \bigcup\limits_{k\in K} E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Quindi, usando ii), anche $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\bigcap\limits_{k\in K} E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

iii) $m : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ è una misura (positiva); cioè

- $m(\emptyset) = 0$;
- m soddisfa la proprietà di additività numerabile.

Il seguente corollario è molto utile nel calcolo della misura.

Corollario 1.1.1. *Sia* $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. *Allora*

a) Se E_k *è crescente in* k *allora* $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim\limits_{k\to+\infty} m(E_k)$.

b) Se E_k *è decrescente in* k *e* $m(E_1) < +\infty$ *allora* $m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim\limits_{k\to+\infty} m(E_k)$.

Dimostrazione. a) WLOG $m(E_k) < +\infty$ per ogni k. Consideriamo $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dove
$$A_1 := E_1 \text{ e } A_k := E_k \setminus E_{k-1} \text{ per } k \geq 2.$$

Abbiamo una collezione di insiemi disgiunti $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con la loro unione uguale a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Quindi
$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k) = m(E_1) + \sum_{k=2}^{+\infty} m(E_k \setminus E_{k-1}) \\ &= m(E_1) + \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} [m(E_k) - m(E_{k-1})] \\ &= \lim_{N\to+\infty} [m(E_1) + m(E_N) - m(E_1)]\,. \end{aligned}$$

b) Usando $E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty}(E_1 \setminus E_k)$, dato che $A_k \nearrow$, abbiamo allora

$$m\left(E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k\to+\infty} m(E_1 \setminus E_k)$$

$$m(E_1) - m\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k\to+\infty} [m(E_1) - m(E_k)]\,,$$

ma $m(E_1) < +\infty$.

□

1.1.3 Teoremi di struttura

Avendo ridotto la classe di insiemi ammissibili a quelli misurabili, vogliamo sapere in che modo tali insiemi sono fatti. In particolare, le questioni sono:

1. Quali sono classi di sottoinsiemi "buoni" e misurabili? In particolari, insiemi con proprietà topologiche familiari (aperti, chiusi, compatti) sono misurabili?
2. Dato un insieme E misurabile, possiamo approssimarlo bene con insiemi "buoni"? Ci sono modi utili di decomporlo in insiemi "buoni" e "trascurabili"?

Il primo risultato dice che c'è una buona relazione tra misurabilità (secondo Lebesgue) e la topologia di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.4. *(Misurabilità di insiemi aperti, chiusi e compatti)*

a) Ogni $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto è misurabile.

b) Ogni $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso è misurabile.

c) Ogni $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto è misurabile e $m(K) < +\infty$.

Dimostrazione. Per gli aperti U, si sfrutta il fatto che esiste una collezione $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di intervalli compatti t.c.

$$I_j^\circ \cap I_k^\circ = \emptyset, \quad j \neq k \quad \text{e} \quad U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

(v. Proposizione A.7 di [4]). Il resto è facile.

a) U aperto implica $U = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$ con I_k misurabile per ogni k. Quindi U è misruabile per il Teorema 1.1.3.

b) C chiuso è il complemento di un aperto $U = \mathbb{R}^n \setminus C$ e quindi misurabile per la parte a) e la Proposizione 1.1.1.

c) Ogni $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto è chiuso e quindi misurabile. Essendo K limitato è contenuto in qualche intevallo compatto $I = [-R, R]^n$ per R abbastanza grande. Ma usando la monotonia di m^* si ha

$$m(K) = m^*(K) \leq m^*(I) = v(I) = 2^n R^n < +\infty.$$

□

Osservazione 1.1.7. Un'implicazione importante del Teorema 1.1.4 è che la misura di Lebesgue è una *misura di Borel* su $\mathbb{R}^n$; cioè la σ-algebra di insiemi misurabili secondo Lebesgue $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ contiene la *σ-algebra di Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ generata dagli insiemi aperti, ovvero la più piccola σ-algebra che contiene gli aperti. Si può consultare §4.4 di [5]. Nella sezione 2 del Capitolo 2, tratteremo in modo sistematico la questione di quando la restrizione (alla σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Carathéodory) di una misura esterna è una misura di Borel.

Una classe ancora più ricca di insiemi misurabili viene fornita dalla combinazione dei Teoremi 1.1.3 e 1.1.4. La dimostrazione del prossimo risultato è immediata.

Corollario 1.1.2. *(Insiemi di tipo G_δ e F_σ)*[11]

a) $G \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se G è di tipo G_δ, ovvero se $G = \bigcap_{k \in \mathcal{K}} U_k$ con U_k aperto per ogni k.

b) $F \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se F è di tipo F_σ, ovvero se e solo se $F = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} F_k$ con F_k chiuso per ogni k.

Osserviamo che ogni insieme G è misurabile ma **non** necessariamente aperto e che F è misurabile ma **non** necessariamente chiuso. Queste classi possono essere usate per caratterizzare gli insiemi misurabili nel modo seguente.

Teorema 1.1.5. *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un insieme misurabile qualsiasi.*

a) Esistono un insieme G di tipo G_δ ed un insieme Z di misura nulla t.c. $E = G \setminus Z$.

b) Esistono un insieme F di tipo F_σ ed un insieme Z di misura nulla t.c. $E = F \cup Z$.

Inoltre ogni insieme della forma $G \setminus Z$ o $F \cup Z$ è ovviamente misurabile.

N.B. Gli insiemi Z sopra sono (in generale) diversi fra loro.

Dimostrazione. Il punto chiave è il Lemma seguente "approssimazione" mediante insiemi aperti/chiusi.

[11] La termonologia nasce in Germania e Francia: G per Gebiet (Tedesco: intorno aperto), δ per Durchschnitt (Tedesco: intersezione), F per fermé (Francese: chiuso) e σ per somme (Francese: somma)

Lemma 1.1.1. *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora*

a) Esiste $U = U(\varepsilon)$ aperto t.c. $U \supset E$ e $m(U \setminus E) < \varepsilon$.

b) Esiste $C = C(\varepsilon)$ chiuso t.c. $C \subset E$ e $m(E \setminus C) < \varepsilon$.

Usando il Lemma la dimostrazione del Teorema segue.

a) Per ogni $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ fisso, esiste $U_k \supset E$ aperto t.c. $m(U_k \setminus E) < 1/k$. Poniamo

$$G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k \quad \text{e} \quad Z = G \setminus E.$$

G è di tipo G_δ e contiene E. Z è misurabile e soddisfa $Z \cap E = \emptyset$. Inoltre

$$G = (G \cap E) \cup (G \cap E^c) = E \cup Z \text{ e quindi } E = G \setminus Z.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$m(Z) = m\left(\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k\right) \setminus E\right) \leq m\left(U_k \setminus E\right) < 1/k.$$

b) $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E^c = G \setminus Z = G \cap Z^c$ con G di tipo G_δ e Z con $m(Z) = 0$. Quindi $E = G^c \cup Z$ dove $F = G^c$ è di tipo F_σ.

□

Dimostrazione del Lemma 1.1.1. Ci sono due casi.

a) *Caso 1* ($m(E) < +\infty$): Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un rdL $\{I_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ t.c.

$$m(E) = m^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k \in \mathcal{K}} v(I_k).$$

Prendiamo un intervallo compatto J_k t.c. $I_k \subset J_k^\circ$ e

$$m(J_k^\circ) = v(J_k) < v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Poniamo $U = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} J_k^\circ$ che è aperto, contiene E e soddisfa

$$\begin{aligned} m(U \setminus E) = m(U) - m(E) &\leq \sum_{k \in \mathcal{K}} m(J_k^\circ) - m(E) \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{K}} v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2} - m(E) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Caso 2 ($m(E) = +\infty$): Poniamo $E_1 = E \cap B_1(0)$ e $E_N = E \cap (B_N(0) \setminus B_{N-1}(0))$ per $N \geq 2$. Ogni E_N è misurabile con misura finita. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U_N aperto t.c. $U_n \supset E_N$ e $m(U_n \setminus E_N) < \varepsilon 2^{-N}$. L'insieme $U := \bigcup_{N=1}^{+\infty} U_N$ è aperto, contiene E e soddisfa

$$m(U \setminus E) = m\left(\bigcup_{N=1}^{+\infty} U_N \setminus \left(\bigcup_{N=1}^{+\infty} E_N\right)\right) \leq m\left(\bigcup_{N=1}^{+\infty} (U_N \setminus E_N)\right)$$
$$\leq \sum_{N=1}^{+\infty} m(U_N \setminus E_N) < \varepsilon.$$

b) Per la parte a) esiste un aperto $U = U(\varepsilon)$ t.c. $U \supset E^c$ e $m(U \setminus E^c) < \varepsilon$. Basta allora prendere $C = U^c$ che sara' chiusa, contenuto in E e soddisfa $E \setminus C = E \cap C^c = U \setminus E^c$.

□

Osservazione 1.1.8. (Commenti conclusivi)

a) Esistono insiemi **non** misurabili, per cui $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Ad esempio, l'insieme dell'Esempio 1.1.4 (Paradosso di Banach-Tarski) oppure l'insieme di Vitali per $n = 1$ (v. §4.5 di [5]).

b) Ci sono definizioni alternative di misurabilità secondo Lebesgue. Abbiamo usato la formulazione di Carathèodory mediante il concetto di "tagliare bene". Altre sono:

   i) L'uguaglianza della misura esterna m^* e *misura interna* m_* (da definire); cioè

   $$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow m^*(E) = m_*(E).$$

   Si può consultare §5.1 di [4] per la definizione di m_* ed un discorso sulla equivalenza.

   ii) La proprietà di approssimare bene la misura esterna con quella di insiemi aperti; cioè

   $$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U_\varepsilon \supset E \ \text{(aperto) con } m^*(U_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon.$$

   Questa è la definizione usata in [5] e [7]. L'equivalenza delle definizioni è legata alla dimostrazione della parte a) di Lemma 1.1.1.

1.2 Funzioni misurabili

Obiettivo: Definire una classe ampia di funzioni ammissibili per l'integrazione secondo Lebesgue (rispetto alla misura di Lebesgue). Consideriamo sempre (se non specifichiamo ulteriormente) funzioni

$$f : E \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{ con } \ E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \ \text{ e } \ \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

1.2.1 Funzioni misurabili e prime proprietà

Definizione 1.2.1. Una funzione $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta *misurabile (secondo Lebesgue)*[12] se e solo se tutti i suoi *sopralivelli* sono misurabili (secondo Lebesgue); cioè

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}} : \ \{f > a\} = \{x \in E : \ f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Denotiamo con $\mathrm{Mis}(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} : \ f$ è misurabile su $E\}$.

Esempio 1.2.1. Ogni funzione $f : E \to \mathbb{R}$ continua è misurabile. Infatti

$$\forall\, a \in \overline{\mathbb{R}} : \ \{f > a\} = f^{-1}(a, +\infty) = U \cap E$$

dove U è aperto in $\mathbb{R}^n$. Essendo U, E misurabile, anche $\{f > a\}$ lo è.

Ci sono diversi modi equivalenti di formulare la misurabilità di f tramite sopralivelli e sottolivelli.

Proposizione 1.2.1. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. TFAE*[13]

a) $\{f > a\}$ *è misurabile per ogni* $a \in \overline{\mathbb{R}}$;

b) $\{f \leq a\}$ *è misurabile per ogni* $a \in \overline{\mathbb{R}}$;

c) $\{f < a\}$ *è misurabile per ogni* $a \in \overline{\mathbb{R}}$;

d) $\{f \geq a\}$ *è misurabile per ogni* $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Il punto chiave è che $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è un σ-algebra. In particolare:

a) $\Rightarrow$ b) $\quad \{f > a\}^c = \{f \leq a\}$;

c) $\Rightarrow$ d) $\quad \{f < a\}^c = \{f \geq a\}$;

b) $\Rightarrow$ c) $\quad \{f < a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{f \leq a - 1/k\}$;

d) $\Rightarrow$ a) $\quad \{f > a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{f \geq a + 1/k\}$.

□

Osservazione 1.2.1. Nella Definizione 1.2.1 e nella Proposizione 1.2.1 basta controllare le condizioni necessarie per $a \in \mathbb{R}$ anziché $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ad esempio, nella Definizione 1.2.1, se $\{x \in E : \ f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, allora per $a = +\infty$ abbiamo $\{x \in E : \ f(x) > +\infty\} = \emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e per $a = -\infty$ abbiamo

$$\{x \in E : \ f(x) > -\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in E : \ f(x) > -k\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

[12] Sarebbe forse più chiaro dire *misurabile rispetto alla misura di Lebesgue*.

[13] Abbreviazione per The Following Are Equivalent; cioè “le seguenti affermazioni si equivalgono”.

Osservazione 1.2.2. Usando il fatto che $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è una σ-algebra (v. Teorema 1.1.3), ogni funzione f misurabile determina una classe ricca di insiemi misurabili tramite le sue retroimmagini. Ad esempio $f^{-1}(a,b) = \{f > a\} \cap \{f < b\}$ è misurabile.

Proposizione 1.2.2. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Allora ogni* insieme di livello di *f è misurabile, cioè*

$$\forall\, a \in \overline{\mathbb{R}} : \quad \{f = a\} = \{x \in E : \ f(x) = a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Ci sono tre casi:

- $a \in \mathbb{R} : \quad \{f = a\} = \{f \geq a\} \cap \{f \leq a\};$
- $a = +\infty : \quad \{f = +\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f \geq k\};$
- $a = -\infty : \quad \{f = -\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f \leq -k\}.$

□

Osservazione 1.2.3. Esistono $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ **non** misurabili.

Esempio 1.2.2. Sia $A \subset E$ con A un insieme **non** misurabile. Allora $f = \chi_A$ **non** è una funzione misurabile. Infatti,

$$A = \{\chi_A = 1\}$$

e si usa la Proposizione 1.2.2.

Osservazione 1.2.4. Se $m(E) = 0$ allora **ogni** $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile. Infatti

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}} : \quad Z_a = \{f > a\} \subset E \Rightarrow m^*(Z_a) \leq m^*(E) = m(E) = 0,$$

perciò Z_a è misurabile (con misura nulla).

La seguente caratterizzazione di misurabilità tramite restrizioni è molto utile.

Proposizione 1.2.3. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ con $E = E_1 \cup E_2, E_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ per $j = 1,2$. Allora*

$$f \in \mathrm{Mis}(E) \Leftrightarrow f_{|E_j} \in \mathrm{Mis}(E_j), \quad j = 1,2.$$

Dimostrazione. Infatti:

($\Rightarrow$) $\{f_{|E_j} > a\} = \{f > a\} \cap E_j, \ \ \forall\, a \in \overline{\mathbb{R}};$

($\Leftarrow$) $\{f > a\} = \{f_{|E_1} > a\} \cup \{f_{|E_2} > a\}, \ \ \forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}.$

□

Proposizione 1.2.4. *Siano* $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *t.c.*

$$f(x) = g(x) \;\; \forall\, x \in E \setminus Z \;\; \text{con} \;\; m(Z) = 0. \tag{1.2.1}$$

Allora f *misurabile implica* g *misurabile (e viceversa).*

Dimostrazione. Spezziamo $E = E_1 \cup E_2$ con $E_1 = Z$ e $E_2 = E \setminus Z$. Abbiamo $g_{|E_1}$ misurabile per l'Osservazione 1.2.4 e $g_{|E_2} = f_{|E_2}$ misurabile per l'implicazione ($\Rightarrow$) della Proposizione 1.2.3 applicata ad f. Per l'altra implicazione della Proposizione 1.2.3 applicata a g abbiamo la tesi. □

La proprietà (1.2.1) va formalizzata per la sua importanza. Si tratta di un primo esempio di una proprietà valida tranne su un insieme trascurabile ovvero tranne su un insieme di misura nulla.

Definizione 1.2.2. (Proprietà valide quasi-ovunque)[14]

a) Siano f, g due funzioni definite su E. Diciamo che $f = g$ *quasi-ovunque in* E (*q.o. in* E) se esiste $Z \subset E$ t.c. $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in E \setminus Z$, ovvero

$$m\left(\{x \in E : \; f(x) \neq g(x)\}\right) = 0.$$

b) Sia $P(x)$ una proprietà con valore di verità (vero o falso) che dipende da $x \in E$. Diciamo che P *vale q.o. in* E se

$$m\left(\{x \in E : \; \text{non vale } P(x)\}\right) = 0.$$

Altri esempi di proprietà interessante anche quando valgono solo quasi-ovunque sono:

- $f > 0$ q.o. in E;
- $f_k \to f$ q.o. in E.

Inoltre, certe proprietà di una funzione f sono già determinate dal comportamento di f su un insieme di misura "piena". Alle luce della Proposizione 1.2.4, un esempio è fornito dalla proprietà di misurabilità.

Osservazione 1.2.5. Grazie alle proprietà viste ha senso dire che *f definita quasi-ovunque in E è misurabile.* Questo sta a significare che ogni prolugamento di f a tutto E è misurabile. Più precisamente, data $f : E \setminus Z \to \overline{\mathbb{R}}$ con $m^*(Z) = 0$, allora Z è misurabile e ha misura nulla (Proposizione 1.1.2). Preso un qualsiasi prolugamento $\bar{f} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ di f, abbiamo $\bar{f}$ misurabile su E se e solo se f è misurabile su $E \setminus Z$.

[14] In [4] si usa il termine *quasi dappertutto* con abbreviazione q.d.

1.2.2 Operazioni su funzioni misurabili

Teorema 1.2.1. *(Operazioni algebriche) Siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili. Allora lo sono anche:*

a) αf con $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) $f + g$

c) $1/f$ se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$;

d) fg.

Dimostrazione. Consultare [4] - Teorema 5.2.3. Ci sono tanti casi, nominiamo qui solo il punto chiave per la somma nella parte b). Il caso interessante è per $a \in \mathbb{R}$ e la parte di E su cui f, g sono finiti; cioè

$$\tilde{E} = \{-\infty < f, g < +\infty\} \text{ misurabile.}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\{f + g > a\} \cap \tilde{E} &= \{x \in \tilde{E} : f(x) > a - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[\tilde{E} \cap \{f > r\} \cap \{g > a - r\}\right],\end{aligned}$$

un insieme misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$. □

Osservazione 1.2.6. Nella parte c) del Teorema, se $f \neq 0$ q.o. in E, la funzione $1/f$ è definita q.o. in E (tolto l'isieme di misura nulla Z su cui $f = 0$) ed è misurabile. Poi, definendo $1/f$ su tutto Z in modo arbitrario, abbiamo un prolungamento misurabile su E.

Teorema 1.2.2. *Sia $\{f_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ una famiglia al più numerabile di funzioni misurabili su E. Allora sono misurabili le funzioni*

$$\sup_{k \in \mathcal{K}} f_k \;\text{ e }\; \inf_{k \in \mathcal{K}} f_k.$$

In particolare, il massimo o minimo di una collezione finita di funzioni misurabile è misurabile.

Dimostrazione. Di nuovo il punto chiave è che $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è un σ-algebra. Infatti, se $\{f_k\}_{k \in \mathcal{K}} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{\sup_{k \in \mathcal{K}} f_k \leq a\right\} = \bigcap_{k \in \mathcal{K}} \{f_k \leq a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n);$$

$$\left\{\inf_{k \in \mathcal{K}} f_k \geq a\right\} = \bigcap_{k \in \mathcal{K}} \{f_k \geq a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

□

Esempio 1.2.3. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Allora sono misurabili anche la *parte positiva di* f e la *parte negativa di* f

$$f^+ = \max\{f, 0\} \ \text{ e } \ f^- = \max\{-f, 0\} \tag{1.2.2}$$

ed anche il *modulo di* f

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{1.2.3}$$

Infatti, la prima affermazione segue dall'ultima affermazione del Teorema 1.2.2. Poi, la somma di funzioni misurabili è misurabile (Teorema 1.2.1).

Corollario 1.2.1. *Sia* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili su E a valori in* $\overline{\mathbb{R}}$. *Allora sono misurabili le funzioni*

$$\limsup_{k\to+\infty} f_k \ \text{ e } \ \liminf_{k\to+\infty} f_k.$$

In particolare, se $f_k \to f$ *puntualmente su E, il limite* f *è misurabile.*

N.B. Se $f_k \to f$ q.o. in E, allora il limite è misurabile in E per la Proposizione 1.2.4.

Dimostrazione. Si ha

$$\limsup_{k\to+\infty} f_k = \inf_{j\geq 1}\left(\sup_{k\geq j} f_k\right) := \inf_{j\geq 1} g_j,$$

dove g_j è misurabile per ogni j per il Teorema 1.2.2. Quindi anche $\inf_{j\geq 1} g_j$ è misurabile per lo stesso motivo. In modo analogo, basta notare

$$\liminf_{k\to+\infty} f_k = \sup_{j\geq 1}\left(\inf_{k\geq j} f_k\right) := \sup_{j\geq 1} h_j,$$

dove dove h_j è misurabile per ogni j per il Teorema 1.2.2. Infine, se $f_k \to f$ allora

$$f = \limsup_{k\to+\infty} f_k = \liminf_{k\to+\infty} f_k.$$

□

Osservazione 1.2.7. La composizione di funzioni misurabili **non** è misurabiile in generale (v. §5.3 di [5] per un controesempio). Invece, la composizione con una funzione continua è misurabile.

Teorema 1.2.3. *Siano* $f : E \to \mathbb{R}$ *misurabile con* $f(E) \subset U$ *aperto in* $\mathbb{R}$ *e* $g : U \to \mathbb{R}$ *continua. Allora la funzione* $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ *è misurabile.*

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{g \circ f > a\} = (g \circ f)^{-1}(a, +\infty) = f^{-1}\left(g^{-1}(a, +\infty)\right)$$

dove $g^{-1}(a, +\infty)$ è aperto in $U := \mathrm{dom}(g)$ e quindi è un unione numerabile di intervalli compatti; cioè

$$\begin{aligned} \{g \circ f > a\} &= f^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\alpha_k, \beta_k]\right) \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}\left([\alpha_k, \beta_k]\right) \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\{f \geq \alpha_k\} \cap \{f \leq \beta_k\}\right], \end{aligned}$$

che è un'unione numerabile di insiemi misurabili.

□

N.B. Il Teorema 1.2.3 vale anche per $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ **se** f è misurabile e finita q.o. in E.

Esempio 1.2.4. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e finita q.o. in E. Allora per ogni $p > 0$ la funzione $|f|^p$ è misurabile. In particolare f^p è misurabile se f è misurabile, positiva, e finita q.o. in E.

1.2.3 Approssimazione di funzioni misurabili

Per definire l'integrale di Lebesgue, abbiamo bisogno ancora di un elemento di teoria; l'approssimazione di funzioni misurabili tramite funzioni semplici e misurabili. Cominciamo con la definizione.

Definizione 1.2.3. Una funzione $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta *semplice* se s assume un numero finito di valori $\{c_1, \ldots, c_N\}$ con $c_j \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$, dove $c_i \neq c_j$ se $i \neq j$.

Osservazione 1.2.8. Notiamo che:

a) Ponendo $E_j = s^{-1}(\{c_j\}), j = 1, \ldots, N$ abbiamo

$$s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}, \tag{1.2.4}$$

che viene detta la *rappresentazione canonica* di s, dove per definizione abbiamo

$$\bigcup_{j=1}^{N} E_j = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad E_i \cap E_j = \emptyset \;\text{ se }\; i \neq j. \tag{1.2.5}$$

b) s è misurabile $\Leftrightarrow$ E_j è misurabile per ogni $j = 1, \dots, N$.

c) Se tutti gli insiemi E_j corrispondenti a $c_j \neq 0$ sono contenuti in uno stesso insieme E, la funzione s definita da (1.2.4) è nulla fuori di E e s è detta *funzione semplice su E*.

Teorema 1.2.4. *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

a) Ogni $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile è il limite puntuale (su E) di una successione $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici e misurabili su E.

b) Inoltre, se $f \geq 0$ in E, la successione $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ può essere scelta non negativa e crescente; cioè

$$0 \leq s_k \nearrow f, \quad \text{su } E \text{ per } k \to +\infty.$$

Dimostrazione. b) $\Rightarrow$ a): Infatti, scriviamo $f = f^+ - f^-$ dove $f^\pm \geq 0$ e sono misurabili. Per il punto b), esistono due successioni $\{s_k^{(\pm)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$0 \leq s_k^{(\pm)} \nearrow f^\pm \quad \text{per} \quad k \to +\infty.$$

In particolare $s_k^{(+)} - s_k^{(-)} \to f$ per $k \to +\infty$.

b): Data $f \geq 0$ e misurabile, costruiamo la successione $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e poi verifichiamo che ha le proprietà volute.

1. A passo k, si divide il codominio di $f = [0, +\infty]$ in $4^k + 1$ intervalli:
$$Y_k^{(j)} := \left[(j-1)\frac{1}{2^k}, j\frac{1}{2^k}\right), \quad j = 1, \dots, 4^k;$$
$$Y_k^{(4^k+1)} := \left[2^k, +\infty\right], \quad (j = 4^k + 1).$$
2. Si pone $E_k^{(j)} := f^{-1}\left(Y_k^{(j)}\right)$ misurabile per ogni $j = 1, \dots, 4^k + 1$
3. Su $E_k^{(j)}$ si approssima f per difetto con la costante $c_k^{(j)}$ dove
$$c_k^{(j)} := \begin{cases} (j-1)\frac{1}{2^k} & j = 1, \dots, 4^k \\ 2^k & j = 4^k + 1 \end{cases}$$
Quindi si pone
$$s_k := \sum_{j=1}^{4^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_k^{(j)}} + 2^k \chi_{E_k^{(4^k+1)}}.$$
4. Per costruzione, s_k è semplice e misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$ e soddisfa
$$0 \leq s_k \leq s_{k+1} \leq f \quad \text{su } E, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
5. Inoltre, si verifica che $s_k \to f$ su E. Infatti,
$$f(x) = +\infty \Rightarrow s_k(x) = 2^k \to +\infty;$$
$$f(x) < +\infty \Rightarrow 0 \leq f(x) - s_k(x) \leq 2^{-k} \to 0.$$

$\square$

1.3 L'integrale di Lebesgue

1.3.1 Definizione dell'integrale: funzioni integrabili e sommabili

Adesso abbiamo tutto quello che ci serve per definire l'integrale di Lebesgue. Procediamo in 3 passi:

1. $f = s$ semplice, misurabile;
2. $f \geq 0$ misurabile;
3. f misurabile qualsiasi.

Definizione 1.3.1. Sia $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ semplice e misurabile (con la rappresentazione canonica $s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}$ dove $E_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $c_j \in \mathbb{R}$ con $c_j \neq c_k$ per $j \neq k$.

a) *L'integrale di Lebesgue di s su* $\mathbb{R}^n$ è definito da [15]

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x)\, dx := \sum_{j=1}^{N} c_j m(E_j) \in [0, +\infty].$$

b) *L'integrale di Lebesgue di s su* $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è definito da

$$\int_E s(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} s(x)\chi_E(x)\, dx = \sum_{j=1}^{N} c_j m(E \cap E_j).$$

N.B.1 L'ultima formula è coerente perché

$$s(x)\chi_E(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}(x)\chi_E(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j \cap E}(x) = s_{|E}(x).$$

N.B.2 Forse sarebbe più chiara scrivere $dm(x)$ al posto di dx per sottolineare che l'integrazione è fatta rispetto alla misura m di Lebesgue.
Da funzioni semplici, misurabili e non negative passiamo a funzioni misurabili e non negative.

Definizione 1.3.2. Sia $f : E \to [0, +\infty]$ misurabile su $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. *L'integrale di Lebesgue di f su E* è definito da

$$\int_E f(x)\, dx := \sup_{s \in \mathcal{S}_f} \int_E s(x)\, dx,$$

dove $\mathcal{S}_f = \{s :\ \text{semplice e misurabile tale che } 0 \leq s \leq f \text{ su } E\}$.

[15] Usiamo la convenzione $c\, m(E) = 0$ se $c = 0$ per ogni E misurabile; cioè il valore 0 di s non contruibisce all'integrale di s.

Osservazione 1.3.1. Per **ogni** $f \geq 0$ misurabile l'integrale di Lebesgue è ben definito come elemento di $[0, +\infty]$. Ci sono due casi: o l'insieme degli integrali di tutte le funzioni semplici $s \in \mathcal{S}_f$ è limitato superioremente (integrale di f finito) oppure non lo è (integrale di f infinito)

Esempio 1.3.1. (Primi esempi)

a) Se $m(E) = 0$ allora $\int_E f(x)\,dx = 0$ per ogni $f \geq 0$ misurabile. Infatti, per ogni $s \in \mathcal{S}_f$:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{N} c_j m(E \cap E_j) = 0 \quad (E \cap E_j \subset E).$$

b) Se $f \equiv 0$ su E allora $\int_E f(x)\,dx = 0$. Infatti $s \equiv 0$ è l'unico elemento di $\mathcal{S}_0$ e $\int_E s(x)\,dx = 0\,m(E) = 0$ (usando sempre la convenzione vista sopra nel caso $m(E) = +\infty$).

c) Se $f : E \to [0, +\infty)$ è limitata superiormente e $m(E) < +\infty$ allora per ogni $s \in \mathcal{S}_f$:

$$\int_E s(x)\,dx \leq M \sum_{j=1}^{N} m(E \cap E_j) = M\,m(E) < +\infty.$$

Finalmente, passiamo al caso generale di funzioni misurabili con segno qualsiasi.

Definizione 1.3.3. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile su $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

a) Si dice che *f è integrabile secondo Lebesgue su E* se esiste **finito** almeno uno degli integrali $\int_E f^{\pm}(x)\,dx$. In tal caso *l'integrale di Lebesgue di f su E* è definito da

$$\int_E f(x)\,dx := \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx \in [-\infty, +\infty] \tag{1.3.1}$$

b) Si dice che *f è sommabile secondo Lebesgue su E* se esistono **finiti** entrambi gli integrali $\int_E f^{\pm}(x)\,dx$. In tal caso *l'integrale di Lebesgue di f su E* è definito da (1.3.1) ed è finito.

Osservazione 1.3.2. (Integrabilità e sommabilità) [16]

a) Chiaramente f sommabile su $E \Rightarrow f$ integrabile su E;

b) Ogni $f \geq 0$ misurabile è integrabile ($f^- = 0 \Rightarrow \int_E f^-\,dx = 0 < +\infty$) ma è sommabile solo se

$$\int_E f\,dx = \int_E f^+\,dx < +\infty.$$

[16] La termonologia **non** è del tutto uniforme nei diversi libri di testo. Usiamo quello di [4], ma [5] (ed altri) dicono *integrabile* dove usiamo *sommabile* e *esiste integrale di Lebesgue* dove usiamo *integrabile*.

1.3.2 Proprietà dell'integrale di Lebsegue

Stabiliremo le proprietà principali dell'integrale di Lebesgue mettendo in luce:

1. l'utilizzo della additività della misura di Lebesgue;
2. l'approssimazione di funzioni misurabili mediante funzioni semplici.

Teorema 1.3.1. *(Monotonia) Siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili su E misurabile. Allora*

a) $0 \le f \le g$ *su* $E \;\Rightarrow\; \int_E f\,dx \le \int_E g\,dx;$

b) $f \le g$ *e* f, g *sommabili* $\;\Rightarrow\; \int_E f\,dx \le \int_E g\,dx;$

c) $f \ge 0$ *e* $A \subseteq E$ *misurabile* $\;\Rightarrow\; \int_A f\,dx \le \int_E f\,dx;$

Dimostrazione. a) Per ogni funzione semplice s tale che $0 \le s \le f$ su E abbiamo $0 \le s \le g$ su E; cioè $\mathcal{S}_f \subset \mathcal{S}_g$. Quindi

$$\int_E f\,dx := \sup_{s\in\mathcal{S}_f}\int_E s\,dx \le \sup_{s\in\mathcal{S}_g}\int_E s\,dx := \int_E g\,dx.$$

b) Dalla relazione $f \le g$ su E abbiamo

$$\begin{cases} 0 \le f^+ \le g^+ & \text{su } E \\ f^- \ge g^- \ge 0 & \text{su } E \ \ (-f \ge -g) \end{cases}$$

Quindi, per la parte a),

$$\int_E f\,dx = \int_E f^+\,dx - \int_E f^-\,dx \le \int_E g^+\,dx - \int_E g^-\,dx = \int_E g\,dx. \tag{1.3.2}$$

c) Si ha $0 \le \chi_A f \le f$ su E perciò

$$\int_A f\,dx = \int_E \chi_A f\,dx \le \int_E f\,dx,$$

dove lasciamo la prima uguaglianza come esercizio sulla definizione dell'integrale di Lebesgue.

□

Osservazione 1.3.3. Il Teorema 1.3.1 vale anche se $f \le g$ con f e g sono solo *integrabili*. Infatti, la formula (1.3.2) rimane valida tenendo conto delle diversi casi possibili se esistono finiti uno degli integrali $\int_E f^\pm\,dx$ ed uno degli integrali $\int_E g^\pm\,dx$.

Teorema 1.3.2. *(Linearità) Siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili su E misurabile.*

a) Se $f \geq 0$ e $c \in [0, +\infty)$ allora [17]

$$\int_E cf\,dx = c\int_E f\,dx. \tag{1.3.3}$$

b) f sommabile e $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ cf sommabile e vale (1.3.3).

c) Se $f, g \geq 0$ allora

$$\int_E (f+g)\,dx = \int_E f\,dx + \int_E g\,dx. \tag{1.3.4}$$

d) f, g sommabili $\Rightarrow$ $f + g$ sommabile e vale (1.3.4).

N.B. Ci sono vari modi per dimostrare il risultato. Presentiamo una dimostrazione che anticipa una delle proprietà che motivava la costruzione dell'integrale di Lebesgue ovvero la facilità del passaggio di limiti sotto il segno di integrale. In particolare, utilizzeremo il cosidetto *Teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona* (v. Teorema 1.3.3 sotto) che sarà dimostrato nel paragrafo successivo. Il Teorema di Beppo Levi è naturale date la Definizione 1.3.2 dell'integrale e l'approssimazione monotona di funzioni misurabili non negative mediante funzioni semplici (Teorema 1.2.4 b)).

Dimostrazione. (del Teorema 1.3.2 tramite la convergenza monotona)
Passo 1: *Il caso di funzioni semplici misurabili e nonnegativi*

Lemma 1.3.1. *(Linearità) Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ semplici, misurabili e nonnegativi su E misurabile.*

i) Per ogni $c \in [0, +\infty)$ vale la formula (1.3.3).

ii) Vale la formula (1.3.4).

Dimostrazione. i) Per $f \geq 0$ semplice e misurabile abbiamo cf è semplice e misurabile. Se $f = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}$ con $E_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $c_j \geq 0$ abbiamo

$$\int_E cf\,dx := \sum_{j=1}^N cc_j m(E_j) = c\sum_{j=1}^N c_j m(E_j) := c\int_E f\,dx$$

ii) Per $f, g \geq 0$ semplici e misurabili prendiamo i loro rappresentanti canonici relativi ad E; cioè

$$f = \sum_{i=1}^M a_i \chi_{A_i} \quad \text{e} \quad g = \sum_{j=1}^N b_i \chi_{B_i}$$

[17] Il risultato vale anche per $c \leq 0$.

$$\begin{cases} 0 \leq a_i \\ A_i = \{x \in E : f(x) = a_i\} \\ \bigcup_{i=1}^M A_i = E, \ \ \{A_i\}_{i=1}^M \ \text{disgiunti} \end{cases} \qquad \text{(analogamente per } b_j, B_j\text{)}$$

Allora $f + g$ è semplice, misurabile e ha valori $a_i + b_j$ su $A_i \cap B_j$; cioè

$$f + g = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_E (f+g)\, dx &:= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (a_i + b_j) m\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} a_i \sum_{j=1}^{N} m\left(A_i \cap B_j\right) + \sum_{j=1}^{N} b_j \sum_{i=1}^{M} m\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} a_i\, m\left(A_i\right) + \sum_{j=1}^{N} b_j m\left(B_j\right) \\ &:= \int_E f\, dx + \int_E g\, dx, \qquad (1.3.5) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la additività di m e le decomposizioni $E = \bigcup_{i=1}^M A_i = \bigcup_{j=1}^N B_j$ in sottoinsiemi disgiunti.

□

Passo 2: *Il caso generale di funzioni misurabili* Iniziamo con l'enunciato del teorema sulla convergenza monotona.

Teorema 1.3.3. *(di Beppo Levi sulla convergenza monotona) Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni misurabili, non negative su E misurabile. Posto*

$$f(x) := \lim_{k \to +\infty} f_k(x);$$

(cioè $0 \leq f_k \nearrow f$ su E) si ha

$$\int_E f\, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_E f_k\, dx. \qquad (1.3.6)$$

Assumendo il Teorema 1.3.3, la dimostrazione del caso generale segue facilmente dal Lemma 1.3.1.

a) WLOG $c > 0$ (altrimenti (1.3.3) è banale[18]). Per $f \geq 0$ misurabile abbiamo una successione $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici, misurabili e non negative t.c. $0 \leq f_k \nearrow f$

[18] Ricordiamo la nostra convenzione che $\int_E 0\, dx = 0$ per ogni $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e usiamo la convenzione $0 \cdot \int_E f\, dx = 0$ se è ben definito l'integrale.

su E. Quindi abbiamo $0 \le cf_k \nearrow cf$ su E e anche

$$\int_E cf\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_E cf_k\,dx = \lim_{k\to+\infty} c \int_E f_k\,dx = c \int_E f\,dx,$$

dove abbiamo usato il Lemma 1.3.1 i) nella seconda uquaglianza e la convergenza monotona (su f_k e cf_k) nella prima e la terza uquaglianza.

b) Segue dalla parte a) usando $f = f^+ - f^-$ quando $c > 0$ e $-f = f^- - f^+$ quando $c < 0$.

c) Per $f, g \ge 0$ misurabili, usando il Teorema 1.2.4 possiamo prendere delle successioni di funzioni semplici e misurabili $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\begin{cases} 0 \le f_k \nearrow f & \text{su E} \\ 0 \le g_k \nearrow g & \text{su E} \end{cases}$$

Abbiamo $0 \le f_k + g_k \nearrow f + g$ su E e quindi

$$\begin{aligned} \int_E (f+g)\,dx &= \lim_{k\to+\infty} \int_E (f_k + g_k)\,dx \quad \text{(per il MCT)} \\ &= \lim_{k\to+\infty} \left[\int_E f_k\,dx + \int_E g_k\,dx \right] \quad \text{(usando Lemma 1.3.1 ii) con } f_k, g_k \text{ semplici)} \\ &= \int_E f\,dx + \int_E g\,dx \quad \text{(per il MCT).} \end{aligned}$$

d) Segue da c) tramite l'identità

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

(v. Teorema 5.3.5 di [4]).

□

Un certo numero di altre proprietà seguono dalla monotonia e dalla additività dell'integrale.

Corollario 1.3.1. *(Funzioni sommabili e confronto) Siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile su $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

a) f è sommabile su $E \Leftrightarrow |f|$ è sommabile su E. Inoltre

$$\left| \int_E f\,dx \right| \le \int_E |f|\,dx. \tag{1.3.7}$$

b) Se $|f| \le |g|$ su E allora g sommabile $\Rightarrow$ f sommabile.

Dimostrazione. a) Se $|f|$ è sommabile, si usa la monotonia e $0 \leq f^{\pm} \leq |f|$ per mostrare la sommabilità di f. Se f è sommabile si usa la linearità e $|f| = f^{+} + f^{-}$ per mostrare la sommabilità di $|f|$. Per la disuguaglianza integrale, si usa la monotonia più l'identità

$$-|f| \leq f \leq |f|.$$

b) Si usa la monotonia più le disuguaglianze $0 \leq f^{\pm} \leq |f| \leq |g|$.

□

Corollario 1.3.2. *(Additività) Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Se $E = E_1 \cup E_2$ con E_1, E_2 misurabili disgiunti. Allora*

i) $f_{|E_j}$ è sommabile su E_j, $j = 1, 2$;

ii) $\displaystyle\int_E f\,dx = \int_{E_1} f\,dx + \int_{E_2} f\,dx.$

Dimostrazione. i) Usando le disuguaglianze $0 \leq \chi_{E_j}|f| \leq |f|$ su E ed il confronto (Corollario 1.3.1) abbiamo $\int_{E_j} \chi_{E_j}|f|\,dx < +\infty$. Quindi $\chi_{E_j} f$ è sommabile su E_j.

ii) Usando la linearità abbiamo

$$\int_{E_1} f\,dx + \int_{E_2} f\,dx = \int_E \chi_{E_1} f\,dx + \int_E \chi_{E_2} f\,dx = \int_E (\chi_{E_1} + \chi_{E_2}) f\,dx = \int_E f\,dx.$$

□

Domanda: Quale è il ruolo degli insiemi di misura nulla?

Corollario 1.3.3. *Siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili tali che $f = g$ q.o. in E. Allora f è sommabile in E se e solo se g è sommabile in E e vale*

$$\int_E f\,dx = \int_E g\,dx.$$

Inoltre, se $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile su E e g è una qualsiasi funzione con $f = g$ q.o. in E, allora g è integrabile su E con lo stesso integrale.

Osservazione 1.3.4. Nello spirito dell'Osservazione 1.2.5, diciamo che f *definita quasi-ovunque in E è integrabile/sommabile in E* se ogni suo prolungamento a tutto E risulta misurabile e integrabile/sommabile. In particolare, se f è definita su $E \setminus Z$ con $m^*(Z) = 0$, allora per ogni prolungamento $\bar{f}$ di f abbiamo

$$\int_E \bar{f}\,dx = \int_{E\setminus Z} f\,dx + \int_Z \bar{f}\,dx = \int_{E\setminus Z} f\,dx.$$

Quindi possiamo usare il simbolo $\int_E f\,dx$ per indicare questa quantità che è independente dal prolungamento $\bar{f}$.

Dimostrazione. (del Corollario 1.3.3)

1. Basta mostrare solo una delle implicazioni nel caso sommabile. Supponiamo che f è sommabile in E. Posto $Z = \{x \in E : g(x) \neq f(x)\}$ abbiamo
$$g = \chi_{E\setminus Z}\, g + \chi_Z g = \chi_{E\setminus Z} f + \chi_Z g.$$
dove $|\chi_{E\setminus Z} f| \leq |f| \Rightarrow \chi_{E\setminus Z}\, g$ è sommabile e
$$\int_E \chi_Z g^{\pm}\, dx = \int_Z g^{\pm}\, dx = 0 < +\infty \ \ (g^{\pm} \geq 0, m(Z) = 0).$$
Quindi $\chi_Z g$ è sommabile con integrale nullo. Per la linearità dell'integrale abbiamo che g è sommabile e
$$\int_E g\, dx = \int_{E\setminus Z} f\, dx + 0 = \int_{E\setminus Z} f\, dx + \int_Z f\, dx = \int_E f\, dx.$$

2. Siano ora f integrabile ma **non** sommabile e $g = f$ q.o. in E. Allora g è misurabile e almeno uno degli integrali $\int_E f^{\pm}\, dx$ deve essere finito (diciamo quello per f^+) ed uguale a $\int_E g^+\, dx$ essendo $g^{\pm} = f^{\pm}$ q.o. in E. L'integrale di f^- essendo infinito implica la stessa cosa per l'integrale di g^- e abbiamo finito.

□

In particolare, se $f = 0$ q.o. in E, f ha integrale nullo. Vale il contrario nel caso di funzioni non negative (v. Teorema 1.3.4 sotto). La sua dimostrazione sfrutta uno strumento semplice e fondamentale per confrontare integrali con la misura dei sopralivelli.

Lemma 1.3.2. *(Disuguaglianza di Tchebyshev) Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e non negativa. Per ogni $\alpha > 0$ si ha*

$$m(\{x \in E : f(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E f\, dx. \tag{1.3.8}$$

Dimostrazione. L'insieme $E_\alpha = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ è misurabile e abbiamo
$$\int_E f\, dx \geq \int_E \chi_{E_\alpha} f\, dx = \int_{E_\alpha} f\, dx \geq \int_{E_\alpha} \alpha\, dx = \alpha m(E_\alpha).$$

□

Usando la disuaguaglianza di Tchebyshev, si dimostrano facilmente i due risultati seguenti.

Teorema 1.3.4. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e non negativa. Allora*
$$\int_E f\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ q.o. in } E.$$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, dal Lemma 1.3.2 abbiamo

$$m(E_{1/k}) \leq \frac{1}{1/k} \int_E f\, dx = 0$$

e quindi

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in E : f(x) > 1/k\}$$

ha misura nulla. □

Teorema 1.3.5. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Allora f è finita q.o. in E; cioè*

$$m\left(\{\, |f| = +\infty \}\,\right) = 0.$$

Dimostrazione. Basta notare

$$\{|f| = +\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{|f| > k\} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$$

dove E_k è decrescente in k ed ogni E_k ha misura finita perchè f è sommabile. Applicando il Lemma 1.3.2 si trova

$$m(\{|f| > k\}) \leq \frac{1}{k} \int_E |f|\, dx \to 0 \text{ per } k \to +\infty,$$

dove l'integrale è finito per ipotesi. Usando poi il Corollario 1.1.1 b), si ha

$$m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) = \lim_{k \to +\infty} m(E_k) = 0.$$

□

Osservazione 1.3.5. (Notazioni e convenzioni) Prendiamo atto del contenuto dei risultati di confronto (Corollario 1.3.1) e l'uguaglianza degli integrali per funzioni uguali quasi ovunque (Corollario 1.3.3).

a) Abbiamo visto che i concetti di <u>misurabilità</u> e <u>integrabilità, sommabilità</u> non vedono cambiamenti su insiemi di misura nulla (Osservazione 1.2.4, Corollario 1.3.3). Quindi, data funzione $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e **integrabile** su E, scriviamo $\int_E f\, dx$ per l'integrale di **ogni** funzione $\bar{f} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $\bar{f} = f$ q.o. in E. Questo perché $\bar{f}$ è misurabile e ha lo stesso integrale di f. In particolare, se f è definita solo q.o. in E (cioè su $E \setminus Z$ con $m(Z) = 0$), la misurabilità ed integrabilità di ogni suo prolungamento a tutto E sono già determinate. Quindi, possiamo usare lo stesso simbolo per gli integrali di ogni suo prolungamento anche se a volte, vogliamo fissare attenzione ad uno particolare (ad esempio, il prolungamento $\bar{f} = 0$ su Z). Così il funzionale di integrazione su E

$$\mathcal{I}_E(f) := \int_E f\,dx$$

risulta ben definito sullo spazio quoziente di tutte le funzioni integrabili su E rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \iff f = g \text{ q.o. in } E.$$

b) Poiché la sommabilità di f equivale alla sommabilità di $|f|$, e, quindi alla finitezza dell'integrale $\int_E |f|\,dx$, possiamo definire lo spazio delle funzioni sommabili su E come

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^1(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ misurabile su } E : \int_E |f|\,dx < +\infty\}.$$

Poi, sfruttando la relazione di equivalenza $\sim$, possiamo definire anche lo spazio quoziente $L(E) = L^1(E)$ indentificando funzioni sommabili che sono uguali quasi ovunque in E. L'esponente 1 è dovuto a $|f| = |f|^1$. La generalizzazione naturale è quella di considerare un generico esponente di sommabilità $p > 0$: in tal modo otteniamo gli spazi $\mathcal{L}^p(E)$ e $L^p(E)$ (v. il corso di Analisi Reale).

Molte altre proprietà dell'integrale di Lebesgue saranno ottenute tramite i teoremi di passaggio sotto segno di integrale.

1.4 Limiti sotto il segno di integrale

Obiettivo: Analizzare (tra altro) sotto quali ipotesi vale una formula di *passaggio di limite sotto il segno di integrale*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k\,dx$$

ricordando che la teoria di Riemann richiede *E limitato* e convergenza *uniforme* su E. In particolare, intendiamo:

1. dimostrare i tre teoremi basilari (Beppo Levi, Fatou, Lebesgue);
2. illustrare il loro uso con esempi concreti;
3. sviluppare qualche generalizzazione;
4. indicare delle applicazioni.

1.4.1 I tre teoremi principali

Cominciamo dando una dimostrazione del Teorema 1.3.3 di convergenza montona:
Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione* <u>*crescente*</u> *di funzioni misurabili,* <u>*non negative*</u> *su E misurabile. Posto* $f(x) := \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ *si ha*

$$\int_E f\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_E f_k\,dx.$$

Dimostrazione.

1. Dato che $0 \le f_k \nearrow$, per ogni $x \in E$ esiste il limite $f(x) \in [0,+\infty]$. La funzione f così definita è misurabile (per il Corollario 1.2.1) ed integrabile (eventualmente con il suo integrale infinito).

2. Per la monotonia (Teorema 1.3.1) abbiamo anche

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \int_E f_k\,dx \le \int_E f\,dx \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\int_E f_k\,dx \le \int_E f\,dx.$$

   Quindi, basta mostrare la disuguaglianza opposta.

3. Siano $s \in \mathcal{S}_f$ e $\alpha \in (0,1)$ fissato. Poniamo $E_0 = \emptyset$ e

$$E_k = \{x \in E : \ f_k(x) \ge \alpha s(x)\},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

   Abbiamo $E_k \nearrow E$ con $\{E_k\}$ misurabili. [19] Quindi usando la proprietà di monotonia del Teorema 1.3.1 c) per le funzioni misurabili e non negativi otteniamo

$$\int_E f_k\,dx \ge \int_{E_k} f_k\,dx \ge \int_{E_k} \alpha s\,dx.$$

   Per le funzioni semplici, misurabili e nonnegativi abbiamo la linearità del Lemma 1.3.1 e quindi anche l'additività del Corollario 1.3.2.[20] Quindi abbiamo

$$\int_E f_k\,dx \ge \int_{E_k} f_k\,dx \ge \int_{E_k} \alpha s\,dx = \alpha\int_{E_k} s\,dx = \alpha\sum_{j=1}^{k}\int_{E_j\setminus E_{j-1}} s\,dx,$$

   Gli insiemi $\{G_j := E_j \setminus E_{j-1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ sono misurabili, disguinti con unione E. In questa situazione si ha

$$\int_E s\,dx = \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{G_j} s\,dx.$$

   Infatti, se $s = \sum_{i=1}^{N} c_i\chi_{F_i}$ con $F_i = \{x \in E : \ s(x) = c_i\}$ abbiamo

$$\int_E s\,dx = \sum_{i=1}^{N} c_i m(F_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i\sum_{j=1}^{\infty} m(F_i\cap G_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N} c_i m(F_i\cap G_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{G_j} s\,dx.$$

[19] Il fattore $\alpha \in (0,1)$ serve per mostrare l'inclusione $E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Ad esempio, con $f = s$ semplice e $0 \le f_k \nearrow f$ ma $f_k(x) < f(x)$ per ogni x, è possible avere $\{x \in E : f_k(x) \ge s(x)\} = \emptyset$.

[20] È importante **non** usare delle proprietà basate sul Teorema di Beppo Levi!

Quindi abbiamo

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f\,dx \geq \alpha \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\int_{E_j\setminus E_{j-1}} s\,dx\right) = \alpha\int_E s\,dx.$$

Mandiamo $\alpha \to 1^-$ per trovare

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f\,dx \geq \int_E s\,dx,$$

dove $s \in \mathcal{S}_f$ è arbitrario. Prendiamo il sup per $s \in \mathcal{S}_f$ per trovare il risultato.

□

Osservazione 1.4.1. L'ipotesi di monotonia è essenziale; esistono esempi di $0 \leq f_k \to f$ su E con $\int_E f_k\,dx \not\to \int_E f\,dx$.

Esempio 1.4.1. (Schiacciando scatole) Siano $f_k : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definite da $f_k = k^{-1}\chi_{[0,k]}$. Abbiamo $f_k \to 0$ (uniformemente) su $\mathbb{R}$ ma **non** in modo monotono e abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$1 = \int_E f_k\,dx \quad \text{ma} \quad \int_E f\,dx = 0.$$

Esempio 1.4.2. (Concentrando denti) Siano $k \geq 2$ e $f_k : [0,1] \to [0, +\infty)$ definite da

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & x \in [0, 1/k] \\ 2k - k^2 x & x \in [1/k.2/k] \\ 0 & x \in [2/k, 1] \end{cases}$$

Abbiamo $f_k \to 0$ (non uniformemente) su $[0,1]$ ma **non** in modo monotono e abbiamo per ogni $k \geq 2$

$$1 = \int_E f_k\,dx \quad \text{ma} \quad \int_E f\,dx = 0.$$

Il prossimo risultato importante toglie l'ipotesi di monotonia (e della convergenza puntuale) della successione $\{f_k\}$. Il prezzo da pagare per questo indebolimento è che al posto di un'uguaglianza per il limite si ottiene una disuguaglianza per il *limite superiore*

$$\liminf_{k\to+\infty} f_k = \sup_{j\geq 1}\left(\inf_{k\geq j} f_k\right) := \sup_{j\geq 1} g_j = \lim_{j\to+\infty} g_j. \tag{1.4.1}$$

Il punto chiave è la monotonia $0 \leq g_j \nearrow \liminf_{k\to+\infty} f_k$. Quindi si può applicare il MCT.

Teorema 1.4.1. *Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non negative su E misurabile. Allora*

$$\int_E \left(\liminf_{k\to+\infty} f_k\right) dx \leq \liminf_{k\to+\infty}\int_E f_k\,dx. \tag{1.4.2}$$

Dimostrazione. Iniziamo notando che per ogni $j \in \mathbb{N}$ fisso abbiamo

$$0 \leq g_j(x) := \inf_{k \geq j} f_k(x) \leq f_k(x) \quad \forall\, x \in E, \forall\, k \geq j$$

e per la monotonia dell'integrale abbiamo

$$\int_E g_j(x)\, dx \leq \int_E f_k\, dx \quad \forall\, k \geq j.$$

Prendiamo l'estremo inferiore su k con $k \geq j$ per ottenere

$$\forall\, j \in \mathbb{N} : \quad \int_E g_j(x)\, dx \leq \inf_{k \geq j} \int_E f_k\, dx.$$

Prendiamo poi il limite in j per ottenere

$$\lim_{j \to +\infty} \int_E g_j(x)\, dx \leq \lim_{j \to +\infty} \left(\inf_{k \geq j} \int_E f_k\, dx \right) := \liminf_{k \to +\infty} \left(\int_E f_k\, dx \right),$$

e applichiamo il MCT al membro sinistro per ottenere

$$\int_E \lim_{j \to +\infty} g_j(x)\, dx \leq \liminf_{k \to +\infty} \left(\int_E f_k\, dx \right),$$

ma $g_j \nearrow \liminf_{k \to +\infty} f_k$. □

Osservazione 1.4.2. In generale, la disuguaglianza in (1.4.2) è **stretta**. Basti pensare agli Esempi 1.4.1 e 1.4.2.

Teorema 1.4.2. *(di Lebesgue sulla convergenza dominata) Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su E misurabile tale che*

i) $f_k \to f$ su E;

ii) $|f_k| \leq g$ su E con g sommabile su E.

Allora f è sommabile su E e vale

$$\int_E f\, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_E f_k\, dx. \tag{1.4.3}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sfrutta il Lemma di Fatou e proprietà elementari.

1. Ogni f_k è sommabile per la maggiorazione ii) e f è misurabile per il limite i). Inoltre dato che la maggiorazione in ii) è uniforme in k abbiamo

$$|f(x)| = \lim_{k \to +\infty} |f_k(x)| \leq g(x), \quad \forall\, x \in E,$$

e f è sommabile per confronto.

2. Affermiamo che vale

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\,dx = 0 \tag{1.4.4}$$

che è più forte di (1.4.3) (v. punto 3 nel seguito). Infatti, dalla maggiorazione ii) ed il limite i) abbiamo

$$\begin{cases} |f_k(x)-f(x)| \le 2g(x), \quad \forall\, x\in E \\ \\ \lim\limits_{k\to+\infty} |f_k(x)-f(x)| = 0 \end{cases}$$

Per il Lemma di Fatou otteniamo

$$\begin{aligned}\int_E 2g\,dx &= \int_E \liminf_{k\to+\infty}(2g-|f_k-f|)\,dx \\ &\le \liminf_{k\to+\infty}\left(\int_E 2g\,dx - \int_E |f_k-f|\,dx\right) \\ &= \int_E 2g\,dx + \liminf_{k\to+\infty}\left(-\int_E |f_k-f|\,dx\right) \\ &= \int_E 2g\,dx - \limsup_{k\to+\infty}\left(\int_E |f_k-f|\,dx\right) \le \int_E 2g\,dx.\end{aligned}$$

Quindi dobbiamo avere

$$0 \le \liminf_{k\to+\infty}\left(\int_E |f_k-f|\,dx\right) \le \limsup_{k\to+\infty}\left(\int_E |f_k-f|\,dx\right) = 0,$$

e quindi (1.4.4).

3. È ovvio che (1.4.4) $\Rightarrow$ (1.4.3) perchè

$$\left|\int_E f\,dx - \int_E f_k\,dx\right| \le \int_E |f_k-f|\,dx \to 0.$$

□

Osservazione 1.4.3. L'ipotesi $|f_k|\le g$ su E con g sommabile su E implica che le funzioni $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sono sommabili. Inoltre, questa maggiorazione è essenziale per il Teorema di Lebesgue. Ad esempio, per la successione $f_k = k^{-1}\chi_{[0,k]}$ dell'Esempio 1.4.1 la funzione maggiorante ottimale è

$$g(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\chi_{[j-1,j]}(x),$$

dove g è una funzione *semplice generalizzata* (v. §5.4 di [4]). Questa funzione **non** ha integrale finito: per ogni $N\in\mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} g\,dx \ge \int_{[1,N]} 1/x\,dx = \log N.$$

1.4.2 Generalizzazioni ed applicazioni

Osservazione 1.4.4. (Ancora sul ruolo degli insiemi di misura nulla) Dato che la misurabilità e la sommabilità non si sentono del cambiamento delle funzioni su insiemi di misura nulla, non dobbiamo stupirci che i risultati di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue possano essere generalizzati sostituendo le proprietà puntuali ovunque con quasi-ovunque. Più precisamente:

- la non negatività di f_k in Beppo Levi e Fatou;
- la convergenza puntuale in Beppo Levi e Lebesgue;
- la maggiorazione $|f_k| \leq g$ in Lebesgue.

Lasciamo come esercizio di controllare queste generalizzazioni (v. Osservazione 5.4.4 di [4] per il caso di Lebesgue).

Una generalizzazione utile del teorema di Lebesgue (DCT) è data nel seguente risultato in cui si sfrutta una successione opportuna di maggioranti.

Teorema 1.4.3. *(DCTG) Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su E misurabile t.c.*

i) $f_k \to f$ q.o. su E;

ii) $|f_k| \leq g_k$ q.o. su E con g_k sommabile su E.

iii) esiste g sommabile su E tale che $g_k \to g$ q.o. su E e $\displaystyle\int_E g_k\,dx \to \int_E g\,dx$.

Allora vale (1.4.4)*, cioè*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_E \left|f_k - f\right|\,dx = 0,$$

In particolare, $f \in L(E)$ e $\displaystyle\int_E f_k\,dx \to \int_E f\,dx$.

Dimostrazione. La dimostrazione sfrutta di nuovo il Lemma di Fatou ed il fatto che

$$\liminf_{k\to+\infty}(a_k + b_k) = \lim_{k\to+\infty} a_k + \liminf_{k\to+\infty} b_k \quad \text{se esiste il limite.} \tag{1.4.5}$$

1. Abbiamo f misurabile per la i) e $|f| \leq g$ q.o. in E per la i), ii) e la prima parte della iii). Quindi f è sommabile e abbiamo

$$|f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq g_k + g \text{ q.o. in } E.$$

2. Possiamo applicare il Lemma di Fatou a $g_k + g - |f_k - f| \geq 0$ per ottenere

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{k\to+\infty} (g_k + g - |f_k - f|)\, dx &\leq \liminf_{k\to+\infty} \int_E (g_k + g - |f_k - f|)\, dx \\ &= \liminf_{k\to+\infty} \left[\int_E (g_k + g)\, dx - \int_E |f_k - f|\, dx \right]\end{aligned}$$

Nel membro sinistro il lim inf è un limite e nel membro destro usiamo (1.4.5) e la seconda parte di iii) per ottenere

$$\int_E 2g\, dx \leq \int_E 2g\, dx + \liminf_{k\to+\infty} \left(- \int_E |f_k - f|\, dx \right) = \int_E 2g\, dx - \limsup_{k\to+\infty} \int_E |f_k - f|\, dx.$$

e perciò

$$0 \leq \liminf_{k\to+\infty} \left(\int_E |f_k - f|\, dx \right) \leq \limsup_{k\to+\infty} \left(\int_E |f_k - f|\, dx \right) = 0.$$

Quindi abbiamo (1.4.4) e poi (1.4.3) come prima.

□

Adesso presentiamo alcune applicazioni dei teoremi di passaggio del limite sotto segno di integrali.

Corollario 1.4.1. *(Integrazione per serie) Sia $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ una successione di funzioni misurabili su E misurabile.*

Se $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sono non negative su E, la funzione $f := \sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ è misurabile e vale

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E f_k\, dx. \tag{1.4.6}$$

Se $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sono sommabili su E misurabile con $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c

i) $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ *q.o. in E;*

ii) $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_E |f_k(x)|\, dx < +\infty.$

Allora f è sommabile su E e vale (1.4.6).

Dimostrazione. I due casi sono applicazioni del MCT e del DCT rispettivamente.

a) Con $f_k \geq 0$ e misurabile per ogni k si ha

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} f_k \right) := \lim_{N\to+\infty} S_N$$

dove $0 \leq S_N \nearrow f$. Applicando il MCT troviamo

$$\lim_{N\to+\infty} \int_E S_N \, dx = \int_E f \, dx$$

ma

$$\lim_{N\to+\infty} \int_E S_N \, dx = \lim_{N\to+\infty} \int_E \sum_{k=1}^{N} f_k \, dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\int_E f_k \, dx \right).$$

b) Per la parte a), dato che $|f_k|$ è misurabile e nonnegativa e usando la ii) si ha

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k| \right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k| \, dx \right) < +\infty$$

e quindi $g := \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$ è sommabile. Posto $S_N(x) := \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{cases} S_N \to f \text{ q.o. in } E \\ |S_N| \leq \sum_{k=1}^{N} |f_k| \leq g \end{cases}$$

Per il DCT si ha

$$\lim_{N\to+\infty} \int_E \sum_{k=1}^{N} f_k \, dx = \lim_{N\to+\infty} \int_E S_N \, dx = \int_E f \, dx = \int_E \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \right) dx.$$

□

Osservazione 1.4.5. L'integrazione per serie potrebbe essere vista come la *linearità numerabile* dell'integrale di Lebesgue. Sapendo che l'additività dell'integrale è figlia della linearità, non dobbiamo essere sopresi dal fatto che abbiamo anche *l'additività numerabile* dell'integrale.

Corollario 1.4.2. *(Additività numerabile dell'integrale) Sia* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *misurabile su* $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ *con* $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *misurabili, disgiunti. Se* f *è non negativa/sommabile su* E *allora vale*

$$\int_E f \, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} f \, dx. \tag{1.4.7}$$

Dimostrazione. a) Con $f \geq 0$ misurabile, poniamo

$$f_k := \chi_{E_k} f \geq 0 \quad \text{e} \quad f(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k.$$

Per l'integrazione per serie si trova

$$\int_E f \, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E f_k \, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} f \, dx.$$

b) Con f sommabile, la parte a) implica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_E |f_k| \, dx = \int_E |f| \, dx < +\infty$$

e quindi possiamo applicare il Corollario 1.4.1 nel caso sommabile a $f_k = \chi_{E_k} f$.

□

Il seguente risultato dà un altro aspetto della additività.

Corollario 1.4.3. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e non negativa su $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ con E_k misurabile.*

a) Se E_k è crescente in k allora

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k} f \, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{E_k} f \, dx.$$

b) Se E_k è decrescente in k e $\int_{E_1} f \, dx < +\infty$ allora

$$\int_{\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k} f \, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{E_k} f \, dx.$$

Dimostrazione. Si applica il MCT.

a) Posto $E := \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, si ha $0 \le \chi_{E_k} f \nearrow f$ su E e quindi

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k} f \, dx = \int_E f \, dx = \int_E \left(\lim_{k \to +\infty} \chi_{E_k} f \right) dx \overset{\text{(MCT)}}{=} \lim_{k \to +\infty} \int_E \chi_{E_k} f \, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{E_k} f \, dx.$$

b) Posto $G_k := E_1 \setminus E_k \nearrow E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{E_1 \setminus E_k} f \, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{G_k} f \, dx \overset{\text{a)}}{=} \int_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k} f \, dx = \int_{E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k} f \, dx,$$

e quindi

$$\lim_{k \to +\infty} \left[\int_{E_1} f \, dx - \int_{E_k} f \, dx \right] = \int_{E_1} f \, dx - \int_{\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k} f \, dx.$$

□

Osservazione 1.4.6. Un modo di interpretare il Corollario 1.4.3 sarebbe di vederlo come una proprietà di continuità della *funzione integrale* $F : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da

$$F(E) := \int_E f \, dx,$$

con $f \geq 0$ su E. Infatti, abbiamo

$$E_k \nearrow E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad \Rightarrow \quad F(E_k) = \int_{E_k} f\,dx \to F(E) = \int_E f\,dx;$$

$$E_k \searrow E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad \Rightarrow \quad F(E_k) = \int_{E_k} f\,dx \to F(E) = \int_E f\,dx,$$

dove serve $\int_{E_1} f\,dx < +\infty$ nella seconda affermazione. Riassumendo possiamo dire che F è continua lungo successioni monotone di insiemi. Possiamo dire di più.

Corollario 1.4.4. *(Continuità assoluta dell'integrale di Lebesgue) Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile su E misurabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c.*

$$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),\ A \subset E,\ m(A) < \delta \ \Rightarrow \int_A |f|\,dx < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ ed esistono $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ misurabili t.c.

$$m(A) < \frac{1}{2^j} \quad \text{e} \quad \int_{A_j} |f|\,dx \geq \bar{\varepsilon} > 0.$$

- Poniamo $E_k = \bigcup_{j=k}^{+\infty} A_j$ e abbiamo E_k decrescente in k, $m(E_k) < +\infty$ e

$$(*) \qquad \int_{E_k} |f|\,dx \geq \int_{A_j} |f|\,dx \geq \bar{\varepsilon} > 0.$$

- Inoltre abbiamo

$$(**) \qquad m\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k\to+\infty} m(E_k) \leq \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0.$$

- D'altra parte, E_k è decrescente e $\int_{E_1} |f|\,dx < +\infty$. Quindi, usando il Corollario 1.4.3 b) e le affermazioni (**) e (*) otteniamo

$$0 = \int_{\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k} |f|\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{E_k} |f|\,dx \geq \bar{\varepsilon} > 0.$$

  Questo è assurdo.

□

Concludiamo questo paragrafo con alcuni esercizi teorici che si dimostrano utilizzando i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Corollario 1.4.5. *(Test per la sommabilità) Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni sommabili su E misurabile e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c* *i)* $f_k \to f$ *q.o. in E;*

ii) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k(x)|\, dx \leq M < +\infty.$

Allora f *è sommabile su E e vale*

$$\int_E f(x)\, dx \leq M.$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. Suggerimento: usare il Lemma di Fatou (v. Proposizione 5.4.7 di [4]). □

Corollario 1.4.6. *(Sulla convergenza uniforme - UCT) Sia* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni sommabili su E misurabile con* $m(E)$ *finito t.c.* $f_k \to f$ *uniformemente in E. Allora* f *è sommabile in E e vale*

$$\int_E f\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. Suggerimento: usare la "stima brutale" (1.3.7) del Corollario 1.3.1 (v. Teorema 6.11 di [5]). □

Corollario 1.4.7. *(Sulla convergenza limitata - BCT) Sia* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili su E misurabile con* $m(E)$ *finito t.c.*

i) $f_k \to f$ *puntualmente in E;*

ii) esite $M > 0$ *t.c.* $|f_k| \leq M$ *q.o. in E.*

Allora f *è sommabile in E e vale*

$$\int_E f\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. Suggerimento: usare il DCT. □

1.5 Confronto fra gli integrali di Lebesgue e Riemann

In questo paragrafo, vogliamo confrontare queste due teorie di integrazione. Abbiamo già notato qualche differenza per motivare le scelte fatte per la teoria di Lebesgue, ma fino adesso sostanzialmente le differenze sono state precisate solo a livello delle ripettive misure. Qui l'obiettivo è di fissare l'attenzione alle differenze per quanto riguarda l'integrabilità ed il calcolo di integrali. In particolare, vogliamo sapere quando possiamo usare senza timore quello che sappiamo già sul calcolo di Riemann nel contesto della teoria di Lebesgue. Cominciamo precisando l'interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione non negativa tramite la misura della regione sotto il suo grafico. Questo ci servirà per organizzare il confronto. Per sottolineare il ruolo della dimensione, denotiamo con m_n la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.5.1. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione non negativa su $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) È detto *grafico di f su E* l'insieme

$$\Gamma(f, E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E,\ f(x) < +\infty, y = f(x)\};$$

b) È detta *regione sotto il grafico di f su E* l'insieme

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(f, E) \quad = \quad & \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in E, f(x) < +\infty, 0 \le y \le f(x)\} \\ & \cup\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, f(x) = +\infty, 0 \le y \le +\infty\}\end{aligned}$$

Teorema 1.5.1. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione* <u>*misurabile*</u> *e non negativa su $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

a) $\Gamma(f, E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1})$ *e* $m_{n+1}(\Gamma(f, E)) = 0$;

b) $\mathcal{R}(f, E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1})$ *e* $m_{n+1}(\mathcal{R}(f, E)) = \displaystyle\int_E f\, dx.$

Dimostrazione. (Cenno)

1. Per $f = c\chi_E, c \in [0, +\infty]$: la regione $\mathcal{R}(f, E)$ è un *cilindro* con base E ed *altezza c*. Le affermazioni su $\mathcal{R}(f, E)$ sono mostrate tramite una successione di riduzioni sulla forma di E, sfruttando i teoremi di struttura del paragrafo 1.1.3 (v. Lemma (5.2) di [7] per una dimostrazione completa). Il grafico $\Gamma(f, E)$ è vuoto nel caso $c = +\infty$. Nel caso $0 \le c < +\infty$, si ha

$$\Gamma(f, E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left[\mathcal{R}(f + 1/k, E) \setminus \mathcal{R}(f - 1/k, E)\right].$$

   Quindi il grafico è misurabile e abbiamo $m_{n+1}(\Gamma(f, E)) \le \dfrac{2}{k} m_n(E)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se $m(E) < +\infty$ abbiamo finito. Altrimenti, tagliamo E con le bolle $B_j(0)$ per $j \in \mathbb{N}$ e passiamo al limite per $j \to +\infty$.

2. Per $f = s$ semplice su E, misurabile, non negativa: la regione ed el grafico sono un'unione finito di insiemi disgiunti considerati nel caso 1.

3. Per f misurabile, non negativa: si mostra che $m^*_{n+1}(\Gamma(f, E)) < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ (v. Lemma 5.3 di [7]). Quindi abbiamo la parte a). Per la parte b), si sfruttano l'approssimazione monotona $0 \le s_k \nearrow f$ su E, convergenza monotona ed il caso 2.

$\square$

Ora siamo pronti per il confronto degli integrali di Lebesgue e Riemann.

Teorema 1.5.2. *Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato e misurabile secondo Peano-Jordan e $f : E \to \mathbb{R}$ limitata ed integrabile secondo Riemann. Allora f è sommabile secondo Lebesgue su E e l'integrale di Riemann di f coincide con l'integrale di Lebesgue.*

Dimostrazione. (Cenno) Ci sono tre passi.

1. E misurabile secondo PJ implica E misurabile secondo Lebesgue. Questo passo è abbastanza facile usando la definizione di m_L tramite la misura esterna/misura interna di Lebesgue.

2. f è sommabile secondo Lebesgue usando la stima $\left|\int_E f\, dm_L\right| \leq \sup_E |f|\, m_L(E)$.

3. Gli integrali sono uguali (v. Proposizione 5.A.2 di [4] per il caso $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e Corollario del Teorema 2 in §91 di [1] per il caso generale). Nel caso generale, è molto utile il Teorema 1.5.1.

□

Osservazione 1.5.1. Esistono funzioni limitate su insiemi limitati, sommabili secondo Lebesgue ma non integrabili secondo Riemann. Ad esempio, la funzione di Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ su $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ha integrale di Lebesgue nullo ma non esiste l'integrale di Riemmann (l'integrale superiore è 1 ma l'integrale inferiore è 0).

Teorema 1.5.3. *Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile in senso generalizzato di Riemann (integrale improprio) dove $-\infty < a < b \leq +\infty$. Se f ha segno costante, allora f è integrabile secondo Lebesgue in $E = [a, b]$ con integrale di Lebesgue uguale all'integrale improprio di Riemann.*

Dimostrazione. FACOLTATIVO: v. Proposizione 5.A.4 di [4] nel caso f continua e Teorema 5.53 di [7] per il caso generale. □

Osservazione 1.5.2. L'ipotesi di segno costante è essenziale. Ad esempio, $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

ammette integrale improprio secondo Riemann ma non è integrabile secondo Lebesgue. Infatti, integrando per parti su ogni intervallo [1, b] con $b \in (1, +\infty)$ si ha

$$\int_1^b \frac{\sin(\pi x)}{x} = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi x}\right]_1^b - \frac{1}{\pi}\int_1^b \frac{\cos(\pi x)}{x^2}.$$

Il primo termine tende a 0 per $b \to +\infty$ ed il secondo ha limite finito per il decadimento $1/x^2$ della funzione integranda. D'altre parte, usando la periodicità di f e l'integrazione per serie (Corollario 1.4.1) si vede che $\int_{[1,+\infty]} f^{\pm}\, dx = +\infty$.

Infine, abbiamo una caratterizzazione dell'integrabilità secondo Riemann per funzioni limitate.

Teorema 1.5.4. *(Criterio di Vitali-Lebesgue) Sia E limitato e misurabile secondo PJ. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. FACOLTATIVO: v. Teorema 5.54 di [7] per il caso di $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$. □

1.6 Riduzione: i Teoremi di Fubini e Tonelli

In questo paragrafo approfondiamo il discorso sul calcolo di integrali di Lebesgue iniziato con il confronto con l'integrale di Riemann. In particolare, ci interessa quando possiamo ridurre il calcolo di un integrale multiplo di Lebesgue al calcolo di integrali iterati, ovvero le cosiddette *formule di riduzione*. In Analisi 2 abbiamo visto che: *se $f \in C^0(I)$ con $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ allora*

$$\int_I f(x, y)\, dxdx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Vogliamo generalizzare questo risultato ad una funzione $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ non negativa/sommabile su un insieme misurabile E in $\mathbb{R}^n$. Procediamo in tre passi:

1. f non negativa su $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$;
2. f non negativa su $E \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ misurabile;
3. f sommabile su $E \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ misurabile.

1.6.1 I teoremi di Tonelli e Fubini

Notazione: Rispetto alle coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, usiamo le notazioni

$$dx = dm_p(x), \quad dy = dm_q(y), \quad \text{e} \quad dxdy = dm_{p+q}(x, y)$$

negli integrali di funzioni rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente.

Teorema 1.6.1. *(di Tonelli in $\mathbb{R}^n$) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e <u>non negativa</u> (e quindi integrabile). Allora:*

i) per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$, la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^q$ (e quindi integrabile);

ii) la funzione definita q.o. in $\mathbb{R}^p$ da

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

è misurabile, non negativa su $\mathbb{R}^p$ (e quindi integrabile);

iii) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Osservazione 1.6.1. Ovviamente, possiamo scambiare i ruoli di $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$ e quindi *scambiare l'ordine di integrazione*; cioè

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Inoltre, se $n \geq 3$ possiamo ulteriormente spezzare gli integrali arrivando a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\,dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n,$$

e tutte le sue varianti usando un qualsiasi ordine di integrazione. Se uno di questi integrali è infinito allora lo sono tutti.

Dimostrazione. (del Teorema 1.6.1) Posto

$$\mathcal{T} = \{ f \in \text{Mis}(\mathbb{R}^n, [0,+\infty]) : \ f \text{ soddisfa i), ii), iii) } \} \subset \text{Mis}(\mathbb{R}^n, [0,+\infty]),$$

si mostra che $\mathcal{T} = \text{Mis}(\mathbb{R}^n, [0,+\infty])$. Questa dimostrazione si articola in quattro passi.
Passo 1: *Combinazioni lineari finite (con coefficienti non negativi) di elementi in $\mathcal{T}$ appartengono a $\mathcal{T}$; cioè*

$$f, g \in \mathcal{T}, \ \alpha, \beta \geq 0 \ \Rightarrow \ \alpha f + \beta g \in \mathcal{T},$$

Infatti, le funzioni misurabili formano uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare su questo spazio.
Passo 2: *$\mathcal{T}$ è chiuso rispetto alla convergenza monotona; cioè se $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ e $f_k \nearrow f$, allora $f \in \mathcal{T}$*. Infatti

- f è ben definita, non negativa e misurabile.
- L'insieme $A_k := \{x \in \mathbb{R}^p : \ y \mapsto f_k(x,y) \text{ non è misurabile}\}$ ha $m_p(A_k) = 0$. L'unione $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ allora ha misura nulla e la funzione $y \mapsto f(x,y) := \lim_{k\to+\infty} f_k(x,y)$ è misurabile per ogni $x \notin A$, quindi per $f(x,y)$ vale la proprietà i).

- Dal MCT abbiamo anche la proprietà ii) perché

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A : \ \ G(x) := \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} f_k(x,y)\,dy := \lim_{k\to+\infty} G_k(x).$$

  Essendo G_k (definita q.o.) misurabile per ogni k, abbiamo G definita q.o., misurabile, non negativa su $\mathbb{R}^p$.

- Dato che $f_k \nearrow f$ abbiamo anche $G_k \nearrow G$, e, quindi di nuovo per il MCT:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) &= \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} G_k(x)\,dx \qquad \text{(MCT)} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_k(x,y)\,dy \right) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x,y)\,dxdy \qquad (f_k \in \mathcal{T}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy \qquad (\text{MCT}: \ f_k \nearrow f)
\end{aligned}$$

Passo 3: *$\mathcal{T}$ contiene tutte le funzioni $s : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ semplici, misurabili.* Usando Passo 1, basta mostrare che per ogni A misurabile, $f = \chi_A \in \mathcal{T}$. Se A è un intervallo, allora la dimostrazione non è difficile. Poi si usano i teoremi di struttura per insiemi misurabili, la proprietà che $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è un σ-algebra e la chiusura di $\mathcal{T}$ rispetto alla convergenza dominata (in analogia con Passo 2). I dettagli sono in [4] - Teorema 5.5.1.
Passo 4: *$\mathcal{T}$ contiene tutti le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ misurabili.* Usando approssimazione monotona di f con funzioni semplici $0 \le s_k \nearrow f$, abbiamo $f \in \mathcal{T}$ per i Passi 2 e 3. □

Vogliamo ora trattare domini generali $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. L'idea di base è quella di ricondursi al caso di $\mathbb{R}^n$ attraverso l'uguaglianza

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x,y)\,dxdy,$$

dove $\bar{f}$ è il prolungamento di f con $\bar{f}$ nulla su E^c. Per arrivare ad una forma precisa della riduzione, abbiamo bisogno di qualche notazione e qualche proprietà delle "fette" di E ottenute fissando $x \in \mathbb{R}^p$ o $y \in \mathbb{R}^q$.

Definizione 1.6.1. Sia $E \in \mathcal{M}(R^n)$ con $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ con coordinate globali (x,y). Per ogni $x \in \mathbb{R}^p$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^q$, le <u>sezioni in x e y</u> sono

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^q : \ (x,y) \in E\} \ \ \text{e} \ \ E^*_y = \{x \in \mathbb{R}^p : \ (x,y) \in E\}$$

e le <u>proiezioni effettive su $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$</u> sono

$$P_E = \{x \in \mathbb{R}^p : \ m^*_q(E_x) > 0\} \ \ \text{e} \ \ P^*_E = \{y \in \mathbb{R}^q : \ m^*_p(E^*_y) > 0\}.$$

Lemma 1.6.1. *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

a) Per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$, $E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$;

b) $P_E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$.

Dimostrazione. (Applicare Tonelli in $\mathbb{R}^n$ alla funzione $\chi_E \geq 0$ e misurabile)

a) La funzione $y \mapsto \chi_E(x,y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^q$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$, ma essa è definita da

$$h_x(y) := \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in E \quad (y \in E_x) \\ 0 & (x,y) \notin E \quad (y \notin E_x) \end{cases} = \chi_{E_x}(y).$$

Quindi $E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$

b) Definiamo $\varphi_E : \mathbb{R}^p \to [0,+\infty]$ da

$$\varphi_E(x) := \begin{cases} 0 & E_x \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^q) \\ \int_{\mathbb{R}^q} \chi_E(x,y)\,dy = m_q(E_x) & E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q), \end{cases}$$

- φ_E è misurabile su $\mathbb{R}^p$ per la proprietà ii) del Teorema di Tonelli in $\mathbb{R}^n$.
- Ma $\varphi_E^*(x) := m_q^*(E_x) = m_q(E_x) = \varphi_E(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$. Quindi φ_E^* è misurabile e
$$P_E = \left(\varphi_E^*\right)^{-1}(0,+\infty) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p).$$

□

Teorema 1.6.2. *(di Tonelli) Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e non negativa (e quindi integrabile). Allora:*

i) per q.o. $x \in P_E \subset \mathbb{R}^p$, la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è misurabile su $E_x \subset \mathbb{R}^q$ (e quindi integrabile);

ii) la funzione definita q.o. su $P_E \subset \mathbb{R}^p$ da

$$x \mapsto \int_{E_x} f(x,y)\,dy$$

è misurabile, non negativa su P_E (e quindi integrabile);

iii) si ha

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{P_E} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

In modo analogo, si ha anche

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{P_E^*} \left(\int_{E_y^*} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Dimostrazione. Il prolungamento $\bar{f}$ di f definito da

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$

è misurabile e non negativa e soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x,y)\,dxdy = \int_E f(x,y)\,dxdy. \tag{1.6.1}$$

i) Per il Teorema 1.6.1 abbiamo che per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$, la funzione $y \mapsto \bar{f}(x,y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^q$. Quindi anche la funzione $y \mapsto \chi_{E_x}\bar{f}(x,y) = f(x,y)$ è non negativa e misurabile per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$ poiché $E_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^p$ (usando il Lemma 1.6.1 a)).

ii) Ancora per il Teorema 1.6.1 la funzione definita q.o. su $\mathbb{R}^p$ da

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} \bar{f}(x,y)\,dy = \int_{E_x} f(x,y)\,dxdy$$

è misurabile e non negativa su $\mathbb{R}^p$ e quindi anche su $P_E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$ (per il Lemma 1.6.1 b)).

iii) Ancora per il Teorema 1.6.1 abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x,y)\,dxdy &= \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} \bar{f}(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{P_E}\left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy\right)dx,\end{aligned}$$

poiché $m_q^*(E_x) = 0$ se $x \notin P_E$.

□

L'ipotesi di non negatività può essere sostituita con quella di sommabilità.

Teorema 1.6.3. *(di Fubini) Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Allora:*

i) per q.o. $x \in P_E \subset \mathbb{R}^p$, la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è sommabile su $E_x \subset \mathbb{R}^q$;

ii) la funzione definita q.o. su $P_E \subset \mathbb{R}^p$ da

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

è sommabile su P_E;

iii) si ha

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{P_E}\left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

In modo analogo, si ha anche

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{P_E^*}\left(\int_{E_y^*} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Dimostrazione. Spezziamo come sempre $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$ dove f^+, f^- e $|f|$ sono non negative e misurabili. Applicando il Teorema 1.6.2 a $|f|$ abbiamo

$$\int_{P_E}\left(\int_{E_x} |f(x,y)|\,dy\right)dx = \int_E |f(x,y)|\,dxdy < +\infty; \tag{1.6.2}$$

$$y \mapsto |f(x,y)| \text{ è } \underline{\text{misurabile}} \text{ su } E_x \subseteq \mathbb{R}^q \text{ per q.o. } x \in P_E \subseteq \mathbb{R}^p; \tag{1.6.3}$$

$$x \mapsto \int_{E_x} |f(x,y)|\,dy \text{ è } \underline{\text{misurabile}} \text{ su } P_E \subseteq \mathbb{R}^p \text{ per q.o. } x \in P_E. \tag{1.6.4}$$

Applicando il Teorema 1.6.2 a $f^\pm$, abbiamo (1.6.3) e (1.6.4) con $f^\pm$ al posto di f, e quindi anche per f. Combinando (1.6.2) con (1.6.4) abbiamo

$$x \mapsto \int_{E_x} |f(x,y)|\,dy \text{ è } \underline{\text{sommabile}} \text{ su } P_E \subseteq \mathbb{R}^p \text{ per q.o. } x \in P_E.$$

e quindi abbiamo l'affermazione ii). Segue che

$$\int_{E_x} |f(x,y)|\,dy < +\infty \quad \text{per q.o. } x \in P_E,$$

e quindi abbiamo l'affermazione i). Usando (1.6.2) con $f^\pm$ al posto di $|f|$, abbiamo (1.6.2) per f; cioè l'affermazione iii). □

1.6.2 Applicazioni ed esempi

Osservazione 1.6.2. L'ipotesi di non negatività o sommabilità è essenziale per lo scambio di ordine di integrazione.

Esempio 1.6.1. La funzione $f : E = (0,1] \times (0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} -1/y^2 & y \geq x \\ 1/x^2 & y < x \end{cases}$$

è misurabile su E con segno non costante. Calcolando gli integrali iterati si trova

$$\int_{(0,1]}\left(\int_{(0,1]} f(x,y)\,dy\right)dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_{(0,1]}\left(\int_{(0,1]} f(x,y)\,dx\right)dy = -1$$

Inoltre, con $A = E \cap \{y \geq x\}$ si trova

$$\int_E |f|\,dxdy \geq \int_A |f|\,dxdy = \int_{(0,1]}\left(\int_{(0,y]} |f(x,y)|\,dx\right)dy = +\infty,$$

ovvero f non sommabile su E.

Osservazione 1.6.3. Può capitare che gli integrali iterati siano uguali <u>senza</u> l'ipotesi di non negatività o sommabilità di f.

Esempio 1.6.2. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in (k,k+1) \times (k,k+1),\ k \in \mathbb{Z} \\ -1 & (x,y) \in (k,k+1) \times (-(k+1),-k),\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è misurabile (limite puntuale per $N \to +\infty$ di una successione di funzioni misurabili $s_N = \chi_{[-N,N]\times[-N,N]} f$) e cambia segno. Per la simmetria di f (è dispari in x ed in y), si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right) dx = 0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \right) dy$$

ma

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dxdy \geq \int_{[-N,N]\times[-N,N]} |f|\, dxdy = 4N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Quindi f non è sommabile su $\mathbb{R}^2$.

Domande: Data $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile, come si stabilisce se f è sommabile? Nel caso di sommabilità, come si calcola l'integrale?
Risposte: Si usano Tonelli su $|f|$ per controllare la sommabilità e poi Fubini su f per calcolare l'integrale. Più precisamente:

1. Applicando Tonelli:

$$\begin{array}{lll} \int_{P_E} \left(\int_{E_x} |f|\, dy \right) dx < +\infty & \Longrightarrow & \int_E |f|\, dxdy < +\infty \\ \left(\text{oppure } \int_{P_E^*} \left(\int_{E_y^*} |f|\, dx \right) dy < +\infty \right) & & \\ & \Longleftrightarrow & f \text{ sommabile;} \end{array}$$

   cioè, mostrando che **uno** degli integrali iterati di $|f|$ è finito, abbiamo f sommabile.

2. Applicando Fubini:

$$\int_E f\, dxdy = \int_{P_E} \left(\int_{E_x} f\, dy \right) dx = \int_{P_E^*} \left(\int_{E_y^*} f\, dx \right) dy;$$

   cioè, sapendo che f è sommabile, possiamo calcolare il suo integrale tramite **qualsiasi** degli integrali iterati di f.

Esempio 1.6.3. Stabilire se la funzione definita f definita da $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ è sommabile su $E = \overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. In caso affermativo, calcolare l'integrale $\int_E f(x,y)\, dxdy$.

- E è compatto $\Rightarrow$ E misurabile;

- $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è definita q.o. in E ed è continua su $E \setminus \{0\}$. Quindi f definisce una funzione misurabile su E (prendendo qualsiasi prolungamento a tutto E).

- Per Tonelli abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_E |f|\,dxdy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{E_x} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}|x|\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{|y|}{x^2+y^2}\,dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2|x|\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1} -|x|\log(x^2)dx \\
&= -4\int_0^1 x\log(x)dx = 4\frac{1}{4}\,x^2\Big|_0^1 = 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

  Quindi f è sommabile su E.

- Per Fubini e la simmetria (f è dispari in x, y e E è simmetrico rispetto x, y) abbiamo $\int_E f\,dxdy = 0$.

Osservazione 1.6.4. I teoremi di Fubini e Tonelli sono utili anche per generare delle *formule di riduzione* rispetto alla dimensione n per quantità definite tramite integrali.

Esempio 1.6.4. (Misura della bolla unitaria in $\mathbb{R}^n$) Per ogni $n \in N$, esiste una costante $\omega_n = m_n(B_1(0))$ tale che per ogni $r > 0$

$$m_n(B_r(0)) = \omega_n r^n.$$

- $E(n) = B_r(0)$ è aperto e limitato in $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $E(n)$ è misurabile con misura finita per ogni $r > 0$;

- Per induzione in n, applicando Tonelli alla funzione $f = \chi_{E(n+1)}(x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
m_{n+1}(B_r(0)) &= \int_{-r}^{r}\left(\int_{E(n+1)_y} dx_1\cdots dx_n\right)dy \\
&= \int_{-r}^{r} m_n\left(B_{\sqrt{r^2-y^2}}(0)\right)dy \\
&= \int_{-r}^{r} \omega_n (r^2-y^2)^{n/2}\,dy \quad \text{(per induzione)} \\
&= 2\omega_n \int_0^r (r^2-y^2)^{n/2}\,dy.
\end{aligned}$$

  Poi usando la sostituzione $y = r\sin\theta$ per $\theta \in [0, \pi/2]$ otteniamo

$$\begin{aligned}
m_{n+1}(B_r(0)) &= 2\omega_n r^{n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}\theta\,d\theta \\
&= \omega_n r^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}\theta\,d\theta.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ω_n definita per induzione

$$\omega_{n+1} = \omega_n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}\theta\, d\theta.$$

Osservazione 1.6.5. Posto $\mathcal{I}_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta\, d\theta$ abbiamo $\omega_n = I_1 \cdots I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Quindi, possiamo determinare i valori di ω_n:

- Conti elementari mostrano $I_1 = 2$ e $I_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Quindi

  $$\omega_1 = 2,\ \omega_2 = \pi \quad \Rightarrow \quad m_1(B_r(0)) = 2r,\ m_2(B_r) = \pi r^2.$$

  Per $n \geq 2$, calcolando $\mathcal{I}_n$ tramite integrazione per parti otteniamo una formula di riduzione

  $$\mathcal{I}_n = (n-1)\mathcal{I}_{n-2} - (n-1)\mathcal{I}_n.$$

  Per induzione si mostra che

  $$\omega_n = \frac{2^{[(n+1)/2]}\pi^{[n/2]}}{n!\,!}, \quad n \geq 2$$

  dove

  $$n!\,! := 2 \cdot 4 \cdots n \ \text{ per } n \text{ pari} \quad \text{e} \quad n!\,! := 1 \cdot 3 \cdots n \ \text{ per } n \text{ dispari}$$

  e $[x]$ è la parte intera di x reale. Quindi

  $$m_n(B_r(0)) = \frac{2^{[(n+1)/2]}\pi^{[n/2]}}{n!\,!} r^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Consultare Osservazione 5.5.8 di [4] per ulteriori dettagli.

Osservazione 1.6.6. Un'altra formula per ω_n coinvolge la *funzione gamma di Eulero*, ovvero

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt, \quad \alpha \in (0, +\infty) \ \text{reale.} \tag{1.6.5}$$

Si trova

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Consultare Osservazione 5.5.9 di [4] per i dettagli.

1.7 Cambiamento di variabili

In questo paragrafo, continuiamo il discorso sul calcolo di integrali di Lebesgue affrontando la questione di effettuare opportuni *cambiamenti di variabili*. Nell'ambito dell'integrale di Riemann con la misura di Peano-Jordan, in Analisi 2 è stato presentato il seguente risultato: *Siano f limitata su $I \subset \mathbb{R}^2$ e f continua su I° e Φ una trasformazione lineare ed invertibile con matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che rappresenta $(x_1, x_2) = \Phi(y_1, y_2)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$; cioè*

$$\Phi(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\int_I f(x_1, x_2)\, dxdx = \int_{\Phi^{-1}(I)} f(\Phi(y_1, y_2)|\det(A)|\, dy_1 dy_2$$

Vogliamo generalizzare questo risultato a funzioni $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabile su $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e a trasformazioni Φ che sono diffeomorfismi di classe C^1 con immagine un aperto che contiene E. Anche qui, un ruolo fondamentale è giocato dalle trasformazioni lineari ed invertibili su $\mathbb{R}^n$. Prima di tutto, ricordiamo qualche fatto sul calcolo differenziale in più variabili.

Definizione 1.7.1. Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti e $k \in \mathbb{N}$. Una funzione $\Phi : U \to V$ si chiama diffeomorfismo di classe C^k su U se

i) Φ è biettiva (e quindi invertibile);

ii) $\Phi \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, $\Phi^{-1} \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ (derivate parziali continue fino all'ordine k).

Ricordiamo che:

1. Anche Φ^{-1} è un diffeomorfismo di classe C^k;

2. In particolare Φ e Φ^{-1} sono diffeomorfismi locali per cui

$$\det \mathcal{J}_\Phi \neq 0 \ \text{ su } U \quad \text{e} \quad \det \mathcal{J}_{\Phi^{-1}} \neq 0 \ \text{ su } V,$$

dove $\mathcal{J}_\Phi$ è la matrice jacobiana di Φ; cioè

$$\mathcal{J}_\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\Phi_1 \\ \vdots \\ D\Phi_n \end{bmatrix}$$

con $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ e D è l'operatore del gradiente.

3. Ogni $\Phi \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ è differenziabile in U e quindi abbiamo la formula di Taylor: per ogni $x_0 \in U$

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \mathcal{J}_\Phi(x_0)(x - x_0) + \rho(x) \tag{1.7.1}$$

dove il resto di Peano $\rho : U \to \mathbb{R}^n$ soddisfa $\rho = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|\rho(x)|}{|x - x_0|} = 0. \tag{1.7.2}$$

Ricordiamo che questo vuole dire che possiamo approssimare bene Φ in un intorno di x_0 con la mappa lineare T avendo matrice $[T] = \mathcal{J}_\Phi(x_0)$. Vedremo che questa considerazione è cruciale nella dimostrazione.

1.7.1 Le formule principali

Teorema 1.7.1. *(Cambiamento di misura per diffeomorfismi) Sia $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo di classe C^1 fra aperti in $\mathbb{R}^n$. Allora*

a) $E \subseteq V$ è misurabile $\iff$ $E^* = \Phi^{-1}(E) \subset U$ è misurabile;

b) Per ogni insieme $E \subseteq V$ misurabile si ha

$$m(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left|\det \mathcal{J}_\Phi(y)\right| \, dy \tag{CdM}$$

N.B. Possiamo anche leggere il risultato nel modo seguente: $A \subset U$ misurabile implica $E = \Phi(A)$ misurabile e

$$m(\Phi(A)) = \int_A \left|\det \mathcal{J}_\Phi(y)\right| \, dy.$$

Quindi se $|\det \mathcal{J}_\Phi| \equiv 1$ su U, il diffeomorfismo Φ conserva la misura di tutti gli insiemi $A \in \mathcal{M}(U)$.

Teorema 1.7.2. *Siano $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo di classe C^1 fra aperti di $\mathbb{R}^n$, $E \subset V$ con $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

a) $f \in \mathrm{Mis}(E, \overline{\mathbb{R}})$ $\iff$ $(f \circ \Phi)\, |\det \mathcal{J}_\Phi| \in \mathrm{mis}(E^*, \overline{\mathbb{R}})$ dove $E^* = \Phi^{-1}(E)$;

b) f è integrabile su E $\iff$ $(f \circ \Phi)\, |\det \mathcal{J}_\Phi|$ è integrabile su E^* e in tal caso

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(y)) \left|\det \mathcal{J}_\Phi(y)\right| \, dy. \tag{CdV}$$

Prima delle dimostrazioni, facciamo qualche osservazione e consideriamo qualche esempio elementare.

Osservazione 1.7.1. Per quanto riguarda l'importanza dei Teoremi 1.7.1 e 1.7.2 e la strategia delle dimostrazioni:

a) Entrambi i risultati sono espressi in termine del cosiddetto *pull-back* tramite Φ; cioè si trasforma un integrale rispetto alla variabile x "all'indietro" tramite la trasfomazione Φ usando la sostituzione $x = \Phi(y)$. Questa strategia è importante perché permette di sfruttare simmetrie nella funzione integranda e/o nel dominio di integrazione (scegliendo una trasformazione Φ opportuna). Inoltre, vedremo che sta alla base di esprimere l'integrale su insiemi "non piatti" attraverso un '"appiattimento" opportuno Φ.

b) Nel caso $f = \chi_E$ con E misurabile, la formula (CdV) si riduce a (CdM). Il legame è ancora più forte. Dato che possiamo approssimare funzioni misurabili con funzioni semplici e misurabili, sapendo la formula (CdM) e usando la linearià dell'integrale, si trova (CdV). Più precisamente, per mostrare la formula (CdV), possiamo ridurci al caso di $f \geq 0$ e misurabile. Poi, usando l'approssimazione monotona tramite funzioni semplici $0 \leq s_k \nearrow f$ ed il Teorema di Beppo-Levi (MCT), si riduce la dimostrazione di (CdV) alle funzioni semplici e non negative. Per la linearità dell'integrale abbiamo quindi bisogno solo di (CdM).

c) Per mostrare (CdM) invece, usando i teoremi di struttura basta verificare (CdM) per intervalli, anzi per *cubi* Q (intervalli con tutti i lati uguali). Infine, si mostra (CdM) per cubi Q approssimando il diffeomorfismo con mappe lineari (mappa derivata). Si mostra (CdM) direttamente per mappe lineari su cubi e poi si passa al limite.

Esempio 1.7.1. (Mappe lineari ed invertibili) Sia $\Phi = T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare e invertibile con matrice $[T]$ (rispetto alla base canonica di R^n). In questo caso, T è un diffeomorfismo di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^n$ con abbiamo $\mathcal{J}_T = [T]$ è una matrice costante. Quindi la formula (CdM) diventa: per ogni $E \in \mathcal{M}(R^n)$

$$m(E) = \int_{T^{-1}(E)} |\det [T]| \, dy = |\det [T]| \, m(T^{-1}(E)). \tag{1.7.3}$$

Con T^{-1} al posto di T in (1.7.3) troviamo

$$m(E) = \left|\det [T]^{-1}\right| m(T(E)),$$

ma $\det [T]^{-1} = 1/\det [T]$ e quindi

$$m(T(E)) = |\det [T]| \, m(E). \tag{1.7.4}$$

Questa formula importante dice che il fattore $\det [T]$ dà il cambiamento di misura per una mappa lineare.

Esempi importanti (anche per la dimostrazione dei teoremi princpali) sono i seguenti.

Esempio 1.7.2. (Traslazioni) Sia $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^N$. È detta *traslazione da* p l'applicazione $\tau_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$x = \tau_p(y) = y + p. \tag{1.7.5}$$

Osserviamo che si tratta di una mappa invertibile con inversa $\tau_p^{-1} = \tau_{-p}$. Infatti risolvendo rispetto ad y in (1.7.5) abbiamo

$$y = x - p = \tau_{-p}(x).$$

Inoltre, abbiamo $\mathcal{J}_{\tau_p} = I$ e quindi la formula (CdM) del Teorema 1.7.1 diventa

$$m(E) = \int_{\tau_{-p}(E)} dy = m(\tau_{-p}(E));$$

cioè la misura di Lebesgue è *invariante per traslazioni*.

Esempio 1.7.3. (Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$) Sia $\Phi : U = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$(x, y) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta). \tag{1.7.6}$$

La mappa Φ è un diffeomorfismo di classe C^∞ con

$$\Phi(U) = V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, y = 0\} \tag{1.7.7}$$

e

$$\mathcal{J}_\Phi(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

e $\det \mathcal{J}_\Phi(\rho, \theta) = \rho > 0$. Quindi la formula (CdV) del Teorema 1.7.2 diventa

$$\int_E f(x, y)\, dxdy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho d\theta,$$

per ogni insieme misurabile $E \subset V$ e per ogni f integrabile su E.

Osservazione 1.7.2. Notiamo che negli enunciati di Teorema 1.7.1 e 1.7.2 la mappa $\Phi : U \to V$ è iniettiva e quindi gli insiemi misurabili E devono essere contenuti in V. Spesso questo esclude a priori dei casi importanti. Ad esempio, nel Esempio 1.7.3 domini semplici e naturali come la bolla $B_r(0)$ **non** è contenuto in V definito da (1.7.7). Però la parte di $B_r(0)$ che sta fuori di V ha misura nulla. Quindi, si può applicare il teorema ad $\tilde{B}_r(0) = B_r(0) \setminus \{(x, y) \in B_r(0) : x \le 0, y = 0\}$ per trovare

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} f(x, y)\, dxdy &= \int_{\tilde{B}_r(0)} f(x, y)\, dxdy \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\tilde{B}_r(0))} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho d\theta, \end{aligned}$$

dove $\Phi^{-1}(\tilde{B}_r(0)) = (0, r) \times (-\pi, \pi)$.

1.7.2 Dimostrazioni

Dimostrazione. (dei Teoremi 1.7.1 e 1.7.2) Procediamo in tre passi.

Passo 1: *$A \subseteq U$ misurabile $\Rightarrow$ $\Phi(A) \subseteq V$ misurabile.*
N.B. Dato che Φ^{-1} è anche un diffeomorfismo, abbiamo anche $E \subseteq V$ misurabile $\Rightarrow$ $\Phi^{-1}(E) \subseteq U$ misurabile, ovvero la parte a) del Teorema 1.7.1.

Lemma 1.7.1. *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $m^*(A) = m^*_Q(A)$ dove*

$$m^*_Q(A) := \inf\left\{\sum_{k\in\mathcal{K}} m(Q_k) :\ A \subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{K}} Q_k,\ Q_k \ \text{cubo compatto in } \mathbb{R}^n, \mathcal{K} \subset \mathbb{N}\right\} \tag{1.7.8}$$

e $m(Q_k) = m^*(Q_k)$ dato che ogni compatto è misurabile.

Dimostrazione. Iniziamo notando che $m^*(A) \leq m^*_Q(A)$ poich'e ci sono meno cubi compatti che intervalli compatti e quindi l'estremo inferiore che definisce m^*_Q sarà più grande di quello che definisce m^*.
Per mostrare che $m^*_Q(A) \leq m^*(A)$, possiamo assumere che $m^*(A) < +\infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste Ω aperto t.c.

$$A \subset \Omega \quad \text{e} \quad m^*(A) + \varepsilon > m^*(\Omega) = m(\Omega). \tag{1.7.9}$$

Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un rdL $\{I_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di A t.c.

$$+\infty > m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k\in\mathcal{K}} v(I_k). \tag{1.7.10}$$

Per ogni $k \in \mathcal{K}$ scegliamo un intevallo compatto J_k t.c. $I_k \subset J_k^\circ$ e $v(J_k) = v(I_k) + \varepsilon 2^{-(k+1)}$ (come nella costruzione (1.1.2) dell'Esempio 1.1.1). L'insieme $\Omega := \bigcup_{k\in\mathcal{K}} J_k^\circ$ è aperto e contiene A.
Abbiamo

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} m^*(J_k^\circ) = \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(v(I_k) + \varepsilon 2^{-(k+1)}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\in\mathcal{K}} v(I_k) < +\infty. \tag{1.7.11}$$

Combinando (1.7.10) e (1.7.11) ottenaimo

$$m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k\in\mathcal{K}} v(I_k) - \sum_{k\in\mathcal{K}} v(I_k) + \sum_{k\in\mathcal{K}} m^*(J_k^\circ) \geq m^*(\Omega) = m(\Omega).$$

Ora scriviamo $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ con $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cubi compatti t.c. $Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = \emptyset$ se $j \neq k$. Abbiamo

$$m(Q_j \cap Q_k) = 0 \quad \text{se} \quad j \neq k,$$

poiché $Q_j \cap Q_k$ è un sottoinsieme di un intervallo con lato nullo. Per l'additività della misura abbiamo

$$m(\Omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(Q_k).$$

Quindi da (1.7.9) abbiamo

$$m^*(A) + \varepsilon > \sum_{k=1}^{+\infty} m(Q_k) \geq m^*_Q(A), \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

□

Lemma 1.7.2. *Se $A \subseteq Q \subset U$ allora*

$$m^*(\Phi(A)) \leq \frac{\omega_n}{\gamma_n} \left(\sup_Q \|\mathcal{J}_\Phi\| \right)^n m^*(A), \tag{1.7.12}$$

dove $\omega_n = m_n(B_1(0))$ e $\gamma_n = (1/\sqrt{n})^n$ è il fattore per cui $Q_r(\alpha) = \prod_{i=1}^n [\alpha_i - r, \alpha_i + r]$ soddisfa

$$m(Q_r(\alpha)) = (2r)^n = \gamma_n \left[\mathrm{diam}(Q_r(\alpha))\right]^n. \tag{1.7.13}$$

Dimostrazione. Sia $\{Q_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ un rdL di A usando cubi compatti. Poichè $A \subseteq Q$ abbiamo

$$A \subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{K}} (Q_k \cap Q) \quad \text{e} \quad \Phi(A) \subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{K}} \Phi(Q_k \cap Q).$$

Per la subadditività di m^* abbiamo

$$m^*(\Phi(A)) \leq \sum_{k\in\mathcal{K}} m^*\left(\Phi(Q_k \cap Q)\right). \tag{1.7.14}$$

Poichè $Q_k \cap Q$ è convesso, possiamo applicare il teorema dell'incremento finito [21]; cioè per ogni $y, y' \in Q_k \cap Q$ esiste $z \in [y, y']$ t.c.

$$\left|\Phi(y) - \Phi(y')\right| \leq \|\mathcal{J}_\Phi(z)\|\, |y - y'| \leq \sup_Q \|\mathcal{J}_\Phi\|\, \mathrm{diam}(Q_k)$$

e quindi

$$\mathrm{diam}\left(\Phi(Q_k \cap Q)\right) \leq \sup_Q \|\mathcal{J}_\Phi\|\, \mathrm{diam}(Q_k). \tag{1.7.15}$$

Poichè $\Phi(Q_k \cap Q) \subset B_R(\alpha)$ con $R = \mathrm{diam}\left(\Phi(Q_k \cap Q)\right)$ e $\alpha \in Q_k \cap Q$, si ha

$$m^*\left(\Phi(Q_k \cap Q)\right) \leq m^*(B_R(\alpha)) = \omega_n R^n. \tag{1.7.16}$$

[21]Ricordiamo che questo risultato di Analisi 2 è una generalizzazione del Teorema di Lagrange per funzioni in più varibaili.

Mettendo insieme tutto, troviamo

$$\begin{aligned} m^*(\Phi(A)) &\le \textstyle\sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_n R^n \quad \text{(usando (1.7.14) e (1.7.16))} \\ &\le \textstyle\sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_n \left[\sup_Q \|\mathcal{J}_\Phi\| \operatorname{diam}(Q_k)\right]^n \quad \text{(usando (1.7.15))} \\ &= \tfrac{\omega_n}{\gamma_n} \left(\sup_Q \|\mathcal{J}_\Phi\|\right)^n \textstyle\sum_{k\in\mathcal{K}} m(Q_k) \quad \text{(usando (1.7.13)).} \end{aligned}$$

Calcolando l'inf sulle possibili scelte di $\{Q_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ otteniamo

$$m^*(\Phi(A)) \le \frac{\omega_n}{\gamma_n} \left(\sup_Q \|\mathcal{J}_\Phi\|\right)^n m_Q^*(A),$$

ma $m_Q^*(A) = m^*(A)$ per il Lemma 1.7.1. □

Proposizione 1.7.1. *Sia $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo di classe C^1 fra aperti di $\mathbb{R}^n$.*

a) $Z \subset U$ con $m^*(Z) = 0 \;\Rightarrow\; m^*(\Phi(Z)) = 0$.

b) $A \subseteq U$ misurabile $\;\Rightarrow\; \Phi(A) \subset V$ misurabile.

Dimostrazione. Per l'affermazione a), facciamo la decomposizione $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ con $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di cubi compatti con interni disgiunti. Per la monotonia di m^* e per il Lemma 1.7.2 abbiamo

$$m^*(Z \cap Q_k) \le m^*(Z) = 0 \;\Rightarrow\; m^*\left(\Phi(Z \cap Q_k)\right) = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Per la subadditività abbiamo

$$m^*(\Phi(Z)) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*\left(\Phi(Z \cap Q_k)\right) = 0.$$

Per l'affermazione b), ci sono due casi.
Caso 1 (A di tipo G_δ): Se $A = \bigcap_{k\in\mathcal{K}} U_k$ con $U_k \subseteq U$ aperto, allora

$$\Phi(A) = \textstyle\bigcap_{k\in\mathcal{K}} \Phi(U_k) \text{ è di tipo } G_\delta \text{ e quindi misurabile,}$$

poichè Φ è un diffeomorfismo.
Caso 2 (A misurabile): Usando il Teorema 1.1.5 (di struttura), si ha $A = G \setminus Z$ con G di tipo G_δ e $m^*(Z) = 0$. Quindi $\Phi(A) = \Phi(G) \setminus \Phi(Z)$ dove $\Phi(G)$ è misurabile per il Caso 1 e $\Phi(Z)$ ha misura nulla per la parte a). □

Questo finisce Passo 1.

Passo 2: *$E \subseteq V$ misurabile e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile $\;\Leftrightarrow\;$ $(f \circ \Phi)\ |\det \mathcal{J}_\Phi|$ misurabile su $\Phi^{-1}(E)$.*

Dimostrazione. Basta mostrare che f misurabile implica $f \circ \Phi$ misurabile perché le funzioni $\det \mathcal{J}_\Phi$ e $\det \mathcal{J}_{\Phi^{-1}}$ sono continue, misurabili e non nulle. Inoltre, $f = (f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ quindi l'implicazione ($\Leftarrow$) segue dalla implicazione ($\Rightarrow$). Per concludere, basta notare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\{x \in E : f(x) > a\} \text{ misurabile} \Rightarrow \Phi^{-1}\left(\{x \in E : f(x) > a\}\right) \text{ misurabile}$$

per la Proposizione 1.7.1. Ma

$$\Phi^{-1}\left(\{x \in E : f(x) > a\}\right) = \left\{y \in \Phi^{-1}(E) : (f \circ \Phi)(y) > a\right\}$$

e quindi $f \circ \Phi$ è misurabile. □

Questo finisce Passo 2.

Passo 3: *(CdM) $E \subseteq V$ misurabile $\Rightarrow$ $m(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left|\det \mathcal{J}_\Phi(y)\right| dy$.*

Lemma 1.7.3. *Se vale (CdM) per ogni cubo $Q \subseteq V$, cioè se vale*

$$\text{(CdMQ)} \qquad m(Q) = \int_{\Phi^{-1}(Q)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy$$

per ogni $Q \subseteq V$ allora vale (CdM) per ogni $E \subset V$ misurabile.

Dimostrazione. L'idea è di sfruttare i teoremi di struttura per insiemi misurabili.

1. E aperto: Possiamo scrivere $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ dove gli insiemi Q_k sono cubi compatti con interni disgiunti. Usando l'additività della misura e l'ipotesi (CdMQ) abbiamo

$$m(E) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(Q_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Phi^{-1}(Q_k)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy, \tag{1.7.17}$$

dove l'ultima uguaglianza è la linearità dell'integrale.

2. E di tipo G_δ e limitato: Possiamo scrivere $E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$ dove gli insiemi U_k sono aperti e limitati. Per il Corollario 1.1.1 b) abbiamo

$$m(E) = \lim_{k \to +\infty} m(E_k) \quad \text{dove} \quad E_k := \bigcap_{j=1}^{k} U_j \searrow E \quad \text{e} \quad m(E_1) < +\infty.$$

Applicando (1.7.17) con E_k aperto abbiamo (e usando il Corollario 1.4.3 b))

$$m(E) = \lim_{k \to +\infty} \int_{\Phi^{-1}(E_k)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy \tag{1.7.18}$$

poich'e $\Phi^{-1}(E_k) \searrow \Phi^{-1}(E)$ e $\int_{\Phi^{-1}(E_1)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy = m(E_1) < +\infty$.

3. <u>E misurabile e limitato</u>: Possiamo scrivere $E = G \setminus Z$ con G di tipo G_δ e limitato e $m^*(Z) = 0$. Usando (1.7.18) con G al posto di E e $m^*(Z) = 0 = m^*(\Phi^{-1}(Z)) = 0$ abbiamo
(1.7.19)
$$m(E) = m(G) = \int_{\Phi^{-1}(G)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy = \int_{\Phi^{-1}(G\setminus Z)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy.$$

4. <u>E misurabile</u>: Con $E_k := E \cap B_k(0)$ misurabile e limitato si ha $E_k \nearrow E$ e possiamo usare (1.7.19) con E_k al posto di E ed il Corollario 1.4.3 a) per ottenere
$$m(E) = \lim_{k\to+\infty} m(E_k) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Phi^{-1}(E_k)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \mathcal{J}_\Phi|\, dy.$$

□

Lemma 1.7.4. *Siano $Q \subseteq V$ un cubo e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare ed invertibile con matrice $[T]$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Allora vale*
$$\text{(CdMTQ)} \qquad m(Q) = \int_{T^{-1}(Q)} |\det [T]|\, dy = |\det [T]|\, m(T^{-1}(Q)).$$

Dimostrazione. FACOLTATIVO. Si sfrutta il Teorema di Beltrami per le mappe lineari; cioè ogni mappa lineare T può essere scritta come
$$T = W \circ \Delta_\lambda \circ V$$
con W, V mappe *ortogonali*[22] e $\Delta_\lambda(y) := (\lambda_1 y_1, \ldots, \lambda_n y_n)$ una *dilatazione non omogenea*. Il resto della dimotrazione consiste nella verifica che vale (CdMTQ) per $T = \Delta_\lambda$ e T ortogonale . Poi si fa la composizione.

1. <u>$T = \Delta_\lambda$</u>: In questo caso,
$$T^{-1}(y) = (\lambda_1^{-1} y_1, \ldots, \lambda_n^{-1} y_n), \text{ e } \det [T] = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$
Per ogni cubo compatto $Q = Q_r(\alpha) = \prod_{i=1}^n [\alpha_i - r, \alpha_i + r]$ si ha
$$T^{-1}(Q) = \left[\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - \frac{r}{\lambda_1}, \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{r}{\lambda_1}\right] \times \cdots \times \left[\frac{\alpha_n}{\lambda_n} - \frac{r}{\lambda_n}, \frac{\alpha_n}{\lambda_n} + \frac{r}{\lambda_n}\right].$$
Quindi
$$\text{(1.7.20)} \qquad \int_{T^{-1}(Q)} |\det [T]|\, dy = \lambda_1 \cdots \lambda_n m(T^{-1}(Q)) = m(Q).$$

[22]Cioè mappe invertibili con $W^{-1} = W^t$, la trasposta di W.

2. $\underline{T \text{ ortogonale}}$: In questo caso [23],

$$T^{-1} \text{ è ortogonale} \quad \text{e} \quad |\det[T]| = 1.$$

Inoltre si ha $|Tx| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi T manda bolle in bolle dello stesso raggio e quindi T conserva la misura di bolle. Più precisamente

$$\begin{aligned} T(B_r(\alpha)) &= \{T(x) : \ |x-\alpha| < r\} = \{y : \ |T^{-1}(y) - \alpha| < r\} = \{y : \ |T^{-1}(y - T(\alpha))| < r\} \\ &= \{y : \ |y - T(\alpha)| < r\} = B_r(T(\alpha)). \end{aligned}$$

Quindi

$$m(T(B_r(\alpha))) = m(B_r(T(\alpha))) = \omega_n r^n = m(B_r(\alpha)), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, r > 0. \tag{1.7.21}$$

Sia ora Q un cubo compatto qualsiasi. Esiste una collezione $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $B_k = B_{r_k}(\alpha_k)$ bolle aperte due e due disgiunte e contenute in Q° ed esiste un insieme Z di misura nulla t.c. (v. Corollario A.2 di [L1])[24]

$$Q = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \right) \cup Z.$$

Poichè T lineare è un diffeomorfismo, abbiamo $m(T(Z)) = 0$ e poi usando (1.7.21) con $B_k = B_{r_k}(\alpha_k)$ disgiunti abbiamo

$$m(T(Q)) = m\left(T\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(T(B_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(B_k) = m(Q); \tag{1.7.22}$$

cioè T è ortogonale e conserva la misura di ogni cubo. Poichè T^{-1} è anche ortogonale, vale (1.7.22) anche per T^{-1} e quindi

$$\int_{T^{-1}(Q)} |\det[T]|\, dy = m(T^{-1}(Q)) = m(Q).$$

3. $\underline{T \text{ lineare ed invertibile}}$: In questo caso, scriviamo $T = W \circ \Delta_\lambda \circ V$ tramite il Teorema di Beltrami e poi $T^{-1} = V^{-1} \circ \Delta_\lambda^{-1} \circ W^{-1}$ poichè T è invertibile ($\lambda_i \neq 0$ per ogni i). Per ogni cubo compatto Q, usiamo (1.7.22) per W, V ortogonali e (1.7.20) per Δ_λ. Otteniamo

$$m(T^{-1}(Q)) = m((\Delta_\lambda^{-1} \circ W^{-1})(Q) = \lambda_1^{-1} \cdots \lambda_n^{-1} m(W^{-1}(Q)) = \lambda_1^{-1} \cdots \lambda_n^{-1} m(Q),$$

ovvero

$$m(Q) = |\det[\Delta_\lambda]|\, m(T^{-1}(Q)) = |\det[T]|\, m(T^{-1}(Q)), \tag{1.7.23}$$

poichè W e V hanno determinante di modulo 1.

[23] Questi fatti sono noti dall'algebra lineare.

[24] Questo risultato è un corollario del Lemma di ricoprimento di Besicovich (Teorema A.1 di [L1]).

□

Lemma 1.7.5. *Sia $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo di classe C^1 fra aperti di $\mathbb{R}^n$. Vale la formula (CdMQ) del Lemma 1.7.3 se vale la formula asintotica: per ogni $x \in V$*

$$\text{(CdMx)} \qquad \lim_{Q\to\{x\}} \frac{1}{m(Q)} \int_{\Phi^{-1}(Q)} |\det \mathcal{J}_\Phi(y)|\, dy = 1$$

dove il significato di (CdMx) è: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c.

$$1-\varepsilon < \frac{1}{m(Q)} \int_{\Phi^{-1}(Q)} |\det \mathcal{J}_\Phi(y)|\, dy < 1+\varepsilon, \quad \forall\, Q \subset V:\ x \in Q, \operatorname{diam}(Q) < \delta.$$

Dimostrazione. FACOLTATIVO. Si procede per assurdo usando il metodo di bisezione di cubi

1. Supponiamo che vale (CdMx) ma non vale (CdMQ). Allora esiste $Q \subset V$ t.c.

$$m(Q) \neq \int_{\Phi^{-1}(Q)} \left|\det \mathcal{J}_\Phi(y)\right|\, dy := I(Q).$$

   Quindi esiste $\alpha > 0$ con $\alpha \neq 1$ t.c.

$$I(Q) = \alpha m(Q). \tag{1.7.24}$$

   Per fissare le idee, supponiamo che $\alpha > 1$. L'argomento per $\alpha < 1$ è analogo.

2. Esiste una successione di cubi compatti $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ t.c. $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ e valgono

$$\operatorname{diam}(Q_{k+1}) = \tfrac{1}{2}\operatorname{diam}(Q_k), \;\; I(Q_{k+1}) \geq \alpha m(Q_{k+1}), \tag{1.7.25}$$

   dove $Q_0 = Q$. Infatti, si costruisce la successione dei cubi iterando il seguente procedimento. Dividiamo Q in 2^n cubi $\{Q'_j\}_{j=1}^{2^n}$ per bisezione di ogni lato di Q. Questi cubi Q'_j hanno interni due a due disgiunti e diametro metà quello di Q. Per la definizione di I e la linearità dell'integrale abbiamo

$$\sum_{j=1}^{2^n} I(Q'_j) = \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Phi^{-1}(Q'_j)} \left|\det \mathcal{J}_\Phi(y)\right|\, dy = \int_{\Phi^{-1}(Q)} \left|\det \mathcal{J}_\Phi(y)\right|\, dy = I(Q), \tag{1.7.26}$$

   poichè $\Phi^{-1}(Q) = \bigcup_{j=1}^{2^n} \Phi^{-1}(Q'_j)$ e gli insiemi Q'_j hanno interni disguiti e la loro unione copre un sottoinsieme $\widetilde{Q} \subset Q$ con misura piena, cioè $m(\widetilde{Q}) = m(Q)$. Combinando (1.7.26) with (1.7.24) otteniamo

$$\sum_{j=1}^{2^n} I(Q'_j) = \alpha m(Q) = \alpha \sum_{j=1}^{2^n} m(Q'_j). \tag{1.7.27}$$

Quindi esiste almeno un indice $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$ t.c.

$$I(Q'_j) \geq \alpha m(Q'_j). \tag{1.7.28}$$

Infatti, se così non fosse si avrebbe $I(Q'_j) < \alpha m(Q'_j)$ per ogni $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$ e quindi

$$\sum_{j=1}^{2^n} I(Q'_j) < \alpha \sum_{j=1}^{2^n} m(Q'_j),$$

in contraddizione con (1.7.27). Scegliamo allora $Q_1 := Q'_j$ dove j è una qualsiasi indice per la quale vale (1.7.28). Abbiamo allora

$$Q_1 \subset Q, \ \ \mathrm{diam}(Q_1) = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(Q_0), \ \ I(Q_1) \geq \alpha m(Q_1),$$

Quindi abbiamo (1.7.25) per $k = 1$. Ripetendo questa costruzione con Q_1 al posto di $Q_0 = Q$, troviamo un cubo $Q_2 \subset Q_1$ che soddisfa (1.7.25) con $k = 2$ e così via.

3. Poichè $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi compatti non vuoti, esiste $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k \subset Q$. Inoltre i loro diametri tendono a zero e quindi $Q_k \to \{x\}$. Per l'ipotesi (CdMx) abbiamo
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{I(Q_k)}{m(Q_k)} = 1.$$
D'altre parte, dalla seconda condizione in (1.7.25) abbiamo
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{I(Q_k)}{m(Q_k)} \geq \alpha > 1,$$
una contraddizione e quindi abbiamo l'asserto.

□

Lemma 1.7.6. *Sia $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo di classe C^1 fra aperti di $\mathbb{R}^n$. Allora vale la formula asintotica (CdMx) del Lemma 1.7.5 per ogni $x \in V$.*

Dimostrazione. FACOLTATIVO. Per mappe lineari $\Phi = T$, il risulato è una conseguenza immediata della formula (CdMTQ) del Lemma 1.7.4. Nel caso generale, ogni diffeomorfismo Φ è ben approssimata localmente dalla mappa lineare con matrice $\mathcal{J}_\Phi$. Più precisamente:

1. Per $\Phi = T$ lineare, invertibile abbiamo dal Lemma 1.7.4 l'identità
$$1 = \frac{1}{m(Q)} \int_{T^{-1}(Q)} |\det[T]|\, dy = \frac{m(T^{-1}(Q))}{m(Q)} |\det[T]|, \quad \forall Q \subset V$$
e quindi il limite vale 1 banalmente per $Q \to \{x\}$.

2. Poiché $\det \mathcal{J}_\Phi$ è continuo su U, per ogni $x_0 \in V$ fissato con $y_0 = \Phi^{-1}(x_0)$ abbiamo il *teorema della media*

$$\lim_{Q \to \{x_0\}} \frac{1}{m(\Phi^{-1}(Q)} \int_{\Phi^{-1}(Q)} |\det \mathcal{J}_\Phi(y)|\, dy = |\det \mathcal{J}_\Phi(y_0)|$$

e, quindi ci basta mostrare

$$\lim_{Q \to \{x_0\}} \frac{m(\Phi^{-1}(Q))}{m(Q)} |\det \mathcal{J}_\Phi(y_0)| = 1.$$

3. Dato che le traslazioni sono diffeomorfismi che conservano la misura di Lebesgue, WLOG possiamo assumere che $x_0 = 0 = y_0$; cioè che Φ è un diffeomorfismo che manda l'origine nell'origine. Denotiamo con T la mappa lineare con $[T] = \mathcal{J}_\Phi(0)$ e ci serve

$$\lim_{Q \to \{0\}} \frac{m(\Phi^{-1}(Q))}{m(Q)} |\det [T]| = 1,$$

ma per Lemma 1.7.4 abbiamo $m(T \circ \Phi^{-1}(Q)) = |\det [T]|\, m(\Phi^{-1}(Q))$. Quindi basta mostrare

$$\lim_{Q \to \{0\}} \frac{m(T \circ \Phi^{-1}(Q))}{m(Q)} = 1, \tag{1.7.29}$$

dove $T \circ \Phi^{-1}$ è un diffeomorfismo vicino alla identità.

4. Facciamo ora gli sviluppi di Taylor di $G := T \circ \Phi^{-1}$ e G^{-1} in un intorno dell'origine. Abbiamo

$$G(0) = T \circ \Phi^{-1}(0) = T(0) = 0 \quad \text{e quindi} \quad G^{-1}(0) = 0.$$

e

$$\mathcal{J}_G(0) = [T]\ (\mathcal{J}_\Phi(0))^{-1} = (\mathcal{J}_\Phi(0))\,(\mathcal{J}_\Phi(0))^{-1} = I \quad \text{e quindi} \quad \mathcal{J}_{G^{-1}}(0) = I,$$

dove I è l'identità. Quindi abbiamo (v. (1.7.2))

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + \mathcal{J}_G(0) + \rho(x), \quad \rho(x) = o(|x|) \text{ per } x \to 0 \\ &= x + \rho(x) \end{aligned} \tag{1.7.30}$$

$$\begin{aligned} G^{-1}(y) &= G^{-1}(0) + \mathcal{J}_{G^{-1}}(0) + \tilde{\rho}(y), \quad \tilde{\rho}(y) = o(|y|) \text{ per } y \to 0 \\ &= y + \tilde{\rho}(y). \end{aligned} \tag{1.7.31}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c.

$$|x|, |y| < \delta \ \Rightarrow\ |\rho(x)| < \varepsilon |x|,\ |\tilde{\rho}(y)| < \varepsilon |y|. \tag{1.7.32}$$

5. Consideriamo la famiglia $\mathcal{Q}_\delta$ di tutti i cubi compatti $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ t.c.
$$0 \in Q \subset U \cap V \quad \text{e} \quad \mathrm{diam}(Q) < \delta \text{ con } \delta = \delta(\varepsilon) \text{ come sopra.}$$
Per mostrare $\lim_{Q\to 0} m(G(Q))/m(Q) = 1$, basta mostrare che esiste $C_0 > 0$, ε_0^* t.c. per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^*]$, si ha
$$1 - C_0\varepsilon \leq \frac{m(G(Q))}{m(Q)} < 1 + C_0\varepsilon, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_\delta. \tag{1.7.33}$$

6. Il vero lavoro è di verificare (1.7.33). Per ogni $Q \in \mathcal{Q}_\delta$ abbiamo per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ le relazioni $a_j \leq 0 \leq b_j$ e $b_j - a_j = r < \delta$ per qualche $r > 0$; cioè
$$Q = Q_{r/2}(p) \text{ con } p = (p_1, \ldots, p_n), p_j = (b_j + a_2)/2.$$
Per ogni $Q \in \mathcal{Q}_\delta$ fisso e per ogni $x \in Q$ ed ogni $j = 1, \ldots n$, da (1.7.30) e (1.7.32) segue
$$\begin{aligned} -\frac{r}{2} - \varepsilon\sqrt{n}r < G_j(x) - p_j = (x_j - p_j) + \rho_j(x) &< \frac{r}{2} + \varepsilon|x| \\ &< \frac{r}{2} + \varepsilon\sqrt{n}r \end{aligned}$$
e quindi
$$G(Q) \subset Q_{\frac{r}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})}(p).$$
In modo analogo, da (1.7.31) e (1.7.32) otteniamo
$$G^{-1}(Q) \subset Q_{\frac{r}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})}(p)$$
e quindi anche
$$Q = G(G^{-1}(Q)) \subset G\left(Q_{\frac{r}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})}(p)\right).$$
Segue che
$$m(G(Q)) \leq m\left(Q_{\frac{r}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})}(p)\right) = r^n(1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n = m(Q)(1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n \tag{1.7.34}$$
e
$$m(Q) \leq m\left(G\left(Q_{\frac{r}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})}(p)\right)\right). \tag{1.7.35}$$
Notiamo che $Q = Q_{r/2}(p) \subset Q_{\frac{r}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})}(p)$ e poniamo
$$R_\varepsilon := Q_{\frac{r}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})}(p) \setminus Q.$$
Combinando (1.7.35) con la stima del Lemma 1.7.2, otteniamo
$$m(Q) \leq m(G(Q)) + m(G(R_\varepsilon)) \leq m(G(Q)) + \left(\frac{\omega_n}{\gamma_n} \sup_{Q\cup R_\varepsilon} \|\mathcal{J}_\Phi\|\right)^n m(R_\varepsilon),$$

ovvero

$$m(Q) \le m(G(Q)) + M_\varepsilon m(R_\varepsilon) \text{ con } M_\varepsilon := \left(\frac{\omega_n}{\gamma_n} \sup_{Q \cup R_\varepsilon} \|\mathcal{J}_\Phi\|\right)^n. \tag{1.7.36}$$

Combinando (1.7.36) con (1.7.34) otteniamo

$$1 - \frac{M_\varepsilon m(R_\varepsilon)}{m(Q)} \le \frac{M(G(Q))}{m(Q)} \le (1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n,$$

ma $m(R_\varepsilon)/m(Q) = (1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n - 1$. Quindi abbiamo

$$1 - M_\varepsilon\left((1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n - 1\right) \le \frac{M(G(Q))}{m(Q)} \le (1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n. \tag{1.7.37}$$

Ora notiamo che il fattore M_ε definito in (1.7.36) è crescente in ε. Fissiamo $\varepsilon_0 > 0$ piccolo per avere $Q \cup R_{\varepsilon_0} \subset U \cap V$. Abbiamo $M_\varepsilon \le M_{\varepsilon_0}$ per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ e quindi da (1.7.37) otteniamo

$$1 - M_{\varepsilon_0}\left((1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n - 1\right) \le \frac{M(G(Q))}{m(Q)} \le (1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{1.7.38}$$

Infine, la quantità $h(\varepsilon) = (1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n = 1 + 2n\sqrt{n}\varepsilon + o(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$ e quindi scegliendo ε ancora più piccolo abbiamo un ε_0^* t.c.

$$1 + n\sqrt{n}\varepsilon < h(\varepsilon) < 1 + 4n\sqrt{n}\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0^*].$$

Combinando questo con (1.7.38) otteniamo

$$1 - M_{\varepsilon_0} 4n\sqrt{n}\varepsilon < \frac{m(G(Q))}{m(Q)} < 1 + 4n\sqrt{n}\varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

ovvero (1.7.33) con $C_0 = 4n\sqrt{n}\max\{M_{\varepsilon_0}, 1\}$.

□

Questo finisce Passo 3 e la dimostrazione di (CdM) e (CdV). □

Osservazione 1.7.3. Lo schema della dimsotrazione delle formule (CdM) e (CdV) è stato: mostrare la formula (CdMTQ) tramite Lemma 1.7.4 e poi:

$$\text{(CdMTQ)} \overset{\text{Lemma 1.7.6}}{\Longrightarrow} \text{(CdMx)} \overset{\text{Lemma 1.7.5}}{\Longrightarrow} \text{(CdMQ)} \overset{\text{Lemma 1.7.3}}{\Longrightarrow} \text{(CdM)} \overset{\text{Oss. 1.7.1}}{\Longrightarrow} \text{(CdV)}$$

1.8 Integrali dipendenti da parametri

Problema: Data una funzione integrale

$$F(t) = \int_E f(x,t)\,dx$$

con $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabile su E per ogni $t \in T \subset \mathbb{R}^m$. Stabilire se F è continua o se F ammette derivate parziali.

Teorema 1.8.1. *Sia t_0 un punto di accumulazione di $T \subset \mathbb{R}^m$. Sia $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

i) Per ogni $t \in T$, $f(\cdot,t) \in L(E)$.

ii) Per q.o. $x \in E$, $f(x,\cdot)$ è continua in t_0.

iii) Esiste un intorno $U(t_0)$, esiste $g \in L(E)$ t.c.

$$|f(x,t)| \le g(x), \quad \text{per q.o. } x \in E, \text{ogni } t \in U(t_0) \cap T.$$

Allora F è continua in t_0.

Dimostrazione. Sia $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset U(t_0) \cap T$ t.c. $t_j \to t_0$ per $j \to +\infty$. Poniamo:

$$\begin{cases} f_j(x) := f(x,t_j) & j \in \mathbb{N} \\ h(x) := f(x,t_0) \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\begin{cases} f_j \in L(E) & & \text{(per la i))} \\ f_j(x) \to h(x) & \text{q.o. in } E & \text{(per la ii))} \\ |f_j(x)| \le g(x) & \text{q.o. in } E & \text{(per la iii)).} \end{cases}$$

Per il teorema di Lebesgue (DCT), abbiamo

$$F(t_j) = \int_E f(x,t_j)\,dx \to \int_E h(x)\,dx = F(t_0).$$

□

Osservazione 1.8.1. Al posto di $T \subset \mathbb{R}^m$ si può prendere $T \subset (\Lambda, d)$ dove (Λ, d) è uno spazio metrico qualsiasi (v. Teorema 5.7.3 di [4]).

Osservazione 1.8.2. L'ipotesi iii) nel teorema è essenziale.

Esempio 1.8.1. Siano $E = (0,+\infty), T = [0,+\infty)$, $t_0 = 0$, e $f(x,t) = te^{-tx}$. Si ha

$$F(t) = \int_{(0,+\infty)} te^{-tx}\,dx = 1 \ \text{ per ogni } t > 0$$

ma $F(0) = 0$. Il teorema non è applicabile perché ogni funzione g che soddisfa $|f(x,t)| \le g(x)$ per ogni x e ogni $t > 0$ piccolo non è sommabile su E.

Avendo trattato la continuità di F passiamo alla questione della sua derivabilità. Il risultato principale è il teorema seguente.

Teorema 1.8.2. *Siano $T \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $t_0 \in T$, $U(t_0) \subset T$ un intorno di t_0. Sia $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

i) Per ogni $t \in T$, $f(\cdot, t) \in L(E)$.

ii) Per qualche $k \in \{1, \dots, m\}$ esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial t_k}(x,t) \text{ per q.o. } x \in E, \text{e per ogni } t \in U(t_0).$$

iii) Esiste $g \in L(E)$ t.c.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_k}(x,t)\right| \le g(x), \quad \text{per q.o. } x \in E, \text{e per ogni } t \in U(t_0) \cap T.$$

Allora

$$\frac{\partial F}{\partial t_k}(t_0) = \frac{\partial}{\partial t_k}\bigg|_{t=t_0} \left[\int_E f(x,t)\,dx\right] = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_k}(x,t_0)\,dx.$$

Dimostrazione. Per ogni $j \in \mathbb{N}$, poniamo $t_j^* := t_0 + j^{-1}e_k \to t_0$ per $j \to +\infty$ lungo la direzione k-esima in $\mathbb{R}^m$. Poniamo:

$$\begin{cases} h_j(x) := \dfrac{f(x,t_j^*) - f(x,t_0)}{1/j}, & j \in \mathbb{N} \\ \\ h(x) := \dfrac{\partial f}{\partial t_k}(x,t_0) \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{cases} h_j \in L(E) & \text{(per la i))} \\ h_j(x) \to h(x) \quad \text{per q.o. } x \in E & \text{(per la ii)).} \end{cases}$$

Inoltre, per quasi ogni $x \in E$, per il teorema di Lagrange, esiste $\bar{t} = \bar{t}(x,j)$ fra t_0 e t_j^* tale che

$$\frac{\partial f}{\partial t_k}(x,\bar{t}) = \frac{f(x,t_j^*) - f(x,t_0)}{1/j} = h_j(x).$$

Ma la stima iii) è uniforme in t; cioè

$$|h_j(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t_k}(x,\bar{t})\right| \le g(x), \quad \text{q.o. } x \in E.$$

Di nuovo, per il teorema di Lebesgue (DCT), abbiamo

$$\frac{\partial F}{\partial t_k}(t_0) = \lim_{j\to+\infty} \int_E h_j(x)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_k}(x,t_0)\,dx.$$

□

Corollario 1.8.1. *Siano $T \subset \mathbb{R}^m$ aperto e $f : E \times T \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che*

i) Per ogni $t \in T$, $f(\cdot, t) \in L(E)$.

ii) Per q.o. $x \in E$, $f(x, \cdot) \in C^1(T)$.

iii) Per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, esiste $g_k \in L^1(E)$ tale che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_k}(x,t)\right| \le g_k(x), \quad \text{per q.o. } x \in E, \text{e per ogni } t \in T.$$

Allora $F \in C^1(T)$ e vale

$$\frac{\partial F}{\partial t_k}(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_k}(x,t)\,dx, \quad \forall t \in T, \forall\, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Osservazione 1.8.3 (Applicazione tipica)**.** Siano $u \in L(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, una funzione di classe C^1 con supporto compatto; cioè esiste $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto tale che $\varphi \equiv 0$ su $\mathbb{R} \setminus K$. Allora la funzione $\varphi * u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$(\varphi * u)(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t-x)u(x)\,dx$$

è di classe C^1 e vale

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\varphi * u)(t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_k} * u\right)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t-x)u(x)\,dx.$$

Infatti, si applica il Corollario 1.8.1 alla funzione $f(x,t) := \varphi(t-x)u(x)$.

N.B. La funzione $\varphi * u$ è detta *convoluzione di φ ed u*. L'operazione di convoluzione è molto utile per regolarizzare una funzione u sommabile ma a priori poco regolare. È la base del metodo di *mollificazione* studiata in Analisi Reale e usata spessissimo nei corsi successivi di Analisi.

Capitolo 2

Misure astratte ed integrazione

In questo breve capitolo vogliamo generalizzare ad un contesto più ampio e flessibile dei concetti già visti per la misura ed integrale di Lebesgue. Ricordiamo che gli elementi della teoria di Lebesgue che abbiamo sviluppato sono sostanzialmente tre:

1. Una terna $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), m_n)$ formata da una misura m_n definita e numerabilmente additiva su una σ-algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono misurabili rispetto a m_n.

2. Il concetto di misurabilità per funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ definite (almeno q.o.) su un sottoinsieme misurabile rispetto a m_n e l'approssimazione di funzioni misurabili tramite funzioni semplici e misurabili.

3. Il concetto di integrale $\int_E f \, dm_n$ per funzioni misurabili su E misurabile.

Per dare un quadro un po' più completo dell'argomento, a volte faremo delle considerazioni non presenti nel libro di testo [3], ma in questi casi, una referenza adeguata sarà indicata.

2.1 Misure astratte

Cominciamo con una definizione già fatta alla fine del discorso sulla misura di Lebesgue (v. l'Osservazione 1.1.6).

Definizione 2.1.1. Uno *spazio di misura* è una terna $(X, \mathcal{M}(X), \mu)$ dove

- X è un *insieme non vuoto*;

- $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ è una *σ-algebra di sottoinsiemi di X*, ovvero una collezione di sottoinsiemi di X tale che

(SA$_1$) $\emptyset \in \mathcal{M}(X)$;

(SA$_2$) $E \in \mathcal{M}(X) \;\Rightarrow\; E^c = X \setminus E \in \mathcal{M}(X)$;

(SA$_3$) $E_k \in \mathcal{M}(X)$ per ogni $k \in \mathcal{K} \subset \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{k\in\mathcal{K}} E_k, \bigcap_{k\in\mathcal{K}} E_k \in \mathcal{M}(X)$.

- $\mu : \mathcal{M}(X) \to [0,+\infty]$ è una *misura (positiva)*, ovvero

(M$_1$) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M$_2$) $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$ se $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(X)$ con $E_j \cap E_k = \emptyset$ per $j \neq k$.

Osservazione 2.1.1. Dalla *normalizzazione* (M$_1$) e l'*additività numerabile* (M$_2$) si ricava anche *l'additività finita*, ovvero per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k)$ se $\{E_k\}_{k=1}^{N} \subset \mathcal{M}(X)$ con $E_j \cap E_k = \emptyset$ per $j \neq k$. Infatti basta prendere $E_k := \emptyset$ per ogni $k > N$.

Esempio 2.1.1. $(X, \mathcal{M}(X), \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathrm{L}}(\mathbb{R}^n), m_n)$ dove $\mathcal{M}_{\mathrm{L}}(\mathbb{R}^n)$ e m_n sono la σ-algebra e la misura di Lebesgue rispettivamente.

Esempio 2.1.2. Sia $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ una funzione misurabile secondo Lebesgue. La funzione $\mu : \mathcal{M}_{\mathrm{L}}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ definita da

$$\mu(E) := \int_E f\, dm_n = \int_E f(x)\, dx$$

è una misura su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathrm{L}}(\mathbb{R}^n))$. Infatti abbiamo (M$_1$) perché

$$\mu(\emptyset) = \int_\emptyset f(x)\, dx = 0$$

e abbiamo (M$_2$) perché

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k} f(x)\, dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{E_k} f(x)\, dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k),$$

usando l'additività dell'integrale per una collezione di insiemi misurabili e due a due disgiunti.

Osservazione 2.1.2. Nell'esempio precedente, se $f \equiv 1$ allora $\mu = m_n$. Inoltre, se f è misurabile di segno qualunque, possiamo usare $|f|$ al posto di f per avere una misura (positiva). Esiste il concetto più generale di *misura con segno*, ma ci limiteremo a quelle positive.

Definizione 2.1.2. Uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}(X), \mu)$ è detto *σ-finito* se esiste una collezione numerabile $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(X)$ tale che

i) $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$;

ii) $\mu(E_k) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

In tal caso la misura μ e anche detta *σ-finita*.

Osservazione 2.1.3. a) Se esiste una collezione finita $\{E_k\}_{k=1}^N$ con le proprietà nella definizione precedente, allora

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k) < +\infty.$$

In tal caso lo spazio di misura è detto *finito* e la misura μ è detta *finita*.

b) Uno spazio di misura finito con la normalizzazione $\mu(X) = 1$ è detto *spazio di probabilità* e la sua misura è detta *misura di probabilità*. Possiamo costruire un spazio di probabilità da uno spazio di misura finito qualunque prendendo la misura normalizzata $\tilde{\mu}$ definita da

$$\tilde{\mu}(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(X)}, \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{M}(X).$$

Per uno spazio di misura σ-finito ma **non** finito, dato un insieme $A \neq \emptyset$ misurabile con misura finita possiamo costruire una spazio di misura finito $(A, \mathcal{M}(A), \mu_A)$ prendendo la restrizione di μ ad A, ovvero

$$\mathcal{M}(A) := \{E \in \mathcal{M}(X) : \ E \subset A\} \quad \text{e} \quad \mu_A(E) = \mu(E) \ \text{ per ogni } E \in \mathcal{M}(A).$$

Osservazione 2.1.4. Anche se non abbiamo detto esplicitamente, la proprietà di σ-finitezza vale nel caso della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Infatti, basta prendere $E_k = [-k, k]^n$ dove $m_n(E_k) = (2k)^n < +\infty$ e $\mathbb{R}^n = \cup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Inoltre, la proprietà di σ-finitezza è stata usata implicitamente nelle dimostrazioni dei teoremi di Tonelli e Fubini e nelle verifiche delle formule di (CdM) e (CdV).

Esempio 2.1.3. Come detto soprra, lo spazio di misura nell'Esempio 2.1.1 (Lebesgue) è σ-finito. Invece, lo spazio di misura nell'Esempio 2.1.2 è σ-finito solo se f soddisfa anche la proprietà

$$\int_{B_k(0)} f(x)\, dx < +\infty \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N},$$

ovvero $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di tutte le funzioni misurabili per cui

$$\int_K |f(x)|\, dx < +\infty \quad \text{per ogni } K \text{ compatto in } \mathbb{R}^n.$$

Invece, lo spazio nell'Esempio 2.1.2 è finito se e solo se $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 2.1.4. Siano X al più numerabile e non vuoto, $\mathcal{M}(X) = \mathcal{P}(X)$ e μ definita da

$$\mu(E) := \begin{cases} \sum_{x \in E} f(x) & E \neq \emptyset \\ 0 & E = \emptyset \end{cases},$$

dove $f : X \to [0, +\infty]$ una funzione assegnata. $(X, \mathcal{M}(x), \mu)$ è uno spazio di misura dove per ogni $E \subset X$ si ha $E = \{x_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ con $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$ e $\mu(E) = \sum_{k \in \mathcal{K}} f(x_k)$.

- La misura μ è σ-finita se e solo se $f : X \to [0, +\infty)$.
- La misura è finita se e solo se la somma $\sum_{x \in E} f(x)$ è finita.

Nel caso $f \equiv 1$, la misura μ è detta *misura del conteggio*.

Esempio 2.1.5. Siano X non vuoto, $\mathcal{M}(X) = \mathcal{P}(X)$ e $\mu = \delta_{x_0}$ con $x_0 \in X$ definita da

$$\delta_{x_0}(E) := \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases}.$$

$(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$ è uno spazio di misura (esercizio). La misura è finita perché $\delta_{x_0}(X) = 1$ e quindi è una misura di probabilità. La misura δ_{x_0} è detta *misura di Dirac (basata in x_0)*.

Definizione 2.1.3. Uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}(X), \mu)$ è detto *completo* se

$$A \in \mathcal{M}(X), \mu(A) = 0, B \subset A \implies B \in \mathcal{M}(X). \tag{2.1.1}$$

In tal caso μ è detta *completa*.

Osservazione 2.1.5. È evidente che gli spazi negli Esempi 2.1.4 e 2.1.5 sono completi perché $\mathcal{M}(X) = \mathcal{P}(X)$. La completezza degli Esempi 2.1.1 e 2.1.2 è già nota.

Abbiamo visto che la completezza della misura di Lebesgue era molto utile nella gestione degli insiemi trascurabili per l'integrale. Quindi è naturale domandarsi, come costruire delle misure complete. Una costruzione è possibile tramite la teoria di Carathèodory a partire dal concetto di *misura esterna*. [1]

2.2 Misura esterne e misure esterne metriche

Definizione 2.2.1. Sia $X \neq \emptyset$. Una *misura esterna su* X è una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che

[1] Più generalmente si può mostrare l'esistenza di un'unica misura completa $\bar{\mu}$ che estende μ alla σ-algebra $\bar{\mathcal{M}}(X) = \{E \cup S : E \in \mathcal{M}(X), S \subset Z \in \mathcal{M}(X), \mu(Z) = 0\}$.

(ME$_1$) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ME$_2$) $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ se $A \subset B$;

(ME$_3$) $\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$ per ogni $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$.

Osservazione 2.2.1. Attenzione alla terminologia. Il libro di testo [3] usa il termine *misura* per una funzione che soddisfa le condizioni della Definizione 2.2.1. Abbiamo riservato il termine misura per il concetto più forte contenuto nella Definizione 2.1.1.

Come nell'Osservazione 2.1.1, si ha anche la subadditività per collezioni finite $\{A_k\}_{k=1}^N$ di sottoinsiemi di X.

Esempio 2.2.1. $\mu^* = m_n^*$ la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ è una misura esterna nel senso della Definizione 2.2.1.

Esempio 2.2.2 (Costruzione generale)**.** Siano

- $X \neq 0$;
- $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ tale che $\emptyset, X \in \mathcal{E}(X)$;
- $\rho : \mathcal{E}(X) \to [0, +\infty]$ tale che $\rho(\emptyset) = 0$.

Allora la funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k\in\mathcal{K}} \rho(E_k) : \ E_k \in \mathcal{E}(X),\ A \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}} E_k,\ \mathcal{K} \subset \mathbb{N}\right\} \tag{2.2.1}$$

è una misura esterna.

Notiamo che nel caso della misura esterna di Lebesgue abbiamo usato $X = \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{E} = \{E \subset \mathbb{R}^n : \ E = I \text{ intervallo compatto}\} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{E} = \{E \subset \mathbb{R}^n : \ E = Q \text{ cubo compatto}\},$$

e $\rho(E) = v(E)$ è l'n-volume di E.

Esercizio 2.2.1. Verificare che la funzione μ^* definita nell'esempio precedente è una misura esterna.

Per passare da una misura esterna ad una misura vera e propria, ci serve la definizione di misurabilità di un sottoinsieme. La definizione è identica a quella usata nel caso particolare della misura esterna di Lebesgue.

Definizione 2.2.2. Sia $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna su X. Un insieme $E \subset X$ è detto *μ-misurabile* se soddisfa la *condizione di Carathéodory*, ovvero

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \quad \forall\, A \subset X. \tag{2.2.2}$$

In tal caso, si denota con $\mathcal{M}(X)$ la collezione di tutti gli insiemi μ-misurabili e con μ la restrizione di μ^* a $\mathcal{M}(X)$, cioè

$$\mu(E) := \mu^*(E), \quad \forall\, E \in \mathcal{M}(X).$$

La bontà di questa definizione si trova nel seguente risultato fondamentale.

Teorema 2.2.1. *Sia μ^* misura esterna su $X \neq \emptyset$. Allora*

a) $\mathcal{M}(X)$ è un σ-algebra;

b) $\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}(X)}$ è una misura;

c) μ è completa.

Inoltre

d) Siano $A, B \in \mathcal{M}(X)$ tali che $A \subset B$ e $\mu(B) < +\infty$. Allora $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

e) Sia $\{E_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{M}(X)$. Allora

$$E_k \nearrow \ \Rightarrow \ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(E_k);$$

$$E_k \searrow \ \text{e} \ \mu(E_1) < +\infty \ \Rightarrow \ \mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(E_k).$$

Dimostrazione. Per esercizio. Le dimostrazioni di tutte le affermazioni sono identiche a quelle fatte per il caso particolare $\mu = m_n$. In particolare, nessun ruolo essenziale è giocato dalle scelte $X = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{E}(X) = \{\text{intervalli compatti}\}$. □

Osservazione 2.2.2. Nel caso della misura esterna di Lebesgue, abbiamo sfruttato la topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$ per aiutarci a capire quali sono i sottoinsiemi misurabili e quali sono le funzioni misurabili. Per fare una cosa analoga nel caso uno spazio di misura qualunque, dobbiamo avere una topologia sull'insieme X.

Definizione 2.2.3. Sia $(X, \mathcal{M}(X), \mu)$ uno spazio di misura dove $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico. La misura μ è detta *boreliana* se ogni U aperto è μ-misurabile, ovvero $U \in \mathcal{M}(X)$.

Nel caso in cui μ sia la restrizione ad $\mathcal{M}(X)$ di una misura esterna μ^* su $\mathcal{P}(X)$, μ è boreliana se ogni U aperto soddisfa la condizione di Carathéodory (2.2.2). Quando $(X, \mathcal{T}) = (X, d)$ è uno spazio metrico, una condizione sufficiente affinché tutti gli aperti siano misurabili è fornita dal concetto di *misura esterna metrica*. Ci servono un paio di definizioni. Per il resto del paragrafo (X, d) è uno spazio metrico con $X \neq \emptyset$.

Definizione 2.2.4. Siano $A, B \subset X$ non vuoti. La *distanza tra A e B* è il numero reale non negativo definito da

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : \ x \in A, y \in B\}.$$

La *distanza tra $x \in X$ ed A* è il numero reale non negativo definito da

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : \ y \in A\}.$$

Proposizione 2.2.1 (Proprietà della distanza)**.** *Siano $A, B \subset X$ non vuoti. Allora:*

a) $d(A, B) = d(B, A)$;

b) $A \cap B \neq \emptyset \ \Rightarrow \ d(A, B) = 0$;

c) $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$;

d) $\forall\, x \in X : \quad x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ d(x, A) = 0$;

e) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall\, x, y \in X, \forall\, A \subseteq X.$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. Consultare la Proposizione 1.2.1 di [3]. □

Definizione 2.2.5. Una misura esterna μ^* su (X, d) è detta *misura esterna metrica* se

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \quad \forall A, B \subset X \ \text{ non vuoti tali che } \ d(A, B) > 0. \tag{2.2.3}$$

Teorema 2.2.2. *Sia μ^* misura esterna metrica su (X, d). Allora ogni aperto/chiuso di (X, d) è μ-misurabile. In particolare, $\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}(X)}$ è una misura di Borel.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. Consultare il Teorema 1.23 di [3]. □

Osservazione 2.2.3. Esistono delle generalizzazioni dei Teoremi di struttura per insiemi misurabili rispetto ad una misura esterna metrica. Anche se non faremo uso di tali risultati, si può consultare [SS].

2.3 Funzioni misurabili

Sia $(X, \mathcal{M}(X), \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e completo.

Definizione 2.3.1. Siano $E \in \mathcal{M}(X)$ e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. La funzione f è detta μ-misurabile se

$$\{x \in E : \ f(x) > a\} \quad \text{è } \mu\text{-misurabile } \ \forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.3.1}$$

Osservazione 2.3.1 (Sulla definizione di misurabilità di f)**.**

a) Nella definizione basta controllare (2.3.1) per ogni $a \in \mathbb{R}$. Infatti, lo stesso ragionamento usato nell'Osservazione 1.2.1 (per la misura di Lebesgue) si applica qui perché $\mathcal{M}(X)$ è un σ-algebra.

b) Per lo stesso motivo, è equivalente richiedere per ogni $a \in \mathbb{R}$ la misurabilità di $\{x \in E : \ f(x) \geq a\}$, etc.

c) La definizione ha senso anche per f definita solo μ-quasi ovunque in E, cioè per

$$f : E \setminus Z :\to \mathbb{R} \ \text{ con } \ \mu(Z) = 0.$$

Infatti, in tal caso, possiamo prolungare f a tutto E in modo arbitrario. La condizione (2.3.1) è sempre soddisfatta.

Teorema 2.3.1 (Proprietà delle funzioni μ-misurabili)**.** *Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ μ-misurabili su $E \in \mathcal{M}(X)$. Allora*

a) Sono μ-misurabili su E le funzioni $f + g$, fg, f/g (se $g \neq 0$ μ-q.o. su E) e cf per ogni $c \in \mathbb{R}$.

b) Sono μ-misurabili su E le funzioni f^+, f^- e $|f|^p$ con $p > 0$.

c) Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e $f : E \to \mathbb{R}$ allora $\varphi \circ f$ è μ-misurabile su E.

Inoltre

d) Se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni μ-misurabili su E allora lo sono anche

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \limsup_{k \to +\infty} f_k \ \text{ e } \ \liminf_{k \to +\infty} f_k.$$

e) Una funzione semplice $s = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$ con $c_k \in \mathbb{R}$ e $E_j \cap E_k = \emptyset$ se $j \neq k$ è μ-misurabile se e solo se $E_k \in \mathcal{M}(X)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

f) Sia $f \geq 0$ una funzione μ-misurabile su E. Allora esiste una successione $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici e μ-misurabili tale che $0 \leq s_j \nearrow f$.

Dimostrazione. Per esercizio. Le dimostrazioni di tutte le affermazioni sono identiche a quelle fatte per il caso particolare $\mu = m_n$. □

Osservazione 2.3.2. Nel caso in cui (X, d) è uno spazio metrico e che la misura μ sia boreliana, è evidente che abbiamo la μ-misurabilità di tutte le funzioni continue su E μ-misurabile. Possiamo dire di più. Classi naturali di funzioni μ-misurabili sono quelle delle funzioni *semicontinue*. Una buona referenza è il libro di Giusti [2].

Definizione 2.3.2. Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in X$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$.

a) f è detta *semicontinua superiormente (USC) in* x_0 se [2]

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x). \tag{2.3.2}$$

b) f è detta *semicontinua inferiormente (LSC) in* x_0 se [3]

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x). \tag{2.3.3}$$

Inoltre se vale (2.3.2) per ogni $x_0 \in E$, diciamo che f è *semicontinua superiormente in* E e denotiamo $f \in USC(E)$. In modo analogo, se vale (2.3.3) per ogni $x_0 \in E$, diciamo che f è *semicontinua inferiormente in* E e denotiamo $f \in LSC(E)$.

Solo per avere un'idea di che cosa vuol dire f è USC/LSC in x_0 consideriamo un'esempio semplicissimo.

Esempio 2.3.1. Sia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ con $f(x) = 1$ per ogni $x \neq x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ fisso. La funzione è continua in x_0 se $f(x_0) = 1$, ma è *USC* in x_0 se $f(x_0) \geq 1$ e *LSC* in x_0 se $f(x_0) \leq 1$.

L'esempio precedente suggerisce il seguente risultato.

Proposizione 2.3.1. *Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in X$ a valori in $\mathbb{R}$. Allora f è continua in x_0 se e solo se*

$$f \text{ è } USC \text{ in } x_0 \quad e \quad f \text{ è } LSC \text{ in } x_0.$$

Dimostrazione. L'implicazione ($\Rightarrow$) è ovvio da (2.3.2) e (2.3.3) usando il fatto che esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ se e solo se vale l'identità $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x)$. Per l'implicazione ($\Leftarrow$) basta notare che

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

□

[2] USC = upper semicontinuous. Giusti usa invece l'abbreviazione SCS.
[3] LSC = lower semicontinuous. Giusti usa invece l'abbreviazione SCI.

Consideriamo un altro esempio elementare.

Esempio 2.3.2. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/|x|$. La funzione è continua ma non è prolungabile con continuità in $x = 0$. D'altre parte, assegnando il valore $f(0) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha

$$f \in USC(\mathbb{R}) \text{ se e solo se } \alpha = +\infty$$

e

$$f \in LSC(\mathbb{R}) \text{ per ogni } \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Per questo motivo, a volte per funzioni *USC* si prende valori solo in $[-\infty, +\infty)$ e per funzioni *LSC* solo valori in $(-\infty, +\infty]$.

La μ-misurabilità in E delle funzioni in $USC(E), LSC(E)$ segue dalla seguente caratterizzazione.

Proposizione 2.3.2. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ con $E \in \mathcal{M}(X)$. Allora*

$$\begin{aligned} f \in USC(E) &\Leftrightarrow \{x \in E : \ f(x) \geq a\} \text{ è chiuso in } E, \ \forall\, a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : \ f(x) < a\} \text{ è aperto in } E, \ \forall\, a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f \in LSC(E) &\Leftrightarrow \{x \in E : \ f(x) \leq a\} \text{ è chiuso in } E, \ \forall\, a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : \ f(x) > a\} \text{ è aperto in } E, \ \forall\, a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. Si può consultare [2]. □

Infine abbiamo il risultato desiderato.

Teorema 2.3.2. *Siano (X, d) uno spazio metrico e μ una misura boreliana su X. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ con $E \in \mathcal{M}(X)$. Allora f è μ-misurabile in E se $f = g$ per μ-quasi ogni $x \in E$ per qualche $g \in C(E) \cup USC(E) \cup LSC(E)$.*

Dimostrazione. È facile usando le definizioni e le due proposizioni precedenti. □

Osservazione 2.3.3. Ci sono diversi motivi per introdurre le funzioni semicontinue. La prima è il suo ruolo importante in problemi di ottimizzazione. Ad esempio, sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in E. Non è detto che le funzioni

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \limsup_{k \in \mathbb{N}} f_k \ \text{ e } \ \liminf_{k \in \mathbb{N}} f_k$$

siano continue in E. Basta pensare all'esempio $f_k(x) = x^k$ su $E = [0, 1]$. Invece viene conservata una semicontinità opportuna. Inoltre, esiste una generalizzazione importante del teorema di Weierstrass per le funzioni semicontinue. Si può consultare [2].

2.4 Integrazione rispetto ad una misura μ

Sia $(X, \mathcal{M}(X), \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e completo. La costruzione dell'integrale rispetto a μ procede come nel caso della misura di Lebesgue. Data la forte somiglianza ci limiteremo ad una presentazione schematica.

1. Per una funzione s semplice, μ-misurabile e non negativa su X della forma

$$s = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}, \quad c_k \in [0, +\infty), E_k \in \mathcal{M}(X),$$

   definiamo *l'integrale di s rispetto a μ* tramite

$$\int_E s \, d\mu := \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(E_k \cap E), \quad E \in \mathcal{M}(X).$$

2. Per $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ-misurabile e non negativa su E definiamo *l'integrale di f rispetto a μ* tramite

$$\int_E f \, d\mu := \sup_{s \in \mathcal{S}_f} \int_E s \, d\mu,$$

   dove $\mathcal{S}_f := \{s : \text{ semplice e misurabile su } E \text{ tale che } 0 \leq s \leq f \text{ su } E\}$. Tutte le funzioni μ-misurabili e non negative hanno il loro integrale ben definito.

3. Infine per $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ-misurabile definiamo *l'integrale di f rispetto a μ* tramite

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

   se almeno uno degli integrali $\int_E f^\pm \, d\mu$ è finito e diciamo che *f è integrabile in E rispetto a μ*. Inoltre f è detta *sommabile in E rispetto a μ* se entrambi gli integrali $\int_E f^\pm \, d\mu$ sono finiti. Denotiamo con $L(E, d\mu)$ lo spazio delle funzioni sommabili in E rispetto a μ.

Osservazione 2.4.1 (Prime proprietà dell'integrale)**.** Come nel caso della misura di Lebesgue:

a) Monotonia: (v. il Teorema 1.3.1)

b) Annulamento: se $f \geq 0$ e μ-misurabile su E allora

$$\int_E f \, d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(E) = 0 \text{ oppure } f = 0 \ \mu\text{-q.o. in } E.$$

c) Linearità: (v. il Teorema 1.3.2)

d) Caratterizzazione di sommabilità: $f \in L(E, d\mu) \iff |f| \in L(E, d\mu)$ dove vale la stima

$$\left| \int_E f\, d\mu \right| \le \int_E |f|\, d\mu.$$

e) Confronto: $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-misurabili t.c. $|f| \le |g| \in L(E, d\mu) \Rightarrow f \in L(E, d\mu)$.

f) Ruolo di insiemi di misura nulla: Se $f = g$ μ-q.o. in E con g integrabile rispetto a μ in E allora f è integrabile rispetto a μ in E e gli integrali coincidono.

Osservazione 2.4.2. Abbiamo anche tutti gli strumenti per il passaggio del limite sotto segno di integrale, in particolare:

a) Convergenza monotona: (v. il Teorema 1.3.3)

b) Lemma di Fatou: (v. il Teorema 1.4.1)

c) Convergenza dominata: (v. il Teorema 1.4.2)

d) Convergenza uniforme: (v. il Cor. 1.4.6)

e) Convergenza limitata: (v. il Cor. 1.4.7)

f) Integrazione per serie: (v. il Cor. 1.4.2)

g) Integrazione e successioni monotone di insiemi: (v. il Cor. 1.4.3)

Domanda: Esistono formule di riduzione nel caso generale? Cioè esistono generalizzazioni dei Teoremi di Fubini-Tonelli?

Risposta: Sì, tramite il concetto di *prodotto di due spazi di misura*. Ci limiteremo a dare i punti principali della costruzione. Una buona referenza è il libro di Stein e Shakarchi [6]. Siano $(X_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$, $k = 1, 2$ due spazi di misura σ-finiti e completi. Vogliamo costruire una misura $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ sul prodotto cartesiano $X := X_1 \times X_2$.

1. Per ogni *rettangolo misurabile*, cioè $A \times B \subset X_1 \times X_2$ con $A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2$, si definisce
$$\rho(A \times B) := \mu_1(A) \times \mu_2(B)$$
2. Si definisce la collezione di *insiemi elementari*
$$\mathcal{E}(X) = \left\{ E \subset X :\ E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, N \in \mathbb{N}, E_k = A_k \times B_k \text{ rettangolo mis.}, E_j \cap E_k = \emptyset, j \neq k \right\}$$
Si mostra che $\mathcal{E}(X)$ è un'*algebra* e si definisce
$$\rho(E) := \sum_{k=1}^{N} \rho(E_k) \ \text{ se } \ E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k \in \mathcal{E}(X).$$
che viene detta *premisura sul prodotto* X.

3. Si mostra che esiste un'unica $\mu : \mathcal{M}(X) \to [0, +\infty]$ misura completa e σ-finita dove $\mathcal{M}(X)$ è la σ-algebra generata dall'algebra $\mathcal{E}(X)$ che prolunga ρ, cioè
$$\mu(E) = \rho(E), \quad \forall E \in \mathcal{E}(X).$$
Infatti, la premisura ρ viene usata per definire una misura esterna μ^* su $\mathcal{P}(X)$ nel modo usuale. Poi, $\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}(X)}$. Si usa la proprietà di essere σ-finito per l'unicità di μ.

Con la misura prodotto in mano, si procede come nel caso Lebesgue. Per ogni $E \in \mathcal{M}(X)$, $x_k \in X_k$, si definiscono *le sezioni di E*
$$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\} \quad \text{e} \quad E^{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}.$$
Si ha, ad esempio, il risultato seguente.

Teorema 2.4.1 (di Fubini). *Sia $f \in L(X_1 \times X_2, d(\mu_1 \times \mu_2))$. Allora*

a) Per μ_2-q.o. $x_2 \in X_2 :\ x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ definisce una funzione in $L(X_1, d\mu_1)$.

b) La funzione definita μ_2-q.o. da $x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1$ definisce una funzione in $L(X_2, d\mu_2)$.

c) Si ha
$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Gli integrali esistono finiti e sono uguali all'integrale
$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right) d\mu_1.$$

Esistono anche versioni per $E \subsetneq X$ misurabile e per $f \geq 0$, ovvero il Teorema di Tonelli.

Capitolo 3

Misure di Hausdorff ed integrazione

In questo capitolo i nostri obiettivi sono sostanzialmete tre:

1. Introdurre una famiglia di misure esterne su $\mathbb{R}^n$ con un parametro *dimensionale* reale e non negativo.

2. Usare queste misure per assegnare una grandezza non banale (finita ma positiva) agli insiemi "sottili" (dimensione minore di n) e "non piatti" (non contenuti in un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$).

3. Sviluppare un calcolo integrale per queste misure e per funzioni definite su insiemi sottili e non piatti.

3.1 Misura esterna di Hausdorff

Cominciamo con la costruzione delle misure esterne di Hausdorff dando le definizioni basilari. Poi passiamo alle prime proprietà e ad una descrizione degli insiemi che risultano essere misurabili. Infine introduciamo il concetto della dimensione di Hausdorff in preparazione per gli elementi di calcolo e per le applicazioni nei prossimi paragrafi.

3.1.1 Costruzione delle misure

La costruzione si articola in tre passi.
Passo 1: (Misure elementari con un parametro dimensionale) Iniziamo con un approssimazione grezza della misura di tutti gli insiemi che è fatta in modo dimensionalmente sensibile. L'idea è di trattare gli insiemi come fossero delle bolle in uno spazio di una certa dimensione. Scegliamo il diametro dell'insieme come un parametro geometricamente significativo per rappresentarlo.

Definizione 3.1.1. Siano $\alpha \geq 0$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiamo le quantità elementari

$$\rho_\alpha(B) := \begin{cases} 0 & B = \emptyset \\ \omega_\alpha r(B)^\alpha & B \neq \emptyset \end{cases}, \tag{3.1.1}$$

dove

$$r(B) = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(B) = \frac{1}{2}\sup\{|x-y| : \ x, y \in B\} \quad \text{il } \textit{raggio di } B$$

$$\omega_\alpha = \frac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} \quad \text{con} \quad \Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt.$$

dove Γ è la funzione gamma di Eulero introdotta in (1.6.5) e per $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = m_n(B_1(0))$ è la misura di Lebesgue della bolla unitaria in $\mathbb{R}^n$ studiata nell'Esempio 1.6.4.

Esempio 3.1.1. Sia $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$. Allora

- $\rho_3(B) = \omega_3 r^3 = \frac{4\pi}{3}r^3 = \mathrm{vol}(B)$.
- $\rho_2(B) = \omega_2 r^2 = \pi r^2 = \mathrm{area}(C)$ dove C è un disco qualsiasi formato dall'intersezione di B con un piano qualsiasi che passa per l'origine.
- $\rho_1(B) = \omega_1 r = 2r = \mathrm{lunghezza}(D)$ dove D è un segmento qualsiasi formato dall'intersezione di B con una retta qualsiasi che passa per l'origine.
- $\rho_0(B) = \omega_0 r^0 = 1$.

Passo 2: (Misure esterne usando ricoprimenti con insiemi di diametro piccolo) Ora raffiniamo l'approssimazione tramite una costruzione di una misura esterna. Consideriamo dei ricoprimenti con al più un'infinità numerabile di insiemi aventi diametro che non supera una certa quota, formiamo le somme delle misure elementari degli insiemi nel ricoprimento e prendiamo l'estremo inferiore rispetto a tutti i ricoprimenti ammissibili.

Definizione 3.1.2. Siano $\delta > 0$ e $A \subset \mathbb{R}^n$. È detto *δ-ricoprimento di A* una collezione al più numerabile $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}, \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$ di insiemi tale che

$$A \subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{K}} B_k \quad \text{e} \quad \mathrm{diam}(B_k) \leq \delta \ \text{ per ogni } \ k \in \mathcal{K}.$$

Definizione 3.1.3. Siano $\alpha \geq 0$ e $\delta > 0$. Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detta *misura esterna di Hausdorff α-dimensionale a livello δ* la quantità

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) := \inf\left\{\sum_{k\in\mathcal{K}} \rho_\alpha(B_k) : \ \{B_k\}_{k\in\mathcal{K}} \ \text{è } \delta\text{-ricoprimento di } A, \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}\right\},$$

dove le funzioni ρ_α sono definite in (3.1.1), cioè

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) := \inf\left\{\sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_\alpha\left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^\alpha : \ \{B_k\}_{k\in\mathcal{K}} \ \text{è } \delta\text{-ricoprimento di } A, \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}\right\}. \tag{3.1.2}$$

Il fatto che $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ è una misura esterna sarà dimostrato fra breve. Semplici esempi indicano che la misura $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ è un'approssimazione per difetto (v. l'Esempio 3.1.2). Quindi rimane ancora un passo da fare.

Passo 3: (Ottimizzazione tramite il limite per $\delta \to 0^+$)

Osservazione 3.1.1 (Monotonia in δ)**.** Siano δ, δ' tali che $0 < \delta' < \delta$. Allora ogni δ'-ricoprimento di A è un δ-ricoprimento di A perchè

$$\operatorname{diam}(B_k) < \delta' \quad \Rightarrow \quad \operatorname{diam}(B_k) < \delta.$$

Quindi al diminuire δ ci sono meno ricoprimenti ammissibili per il calcolo dell'estremo inferiore. Quindi

$$\delta' < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) \le \mathcal{H}_\alpha{}^{(\delta')}(A).$$

Questa monotonia suggerisce la definizione definitiva che cerchiamo.

Definizione 3.1.4. Sia $\alpha \ge 0$. Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detta *misura esterna di Hausdorff α-dimensionale* la quantità

$$\mathcal{H}_\alpha(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A), \tag{3.1.3}$$

dove $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ è definita in (3.1.2).

Riassumendo possiamo dire che la misura esterna $\mathcal{H}_\alpha$ in $\mathbb{R}^n$ è definita da

$$\mathcal{H}_\alpha(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}} \omega_\alpha \left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2} \right)^\alpha \; : \; \{B_k\}_{k \in \mathcal{K}} \text{ è } \delta\text{-ricoprimento di } A, \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

Prima di iniziare lo studio delle proprietà delle misure, consideriamo un semplice esempio del calcolo di $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ per illustrare la monotonia nominata nell'Osservazione 3.1.1.

Esempio 3.1.2. Sia A una curva semplice rettificabile nel piano di lunghezza $L < +\infty$ e diametro $\operatorname{diam}(A) < +\infty$ e tale che $A \subset B$ con B un disco chiuso con diametro $\operatorname{diam}(A)$ (v. la figura 3 su pagina 15 di [3]). Consideriamo δ e δ' tali che

$$0 < \delta' < \operatorname{diam}(A) < \delta.$$

Vogliamo stimare le misure $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A)$ e $\mathcal{H}_\alpha{}^{(\delta')}(A)$ per $\alpha = 0, 1$.

- Il caso $\delta > \operatorname{diam}(A)$: Il δ-ricoprimento ottimale per $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A)$ è $\{B\}$ e quindi

$$\mathcal{H}_0^{(\delta)}(A) = 1 \;\text{ e }\; \mathcal{H}_1^{(\delta)}(A) = \operatorname{diam}(A).$$

Per $\alpha = 0$ questo è ovvio, ogni insieme che viene usato aggiunge 1 alla somma in (3.1.2) e dobbiamo prendere l'estremo inferiore di tali somme. Perché possiamo usare insiemi con diametro diam(A) nel ricoprimento, prendiamo un ricoprimento fatto di un insieme solo $\{B\}$ dove B ha il più piccolo diametro per cui $A \subset B$. Per $\alpha = 1$, se usiamo più insiemi nel ricoprimento conviene che tutti abbiano intersezione non nulla con A e che siano il più possibile due a due disguinti. Ogni insieme in più risulta in un'approssimazione migliore della lunghezza, cioè fa crescere le somme in (3.1.2), ma vogliamo l'estremo inferiore delle somme.

- Il caso $\delta' < \mathrm{diam}(A)$: Un δ'-ricoprimento ottimale per $\mathcal{H}_\alpha{}^{(\delta')}(A)$ è $\{B_k\}_{k=1}^N$ dove ogni B_k è una bolla chiusa di diametro δ' con intersezione non nulla con A e $B_j^\circ \cap B_k^\circ = \emptyset$ per ogni $j \neq k$. Quindi

$$\mathcal{H}_0^{(\delta')}(A) = N > 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1^{(\delta')}(A) = N\delta' > \mathrm{diam}(A).$$

Per $\alpha = 0$ questo è ovvio. Vogliamo minimizzare il numero di insiemi B_k usati nel ricoprimento. Per $\alpha = 1$, se usiamo insiemi di diametro più piccolo di δ' abbiamo un'approssimazione migliore della lunghezza come nel caso sopra. Quindi per il ricoprimento conviene prendere una catena finita di bolle chiuse di diametro δ'.

Osservazione 3.1.2. Riassumendo possiamo dire che l'idea della costruzione di $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A)$ è di seguire la geometria locale di A tramite dei δ-ricoprimenti sempre più fini ed assegnare una misura dimensionalmente rilevante ad ogni pezzo dell'approssimazione.

3.1.2 Prime proprietà

Cominciamo con il dimostrare che $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ e $\mathcal{H}_\alpha$ sono davvero delle misure esterne su $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.1 (Misure esterne)**.** *Siano $\alpha \geq 0$ e $\delta > 0$. Allora*

(a) $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{H}_\alpha$ è una misura esterna metrica su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Controlliamo le definizioni di misura esterna e misura esterna metrica del paragrafo 2.2.

(a) $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$.

La normalizzazione (ME_1): La collezione $\{B\} = \{\emptyset\}$ è un δ-ricoprimento di $A = \emptyset$ con $\rho_\alpha(\emptyset) = 0$ per ogni $\alpha \geq 0$, quindi

$$\inf\left\{\sum_{k\in\mathcal{K}} \rho_\alpha(B_k) : \ \{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}\delta - \text{ricoprimento}\right\} \leq \rho_\alpha(\emptyset) = 0.$$

La monotonia (ME_2): Se $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ è un δ-ricoprimento di B, allora è un δ-ricoprimento di A, quindi abbiamo la proprietà (ME_2) per la definizione di $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$.

La subadditività (ME_3): WLOG $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A_k) < +\infty$ per ogni k. Quindi per ogni $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$ esiste un δ-ricoprimento $\{B_k^{(j)}\}_{j\in J_k \subset \mathbb{N}}$ di A_k t.c.

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} > \sum_{j\in J_k} \rho_\alpha \left(B_k^{0(j)}\right).$$

Ora $\left\{B_k^{(j)}\right\}_{j\in J_k, k\in N}$ è un δ-ricoprimento di $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathcal{J}_k} \rho_\alpha \left(B_k^{(j)}\right)\right) \\
&< \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A_k) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

ma $\varepsilon.0$ è arbitrario.

(b) $\mathcal{H}_\alpha$ è una misura esterna metrica su $\mathbb{R}^n$.

(ME_1): Dalla parte (a) abbiamo $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = 0$ per ogni $\delta > 0$ e quindi

$$\mathcal{H}_\alpha(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = 0.$$

(ME_2): Dalla parte (a) abbiamo $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) \leq \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(B)$ per ogni $\delta > 0$. Basta ora prendere il limite per $\delta \to 0^+$.

(ME_3): Dalle parte (a) abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A_k) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\alpha(A_k) \quad \left(\mathcal{H}_\alpha = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}\right).
\end{aligned}$$

Basta ora prendere il limite per $\delta \to 0^+$.

La proprietà metrica $\mathrm{dist}(A, B) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}_\alpha(A \cup B) = \mathcal{H}_\alpha(A) + \mathcal{H}_\alpha(B)$: La disuguaglianza $\leq$ segue dalla subadditività di $\mathcal{H}_\alpha$, quindi serve mostrare solo la disuguaglianza apposta dove WLOG $\mathcal{H}_\alpha(A \cup B) < +\infty$ e quindi anche $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) <= \infty$ per ogni $\delta > 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e δ t.c.

$$0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B).$$

Esiste un δ-ricoprimento $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di $A \cup B$ t.c.

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \varepsilon > \sum_{k\in\mathcal{K}} \rho_\alpha(B_k).$$

Poichè $\delta < \mathrm{dist}(A, B)$ gli insiemi B_k non possono avere intersezione non banale con tutte e due gi insiemi A e B; cioè definendo

$$\mathcal{K}' = \{k \in \mathcal{K} : B_k \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \mathcal{K}'' = \{k \in \mathcal{K} : B_k \cap B \neq \emptyset$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \varepsilon &> \sum_{k\in\mathcal{K}'} \rho_\alpha(B_k) + \sum_{k\in\mathcal{K}''} \rho_\alpha(B_k) \\ &\geq \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) + \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(B).\end{aligned}$$

Basta ora prendere il limite per $\delta \to 0^+$ e usare $\varepsilon > 0$ arbitrario.

□

Corollario 3.1.1. *Per ogni $\alpha \geq 0$, gli insiemi di Borel sono $\mathcal{H}_\alpha$-misurabili e $\mathcal{H}_\alpha \big|_{\mathcal{M}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$ è una misura di Borel completa dove $\mathcal{M}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili rispetto a $\mathcal{H}_\alpha$.*

Dimostrazione. Il risultato è una conseguenza immediata del Teorema 3.1.1 (b). □

Teorema 3.1.2 (Regolarità esterna di $\mathcal{H}_\alpha$)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Per ogni $\alpha \geq 0$ fissato, esiste un insieme di Borel B tale che*

$$A \subset B \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_\alpha(A) = \mathcal{H}_\alpha(B).$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio (v. il Teorema 2.1.7 di [3]). □

Corollario 3.1.2 (Teorema di struttura)**.** *Sia $E \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{H}_\alpha(E) < +\infty$. Allora esistono B boreliano e Z con $\mathcal{H}_\alpha(Z) = 0$ tali che $E = B \setminus Z$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 3.1.2 esiste B boreliano con $E \subseteq B$ tale che $\mathcal{H}_\alpha(B) = \mathcal{H}_\alpha(E)$. Poniamo $Z := B \setminus E = B \cap E^c$ e abbiamo Z è $\mathcal{H}_\alpha$-misurabile e

$$\begin{cases} \mathcal{H}_\alpha(Z) = \mathcal{H}_\alpha(B) - \mathcal{H}_\alpha(E) = 0 \\ E = B \setminus Z \end{cases}$$

□

Osservazione 3.1.3 (Insiemi di misura nulla)**.** Sapere quando $\mathcal{H}_\alpha(Z) = 0$ è utile per:

i) il teorema di struttura (v. il Teorema 3.1.2);

ii) le proprietà valide $\mathcal{H}_\alpha$- quasi ovunque.

Ci sono almeno due metodi per stabilire se $\mathcal{H}_\alpha(Z) = 0$.

1. Usare la definizione, sfruttando $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta^*)}$ con δ^* opportuno.

2. Sfruttare il concetto della *dimensione di Hausdorff*.

Il primo metodo per mostrare che un insieme ha misura $\mathcal{H}_\alpha$ nulla è illustrato dal seguente risultato.

Teorema 3.1.3 (Criterio per $\mathcal{H}_\alpha(A) = 0$)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se esiste $\delta^* \in (0, +\infty)$ tale che ${\mathcal{H}_\alpha}^{(\delta^*)}(A) = 0$ allora $\mathcal{H}_\alpha(A) = 0$.*

Dimostrazione. Separiamo il caso $\alpha = 0$ dal caso $\alpha > 0$.

Caso 1: ($\alpha = 0$) Abbiamo $A = \emptyset$ in questo caso. Per assurdo, se $\mathcal{H}_0^{(\delta^*)}(A) = 0$ con $A \neq \emptyset$ allora

$$0 = \inf\left\{\sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_0 \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^0 : \quad \{B_k\}_{k\in\mathcal{K}} \text{ è } \delta^*\text{-ricoprimento di } A, \mathcal{K} \subset \mathbb{N}\right\}$$

ma ogni termine della somma vale 1 e dunque

$$0 = \inf\{\mathrm{card}(\mathcal{K}) : \quad \{B_k\}_{k\in\mathcal{K}} \text{ è } \delta^*\text{-ricoprimento di } A, \mathcal{K} \subset \mathbb{N}\} \geq 1.$$

Questo è assurdo. Quindi se ${\mathcal{H}_\alpha}^{(\delta^*)}(A) = 0$ per qualche δ^* allora $A = \emptyset$ e

$$\mathcal{H}_\alpha(A) = 0 = \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) \ \text{ per ogni } \delta > 0.$$

Caso 2: ($\alpha > 0$) Sia $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta^*)}(A) = 0$ con $A \neq \emptyset$.

- Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste un δ^*-ricoprimento $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di A tale che

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_\alpha \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^\alpha \leq \varepsilon \quad (0 = {\mathcal{H}_\alpha}^{(\delta^*)}(A) \ \text{ che è l'inf su tutti i } \delta^*\text{-risoprimenti}) \\
&\Rightarrow \quad \omega_\alpha \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^\alpha \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } k \in K \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{diam}(B_k) \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{\omega_\alpha}\right)^{1/\alpha} := \delta(\varepsilon) \quad \text{per ogni } k \in K \\
&\Rightarrow \quad \{B_k\}_{k\in\mathcal{K}} \quad \text{è un } \delta(\varepsilon)\text{-ricoprimento di } A \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq {\mathcal{H}_\alpha}^{(\delta(\varepsilon))}(A) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

- Facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo $\delta(\varepsilon) \to 0^+$ e $0 \leq \mathcal{H}_\alpha(A) \leq 0$.

□

Il secondo metodo per mostrare che un insieme ha misura $\mathcal{H}_\alpha$ nulla è illustrato dalla prima affermazione del seguente risultato.

Teorema 3.1.4. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$

a) $\mathcal{H}_\alpha(A) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\alpha+t}(A) = 0$ *per ogni* $t > 0$;

b) $\mathcal{H}_\alpha(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\beta(A) = +\infty$ *per ogni* $\beta \in [0, \alpha)$.

Dimostrazione.

a) WLOG $A \neq \emptyset$. Siano $\delta > 0, t > 0$ e $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ un δ-ricoprimento di A, tutti arbitrari. Usando la definzione di $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) &\leq \sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_{\alpha+t}\left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^{\alpha+t} \\
&\leq \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha}\left(\frac{\delta}{2}\right)^t \sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_\alpha\left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^{\alpha} \\
&:= c_{\alpha,t}\delta^t \sum_{k\in\mathcal{K}} \rho_\alpha(B_k).
\end{aligned}$$

Prendendo l'estremo inferiore su tutti i δ-ricoprimenti di A abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) &\leq c_{\alpha,t}\delta^t\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) \\
&\leq c_{\alpha,t}\delta^t\mathcal{H}_\alpha(A) \quad (\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)} \leq \mathcal{H}_\alpha \ \ \forall\, \delta > 0).
\end{aligned}$$

Poi facendo tendere $\delta \to 0^+$ otteniamo

$$0 \leq \mathcal{H}_{\alpha+t}(A) \leq 0,$$

perchè $\delta^t \to 0^+$ per $\delta \to 0^+$ se $t > 0$.

b) Per assurdo, se esistesse $\beta < \alpha$ tale che $\mathcal{H}_\beta(A) < +\infty$ allora per la parte a) avremmo

$$\mathcal{H}_{\beta+t}(A) = 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

e con $t = \alpha - \beta > 0$ avremmo $\mathcal{H}_\alpha(A) = 0$, ma questo è assurdo.

$\square$

3.1.3 Dimensione di Hausdorff

Il teorema precedente mostra che la seguente definizione di dimensione è naturale.

Definizione 3.1.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La *dimensione di Hausdorff di A* è il numero reale non negativo

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \geq 0 : \ \mathcal{H}_s(A) = 0\}. \tag{3.1.4}$$

Osservazione 3.1.4. Se $0 < \mathcal{H}_\alpha(A) < +\infty$ per qualche $\alpha \geq 0$ allora $\alpha = \dim_{\mathcal{H}}(A)$. Infatti basta combinare la defnzione di $\dim_{\mathcal{H}}$ con il Teorema 3.1.4. Fra tutti i valori delle misure esterne $\mathcal{H}_s(A)$ possiamo avere al più un valore non banale (positivo e finito) e se succede questo, allora $s = \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Adesso consideriamo qualche esempio per illustrare la defnzione.

Esempio 3.1.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ al più numerabile. Allora

a) $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$

b)

$$\mathcal{H}_\alpha(A) = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ \operatorname{card}(A) & \alpha = 0 \end{cases}$$

- Sia $A = \{a\}$ con $a \in \mathbb{R}^n$. Allora la bolla $B_{\delta/2}(a)$ è un δ-ricoprimento di $\{a\}$ per ogni $\delta > 0$. Quindi

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(\{a\}) \leq \omega_\alpha(\delta/2)^\alpha \quad \text{per ogni } \delta > 0. \tag{3.1.5}$$

  - Se $\alpha > 0$ prendiamo il limite per $\delta \to 0^+$ in (3.1.5) ed otteniamo $\mathcal{H}_\alpha(\{a\}) = 0$.
  - Se invece, $\alpha = 0$, la formula (3.1.5) ci dice che $\mathcal{H}_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq 1$. Inoltre per ogni δ-ricomprimento $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di $\{a\}$ abbiamo

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \rho_0(B_k) = \operatorname{card}(\mathcal{K}) \geq 1$$
$$\Rightarrow \ \mathcal{H}_0^{(\delta)}(\{a\}) = 1, \quad \forall\delta > 0$$
$$\Rightarrow \ \mathcal{H}_0(\{a\}) = 1 = \operatorname{card}(\{a\}).$$

- Sia $A = \{a_j\}_{j\in J}$ con $J \subseteq \mathbb{N}$ e $a_j \neq a_k$ per $j \neq k$. Allora A è boreliano e quindi è $\mathcal{H}_\alpha$-misurabile per ogni $\alpha \geq 0$. Quindi

$$\mathcal{H}_\alpha\left(\bigcup_{j\in J}\{a_j\}\right) = \sum_{j\in J} \mathcal{H}_\alpha(\{a_j\}) = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ \operatorname{card}(A) & \alpha = 0 \end{cases}$$

Osservazione 3.1.5. L'esempio anche mostra che $\mathcal{H}_0$ è la misura esterna del conteggio.

Esempio 3.1.4. Sia $\Gamma = \gamma(I)$ il sostegno di una curva rettificabile $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. Allora

$$\mathcal{H}_\alpha(\Gamma) = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 1.$$

- Da Analisi 3 sappiamo che la lunghezza $l(\Gamma)$ è ben definita e soddisfa $0 < l(\Gamma) < +\infty$.
- Fissato $\delta > 0$, ricopriamo Γ con bolle chiuse $\overline{B}_{\delta/2}(p_k) := B_k$ centrate in $p_k \in \Gamma$ tali che $B_k^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$ per $k \neq j$.
- Possiamo ricoprire Γ usando un numero di palle pari a $\left[\frac{L}{\delta}\right] + 1 := N(\delta)$. Stimando $\mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A)$ dall'alto con questo δ-ricoprimento otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A) &\leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \omega_\alpha \left(\frac{\operatorname{diam}(B_K)}{2}\right)^\alpha = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \omega_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha \\ &\leq \omega_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha \left(\left[\frac{L}{\delta}\right] + 1\right) \leq C_1 \delta^{\alpha-1} + C_2 \delta^\alpha. \end{aligned}$$

  Faccendo tendere $\delta \to 0^+$ ottenaimo $0 \leq \mathcal{H}_\alpha(A) \leq 0$.

Osservazione 3.1.6. In realtà vedremo che $\dim_{\mathcal{H}}(\Gamma) = 1$ e che ci sono delle formule integrali per calcolare $\mathcal{H}_1(\Gamma)$.

Esempio 3.1.5. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $\mathcal{H}_\alpha(A) = 0$ per ogni $\alpha > n$. In particolare $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) \leq n$.

- Prendiamo $Q \subset \mathbb{R}^n$ il cubo compatto di lato 1. Decomponiamo Q in k^n cubi di lato $\frac{1}{k}$ e diametro $\frac{\sqrt{n}}{k}$. Questa collezione di cubi è un δ-ricoprimento di Q con $\delta = \sqrt{n}/k$ e quindi

$$0 \leq \mathcal{H}_\alpha{}^{(\sqrt{n}/k)}(Q) \leq \sum_{i=1}^{k^n} \omega_\alpha \left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)^\alpha = \omega_\alpha n^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{k^{\alpha-n}} \to 0,$$

  per $k \to +\infty$ se $\alpha - n > 0$. Quindi $\mathcal{H}_\alpha(Q) = 0$ se $\alpha > n$.
- Scriviamo $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k$ dove Q_k sono cubi compatti con centro in un punto con coordinate razionali, ad esempio. Lo stesso argomento usato in precedenza mostra che $\mathcal{H}_\alpha(Q_k) = 0$ per ogni k. Per subadditività abbiamo

$$0 \leq \mathcal{H}_\alpha(\mathbb{R}^n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(Q_k) = 0.$$

Osservazione 3.1.7. In realtà $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) = n$. Inoltre vedremo che:

a) $\mathcal{H}_n = m_n^*$ (la misura esterna di Lebesgue) in $\mathbb{R}^n$;

b) $\mathcal{H}_\alpha$ è invariante per traslazioni, rotazioni ed altre isometrie di $\mathbb{R}^n$;

c) si può calcolare $\dim_{\mathcal{H}}$ di insiemi geometrici come curve, grafici di funzioni ed insiemi di livello sfruttando delle ipotesi opportune di regolarità degli insiemi.

3.2 Confronto fra $\mathcal{H}_n$ e m_n^* in $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo dimostriamo che le misure n-dimensionali di Hausdorff e Lebesgue sono uguali in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{H}_n(A) = m_n^*(A)$.*

Prima di iniziare la dimostrazione facciamo qualche osservazione per orientarci.

1. Ovviamente basta mostrare le due disuguaglianze:

$$\mathcal{H}_n(A) \leq m_n^*(A) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.2.1}$$

$$m_n^*(A) \leq \mathcal{H}_n(A) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{3.2.2}$$

2. Non è difficile mostrare le disuguaglianze più deboli:

$$\mathcal{H}_n(A) \leq \omega_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n m_n^*(A) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.2.3}$$

$$m_n^*(A) \leq 2^n \mathcal{H}_n(A) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{3.2.4}$$

   In un'esercitazione precedente, abbiamo già visto una versione di (3.2.4) per $n = 2$.

3. Per migliorare le stime grezze useremo due strumenti potenti, ovvero
   - il *lemma di ricoprimento di Besocovitch* per migliorare la stima (3.2.3);
   - la *disuguaglianza isodimetrica* per migliorare la stima (3.2.4)

Dimostrazione.
Passo 1: Ottenere la stima (3.2.3)

1. WLOG $m_n^*(A) < +\infty$.

2. Usando $m_n^*(A) < +\infty$ e l'equivalenza del Lemma 1.7.1, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento di Lebesgue $\{Q_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ di cubi compatti tale che

$$A \subset \bigcup_{k\in\mathcal{K}} Q_k \quad \text{e} \quad m_n^*(A) + \varepsilon > \sum_{k\in\mathcal{K}} m_n(Q_k). \tag{3.2.5}$$

Per ogni $\delta > 0$ fissato, facendo un numero al più numerabile di suddivisioni dei Q_k possiamo assumere che

$$\operatorname{diam}(Q_k) \leq \delta. \tag{3.2.6}$$

Combinando (3.2.5) e (3.2.6) abbiamo che $\{Q_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ è un δ-ricoprimento di A e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^{(\delta)}(A) &\leq \sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(Q_k)}{2}\right)^n = \omega_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \sum_{k\in\mathcal{K}} m_n(Q_k) \\ &< \omega_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \left[m_n^*(A) + \varepsilon\right]. \end{aligned}$$

3. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mathcal{H}_n^{(\delta)}(A) \leq \omega_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n m_n^*(A).$$

Facendo tendere $\delta \to 0^+$ otteniamo

$$\mathcal{H}_n(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}_n^{(\delta)}(A) \leq \omega_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n m_n^*(A).$$

Passo 2: Notare che $m_n^*(A) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}_n(A) = 0$.
Infatti quest'affermazione segue immediatamente da (3.2.3).

Passo 3: Dimostrare la disuguaglianza (3.2.1).

1. WLOG $m_n^*(A) < +\infty$.

2. Ricordiamo che m_n^* è *regolare* nel senso che per ogni A con $m_n^*(A) < +\infty$ dato $\varepsilon > 0$ esiste Ω aperto tale che

$$A \subseteq \Omega \quad \text{e} \quad m_n(\Omega) < m_n^*(A) + \varepsilon < +\infty.$$

3. Ora enunciamo il risultato necessario per completare la stima.

Lemma 3.2.1 (di ricoprimento di Besocovitch)**.** *Sia Ω aperto con $m_n(\Omega) < +\infty$. Allora per ogni $\delta > 0$ esistono*

$$\begin{cases} Z \quad \textit{tale che} \quad m_n^*(Z) = 0 \\ \{B_k\}_{k\in\mathcal{K}} \quad \textit{bolle aperte due a due disgiunte con } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta \end{cases}$$

tali che

$$\Omega = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) \cup Z.$$

Dimostrazione. Facoltativo (v. il Teorema A.1 del paragrafo 5.6 di [L1]). □

4. Stimando otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_n^{(\delta)}(A) &\leq \mathcal{H}_n^{(\delta)}(\Omega) && \text{(monotonia)} \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n^{(\delta)}(B_k) + \mathcal{H}_n^{(\delta)}(Z) && \text{(subadditività)} \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_n \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2} \right)^n + \mathcal{H}_n(Z) && \text{(definizioni di } \mathcal{H}_n^{(\delta)} \text{ e } \mathcal{H}_n) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_n(B_k) && \text{(Passo 2, } B_k \text{ è una bolla)} \\
&= m_n \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = m_n(\Omega \setminus Z) && \text{(additività)} \\
&= m_n(\Omega) \setminus m_n(Z) = m_n(\Omega) \\
&< m_n^*(A) + \varepsilon && \text{(definizione di } \Omega)
\end{aligned}$$

ma ε è arbitrario. Quindi abbiamo $\mathcal{H}_n^{(\delta)}(A) \leq m_n^*(A)$ e facendo tendere $\delta \to 0^+$ otteniamo

$$\mathcal{H}_n(A) \leq m_n^*(A).$$

Passo 4: Dimostrare la disuguaglianza (3.2.2).

1. WLOG $\mathcal{H}_n(A) < +\infty$.

2. Siano $\delta > 0$ arbitrario e $\{A_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ un δ-ricoprimento arbitrario di A. Per la subadditività abbiamo

$$m_n^*(A) \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} m_n^*(A_k). \tag{3.2.7}$$

Osservazione 3.2.1. Stime elementari forniscono la stima debole (3.2.4). Anche se non è necessario per la dimostrazione, indichiamo come si fa. Abbiamo

$$A_k \subset B_{\mathrm{diam}(A_k)}(p_k) \quad \text{per ogni } p_k \in A_k, \tag{3.2.8}$$

ma in generale

$$A_k \not\subseteq B_{r(A_k)}(p_k) \quad \text{per qualche } p_k \in A_k. \tag{3.2.9}$$

Infatti, basta pensare a $A_k = B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ con $0 < \varepsilon < r$. Usando (3.2.8) otteniamo

$$\begin{aligned} m_n^*(A) &\leq \sum_{k \in \mathcal{K}} m_n(B_{\mathrm{diam}(A_k)}(p_k)) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \omega_n (\mathrm{diam}(A_k))^n \\ &= 2^n \sum_{k \in \mathcal{K}} \omega_n \left(\frac{\mathrm{diam}(A_k)}{2} \right)^n . \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo interiore rispetto a tutti i δ-ricoprimenti di A otteniamo

$$m_n^*(A) \leq 2^n \mathcal{H}_n^{(\delta)}(A),$$

e poi otteniamo la stima debole (3.2.4) facendo tendere $\delta \to 0^+$.

Però vogliamo la stima forte (3.2.2).

3. Enunciamo il risultato che ci servirà per la stima forte.

Lemma 3.2.2 (disuguaglianza isodiametrica)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora*

$$m_n^*(A) \leq \omega_n \left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2} \right)^n , \tag{3.2.10}$$

con uguaglianza se $A = B_r(x_0)$ una bolla.

Dimostrazione. Non lo dimostriamo, ma notiamo che una dimostrazione possibile sfrutta la *simmetrizzazione di Steiner*, v. ad esempio il libro [EG]. Notiamo inoltre che la disuguaglianza vale nonostante l'osservazione nella formula (3.2.9). □

Usando la disuguaglianza isodiametrica (3.2.10) e la subadditività (3.2.7) abbiamo

$$m_n^*(A) \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} \omega_n \left(\frac{\mathrm{diam}(A_k)}{2} \right)^n .$$

Ora prendendo l'estremo inferiore rispetto ai δ-ricoprimenti di A otteniamo

$$m_n^*(A) \leq \mathcal{H}_n^{(\delta)}(A),$$

e poi facendo tendere $\delta \to 0^+$ otteniamo

$$m_n^*(A) \leq \mathcal{H}_n(A).$$

□

Concludiamo questo paragrafo notando che l'uguaglianza fra le misure esterne di Hausdorff e Lebesgue n-dimensionale sarà usata frequentamente nel seguito. In particolare, per la misurabilità di insiemi, la misurabilità di funzioni e l'integrabilità di funzioni rispetto a $\mathcal{H}_n$ in $\mathbb{R}^n$ valgono le stesse affermazioni fatte nel caso della misura di Lebesgue.

3.3 Misura di Hausdorff e mappe lipschitziane

Obiettivo: Stimare $\mathcal{H}_\alpha(f(A))$ se $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ è una funzione lipschitziana per poi:

1. trovare delle invarianze di $\mathcal{H}_\alpha$;
2. trattare il calcolo integrale di $\mathcal{H}_\alpha$.

Iniziamo richiamando il concetto di una funzione lipschitziana.

Definizione 3.3.1. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ è detta *lipschitziana in A* se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall\, x, y \in A. \tag{3.3.1}$$

L è detta *costante di Lipschitz per f* e scriviamo $f \in \mathrm{Lip}(A, \mathbb{R}^n)$.

N.B. Il costante migliore in (3.3.1) è per definizione $\inf\{L : \text{ vale (3.3.1)}\}$ ed è il numero

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(A,\mathbb{R}^n)} := \sup_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Il risultato principale di questo paragrafo è il seguente teorema.

Teorema 3.3.1. *Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ è lipschitziana in A con costante di Lipschitz L allora*

$$\mathcal{H}_\alpha(f(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}_\alpha(A) \quad \forall\, \alpha \geq 0. \tag{3.3.2}$$

Dimostrazione. Si stima in modo elementare.

1. Basta mostrare che: per ogni $\alpha \geq 0$ e per ogni $\delta > 0$ si ha

   $$(*) \quad \mathcal{H}_\alpha^{(L\delta)}(f(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}_\alpha^{(\delta)}(A), \;\; \forall\, A \neq \emptyset.$$

   Infatti, prendendo poi il limite per $\delta \to 0^+$ si ottiene la tesi.

2. Per ogni $B \subseteq A$ si ha

   $$\mathrm{diam}(f(B)) := \sup_{x,y\in B} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x,y\in B} [L|x - y|] := L\,\mathrm{diam}(B).$$

3. Sia $\{B_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ un δ-ricoprimento di A con $B_k \subseteq A$ per ogni k. Allora

$$\{f(B_k)\}_{k\in\mathcal{K}} \text{ è un } (L\delta)\text{-ricoprimento di } f(A)$$

e quindi

$$\mathcal{H}_\alpha^{(L\delta)}(f(A)) \le \sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_\alpha \left(\frac{\operatorname{diam}(f(B_k))}{2}\right)^\alpha \le L^\alpha \sum_{k\in\mathcal{K}} \omega_\alpha \left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^\alpha .$$

Ora prendendo l'inf rispetto alla collezione di δ-ricoprimenti di A otteniamo la stima $(*)$.

□

Una classe di mappe lipschitziane particolarmente importante è quella delle isometrie. Saranno queste mappe che forniscono delle invarianze per le misure di Hausdorff.

Definizione 3.3.2. Una mappa $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è detta *isometria* se lascia invariata la distanza euclidea, ovvero

$$|F(x) - F(y)| = |x - y|. \tag{3.3.3}$$

N.B. Spesso si assume che un isometria è una biezione, ma nel caso dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ la biettività è conseguenza della proprietà (3.3.3). Ricordiamo qualche proprietà nota.

Proposizione 3.3.1. *Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria. Allora*

a) F è biettiva, quindi invertibile.

b) La sua funzione inversa F^{-1} è anche un'isometria.

c) Le funzioni F, F^{-1} sono lipschitziane con costante di Lipschitz $L = 1$.

Dimostrazione. Tranne la suriettività della parte a), le proprietà sono facili da dimostrare.

a) Per l'iniettività basta notare che la proprietà (3.3.3) implica

$$|F(x) - F(y)| = 0 \ \Rightarrow |x - y| = 0.$$

Per la suriettività, esistono diversi dimostrazioni. Una è topologica dove si nota che (3.3.3) implica che F è continua e quindi l'immagine $\mathcal{R} = F(\mathbb{R}^n)$ è *connesso*. Essendo $\mathcal{R}$ e non vuoto, dovrebbe essere tutto $\mathbb{R}^n$ se è aperto e chiuso. È facile mostrare che

$$z_k = F(x_k) \in \mathcal{R},\ z_k \to z \ \Rightarrow \ z = F(x) \in \mathcal{R}, \ \text{ per qualche } x \in \mathbb{R}^n,$$

e quindi $\mathcal{R}$ è chiuso. Infatti, $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy (è convergente) e la proprietà (3.3.3) mostra che $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy e quindi esite

$x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_k \to x$. Per la continuità di F abbiamo anche $z_k = F(x_k) \to F(x)$ e per l'unicità del limite $z = F(x)$. Il fatto che $\mathcal{R}$ è aperto significa

$$z = F(x) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \exists\, B_r(z) \subset \mathcal{R}.$$

Lasciamo quest'affermazione come esercizio.

Un altra dimostrazione è fornita dal fatto che ogni isometria F di $\mathbb{R}^n$ è *affine*; cioè esiste $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare ed *ortogonale* tale che

$$F(x) = F(0) + Tx.$$

La suriettività di F segue facilmente (v. il Corollario 3.3.2 per dettagli).

b) Siano $x = F^{-1}(v)$ e $y = F^{-1}(w)$ abbiamo $v = F(x)$ e $w = F(y)$ e quindi

$$|F^{-1}(v) - F^{-1}(w)| = |x - y| = |F(x) - F(y)| = |v - w|.$$

c) La lipschizianità con $L = 1$ segue direttamente dalla proprietà (3.3.3).

□

Corollario 3.3.1. *Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria. Allora*

$$\mathcal{H}_\alpha(F(A)) = \mathcal{H}_\alpha(A) \quad \forall\, \alpha \geq 0, \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Le mappe F, F^{-1} soddisfano la stima (3.3.2) con costante di Lipschitz $L = 1$. Quindi

$$\mathcal{H}_\alpha((F(A)) \leq \mathcal{H}_\alpha(A) = \mathcal{H}_\alpha(F^{-1}(F(A))) \leq \mathcal{H}_\alpha(F(A)).$$

□

Corollario 3.3.2 (Isometrie affini)**.** *Sono isometrie di $\mathbb{R}^n$ le mappe:*

a) le traslazioni definite da $F(x) = \tau_a(x) = x + a$ con $a \in \mathbb{R}^n$ fisso;

b) le trasformazioni ortogonali definite da $F(x) = Tx$ con $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare tale che $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che $[T]^t[T] = [T][T]^t = I$ se $[T]$ è la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

In particolare, tutte le misure di Hausdorff sono invarianti rispetto alle traslazioni e alle trasformazioni ortogonali.

Dimostrazione. Le affermazioni a) e b) sono note dai corsi di Geometria. Quindi basta applicare il Corollario 3.3.1 per ottenere le invarianze. □

Corollario 3.3.3. *Siano $\lambda > 0$ e $\delta_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la dilatazione di ampiezza λ definita da $\delta_\lambda(x) = \lambda x$. Allora*

$$\mathcal{H}_\alpha(\delta_\lambda(A)) = \lambda^\alpha \mathcal{H}_\alpha(A) \quad \forall\, \alpha \geq 0, \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Abbiamo $|\delta_\lambda(x) - \delta_\lambda(y)| = |\lambda(x-y)| = \lambda|x-y|$. Quindi δ_λ è lipschitziana con costante di Lipschitz $L = \lambda$. Inoltre

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(x) = z \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda x = z \quad \Leftrightarrow \quad x = \lambda^{-1} z \\ &\Leftrightarrow \quad x = \delta_{\lambda^{-1}}(z), \end{aligned}$$

ovvero $\delta_\lambda^{-1} = \delta_{\lambda^{-1}}$. Quindi per ogni $\alpha \geq 0$ e per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha(\delta_\lambda(A)) &\leq \lambda^\alpha \mathcal{H}_\alpha(A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}_\alpha(\delta_{\lambda^{-1}} \circ \delta_\lambda((A))) \\ &\leq \lambda^\alpha \lambda^{-\alpha} \mathcal{H}_\alpha(\delta_\lambda(A)) = \mathcal{H}_\alpha(\delta_\lambda(A)). \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.3.1. Altre mappe lipschitziane sono:

a) $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ lineare qualsiasi. La sua costante di Lipschitz è $L = \|T\|$ dove

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Tx|}{|x|} = \max_{|x|=1} \frac{|Tx|}{|x|}.$$

b) $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con Ω aperto convesso tale che

$$\sup_{x \in \Omega} \|J_f\| < +\infty. \tag{3.3.4}$$

Infatti basta applicare il teorema di Lagrange per vedere che la quantità in (3.3.4) è una costante di Lipschitz per f.

c) Per ogni $x \in \Omega$ abbiamo una stima come (3.3.4) in un intorno convesso di x. Quindi possiamo dire che $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è sempre *localmente Lipschitz*.

3.4 Calcolo integrale della misura di Hausdorff

Obiettivo: Fornire delle formule per calcolare $\mathcal{H}_\alpha(E)$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tramite integrali di Lebesgue. I passi saranno due.

1. Trattare degli insiemi detti *piatti* ovvero contenuti in qualche sottospazio lineare. Per questo sfrutteremo

   a) l'uguaglianza $\mathcal{H}_p = m_p^*$ in $\mathbb{R}^p$ per ogni $p = 1, \ldots, n$;

b) le invarianze di $\mathcal{H}_p$ rispetto alle traslazioni e trasformazioni ortogonali;

2. Trattare degli insiemi non necessariamente piatti. Per questo sfrutteremo

c) delle *parametrizzazioni* che "appiattiscono" l'insieme E e forniscono almeno delle espressioni locali;

d) un processo di *globalizzazione* attraverso il concetto di una *partizione dell'unità*.

3.4.1 Il caso di insiemi piatti

Come primo risultato, enunciamo una semplice conseguenza della equivalenza di $\mathcal{H}_n$ e m_n^*.

Teorema 3.4.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{H}_n$-misurabile. Allora*

$$\mathcal{H}_n(E) = \int_E dm_n = \int_E d\mathcal{H}_n.$$

Dimostrazione. Abbiamo $\mathcal{H}_n(E) = m_n(E)$ se E è $\mathcal{H}_n$-misurabile perché $\mathcal{H}_n(A) = m_n^*(A)$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $\square$

Notiamo che questo risultato ci dice qualcosa di non banale per E con $\dim_{\mathcal{H}}(E) = n$. Per insiemi con dimensione minore di n, ci servirà la seguente definizione.

Definizione 3.4.1. Sia $p \in \mathbb{N}$ con $1 \le p \le n$. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *p-piatto* se A è contenuto in uno sottospazio vettoriale di dimensione p, cioè se esiste una mappa $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ lineare tale che $A \subset T(\mathbb{R}^p)$.

Notiamo che $\dim_{\mathcal{H}}(A) \le p$. Posto $B = T^{-1}(A) = \{u \in \mathbb{R}^p : Tu \in A\}$ affermiamo che

$$\mathcal{H}_p(A) \approx m_p^*(B)$$

dove il fattore di proporzionalità è determinato da T.

Teorema 3.4.2. *Sia $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ lineare ed <u>iniettiva</u> con $1 \le p \le n$. Sia $B \subseteq \mathbb{R}^p$ un insieme m_p-misurabile. Allora*

$$\mathcal{H}_p(T(B)) = J_T m_p(B) = \int_B J_T \, dm_p, \tag{3.4.1}$$

dove

$$J_T = \sqrt{\det([T]^t[T])}, \tag{3.4.2}$$

il determinante jacobiano di T e $[T]$ è la matrice di T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^n$.

Prima della dimostrazione facciamo alcune osservazoni.

Osservazione 3.4.1. (Il ruolo di iniettività) Se T fosse non iniettiva, allora il nucleo di T avrebbe dimensione $k \geq 1$ e $T(\mathbb{R}^p)$ sarebbe uno spazio vettoriale di dimensione $p - k$. Quindi, la misura naturale da considerare sarebbe $\mathcal{H}_{p-k}$. D'altre parte, la formula (3.4.1) continuerebbe a valere, ma in modo banale.

Osservazione 3.4.2. (Cambiamento di misura per mappe lineari)

a) Nel caso $p = n$ sappiamo che $\mathcal{H}_n(T(B)) = m_n(T(B))$. Quindi il risultato è la formula di cambiamento di misura per diffeomorfismi lineari. Infatti in tal caso $[T]^t$ e $[T]$ sono matrici $n \times n$ e abbiamo

$$J_T = \sqrt{\det([T]^t[T])} = |\det[T]|,$$

come nel Teorema 1.7.1.

b) In tutti i casi sappiamo che la m_p-misurabilità di $B \subseteq \mathbb{R}^p$ è equivalente alla $\mathcal{H}_p$-misurabilità di B e che $\mathcal{H}_p(B) = m_p(B)$. Quindi possiamo anche scrivere la formula (3.4.1) come una formula di cambiamento della misura $\mathcal{H}_p$ per diffeomorfismi lineari

$$\mathcal{H}_p(T(B)) = J_T \mathcal{H}_p(B) \quad \text{per ogni } B \subseteq \mathbb{R}^p\ \mathcal{H}_p\text{-misurabile},$$

oppure come una formula di cambiameto di variabili per la funzione costante $f = 1$

$$\int_{T(B)} d\mathcal{H}_p = \int_B J_T \, d\mathcal{H}_p.$$

Dimostrazione. (del Teorema 3.4.2)

1. Prendiamo $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione ortogonale tale che

$$V(T(B)) \subset \mathbb{R}^p \times \{0\}, \quad 0 \in \mathbb{R}^{n-p}.$$

La composizione $V \circ T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ prende la forma

$$[V \circ T] = \begin{pmatrix} [R_0] \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} [R_0] \text{ è una matrice } p \times p \\ 0 \text{ è una matrice } (n-p) \times p \end{cases},$$

ovvero $V \circ T(B) = R_0(B) \times \{0\}$.

2. Essendo V una trasformazione ortogonale abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p(T(B)) &= \mathcal{H}_p(V(T(B))) \\ &= \mathcal{H}_p(R_0(B) \times \{0\}) \quad (\text{misura esterna } \mathcal{H}_p \text{ su } \mathbb{R}^n) \\ &= \mathcal{H}_p(R_0(B)) \quad (\text{misura esterna } \mathcal{H}_p \text{ su } \mathbb{R}^p), \end{aligned}$$

dove nell'ultima riga abbiamo usato l'Osservazione 2.1.4 di [3]. Il punto è che per un generico insieme $B_k \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^n}(B_k) \geq \mathrm{diam}_{\mathbb{R}^p}(\tilde{B}_k)$$

dove

$$\tilde{B}_k = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^p : (\tilde{x}, y) \in B_k \quad \text{per qualche } y \in \mathbb{R}^{n-p}\}.$$

Quindi, dato che la misura esterna $\mathcal{H}_p^{(\delta)}(R_0(B) \times \{0\})$ è l'estremo inferiore (rispetto a tutti i δ ricoprimenti) delle somme

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \omega_p \left(\frac{\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^n}(B_k)}{2} \right)^p,$$

conviene usare δ-ricoprimenti formati di insiemi della forma

$$B_k = \tilde{B}_k \times \{0\}.$$

Ora usiamo il fatto che $R_0(B)$ è $m_p, \mathcal{H}_p$-misurabile in $\mathbb{R}^p$ per ottenere

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p(T(B)) &= \mathcal{H}_p(R_0(B)) \quad (\text{misura esterna } \mathcal{H}_p \text{ su } \mathbb{R}^p) \\ &= m_p(R_0(B)) \\ &= |\det[R_0]|\, m_p(B) \quad (\text{CdM per diffeomorfismi lineari}). \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} (\det[R_0])^2 &= \det([R_0]^t[R_0]) = \det([V \circ T]^t[V \circ T]) \\ &= \det([T]^t[V]^t[V][T]) = \det([T]^t[T]), \end{aligned}$$

e quindi $\mathcal{H}_p(T(B)) = \sqrt{\det([T]^t[T])} m_p(B)$.

□

Osservazione 3.4.3. Nel paragrafo 2.4 di [3] si trovano degli strumenti utili per il calcolo del determinante jacobiano J_T di una mappa lineare $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ con $1 \leq p \leq n$.

3.4.2 Il caso di insiemi non necessariamente piatti

Iniziamo con la definzione di una classe di insiemi non necessariamente piatti con una buona parametrizzazione locale.

Definizione 3.4.2. Siano $p, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq p \leq n$ e $k \geq 1$. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *p-parametrizzabile di classe* C^k se esistono

i) $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ iniettiva di classe C^k con U aperto;

ii) $B \subset U$ tale che $\varphi(B) \subset A$.

In tal caso poniamo $M := \varphi(U)$.

Osservazione 3.4.4. Il caso $k = 1$ è critico, cioè ci servirà almeno regolarità C^1. Inoltre ci siamo interessati soprattutto nei casi $p < n$ e φ non lineare, ovvero ci interessano degli insiemi non piatti e sottili in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 3.4.3. Sia $\varphi \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ iniettiva con $U \subseteq \mathbb{R}^p$ aperto e $k \geq 1$. Il *determinante jacobiano di φ nel punto $u \in U$* è il numero non negativo

$$J_\varphi(u) = \sqrt{\det\left(\mathcal{J}_\varphi^t \mathcal{J}_\varphi\right)} \tag{3.4.3}$$

dove

$$\mathcal{J}_\varphi(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_p} \end{bmatrix} \tag{3.4.4}$$

è la *matrice jabobiana di φ* e $\mathcal{J}_\varphi^t$ la sua trasposta.

Notiamo che $\mathcal{J}_\varphi \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^{np})$ e che $J_\varphi \in C^{k-1}(U, \mathbb{R})$ se $J_\varphi \neq 0$ in U. In ogni caso $J_\varphi \in C^0(U, \mathbb{R})$.

Esempio 3.4.1 (Caso lineare)**.** Sia $\varphi = T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ lineare. Allora $\mathcal{J}_\varphi = [T]$ e abbiamo

$$J_\varphi = \sqrt{\det\left([T]^t[T]\right)},$$

come nel Teorema 3.4.2. Quindi in questo caso

$$\mathcal{H}_p(A) = \int_B J_\varphi \, dm_p$$

se $A = \varphi(B)$ con B un insieme m_p-misurabile.

Teorema 3.4.3. *Sia $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ iniettiva con $U \subseteq \mathbb{R}^p$ aperto. Per ogni $B \subseteq U$ tale che B è m_p-misurabile (o equivalentemente $\mathcal{H}_p$-misurabile)*

(a) $\varphi(B)$ è $\mathcal{H}_p$-misurabile in $\mathbb{R}^n$.

(b) Vale la formula integrale

$$\mathcal{H}_p(\varphi(B)) = \int_B J_\varphi(u) \, du \quad du = dm_p = d\mathcal{H}_p. \tag{3.4.5}$$

Prima della dimostrazione facciamo qualche confronto con quello che abbiamo visto fino ad ora.

Osservazione 3.4.5. (Sulla formula integrale)

a) Nel caso $\varphi = T$ lineare, il Teorema 3.4.3 riduce al Teorema 3.4.2.

b) Quando $p = n$ la formula (3.4.5) può essere scritta nella forma

$$m_n(\varphi(B)) = \int_B J_\varphi(u)\, dm_n,$$

ovvero la formula di cambiamento di misura per la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Però con una differenza tecnica. Per il vecchio risultato (Teorema 1.7.1) abbiamo fatto l'ipotesi che φ sia un diffeomorfismo. Qui stiamo assumendo solo che $\varphi \in C^1$ e φ iniettiva. Queste sono condizioni necessarie ma non garantiscono che φ sia un diffeomorfismo. Quindi abbiamo qualche lavoro da fare anche nel caso $p = n$.

c) In tutti i casi, dato che $\mathcal{H}_p = m_p$ sugli insiemi misurabili in $\mathbb{R}^p$ possiamo leggere la formula (3.4.5) come una formula di cambiamento di misura di Hausdorff $\mathcal{H}_p$ per mappe C^1 ed iniettive, ovvero

$$\mathcal{H}_p(\varphi(B)) = \int_B J_\varphi\, d\mathcal{H}_p$$

oppure come una formula di cambiameto di variabili per la funzione costante $f = 1$

$$\int_{\varphi(B)} d\mathcal{H}_p = \int_B J_T\, d\mathcal{H}_p.$$

Lo schema della dimostrazione è il seguente.

1. Mostrare le parte (a) e (b) nel caso $m_p^*(B) = 0$.

2. Mostrare le parte (a) e (b) nel caso $J_\varphi \neq 0$ su U.

3. Mostrare che l'insieme dei *valori singolari di* φ, ovvero $\{\varphi(u) : J_\varphi = 0\}$ ha misura $\mathcal{H}_p$ nulla in $\mathbb{R}^n$ (il *Lemma di Sard*).

4. Mostrare le parti (a) e (b) nel caso generale.

Dimostrazione.
Passo 1: (Trattare il caso $m_p^*(B) = 0$).

Lemma 3.4.1. *Per ogni* $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ *si ha*

$$m_p^*(B) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^p \;\Rightarrow\; \mathcal{H}_p(\varphi(B)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Sia $\{Q_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ un ricoprimento di Lebesgue di B con cubi compatti. Allora $B = \bigcup_{k\in\mathcal{K}}(B \cap Q_k)$ e per la subadditività otteniamo

$$\mathcal{H}_p(\varphi(B)) \leq \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{H}_p(\varphi(B \cap Q_k)).$$

Ora $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \mathrm{Lip}(B \cap Q_k, \mathbb{R}^n)$ e otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_p(\varphi(B)) \quad &\leq \quad \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\sup_{Q_k} \|\mathcal{J}\varphi\|\right)^p \mathcal{H}_p(B \cap Q_k) \\
&= \quad \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\sup_{Q_k} \|\mathcal{J}\varphi\|\right)^p m_p^*(B \cap Q_k) = 0 \quad (m_p^*(B \cap Q_k) \leq m_p^*(B) = 0).
\end{aligned}$$

□

Notiamo che se B ha misura nulla abbiamo mostrato che vale il Teorema 3.4.3 per ogni $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ non necessariamente iniettiva.

Passo2: (Trattare il caso $J_\varphi \neq 0$ su U) Ci servirà il seguente risultato tecnico.

Lemma 3.4.2. *Siano $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ iniettiva e $u_0 \in U$ tali che $J_\varphi(u_0) \neq 0$. Allora*

$$\lim_{Q\to\{u_0\}} \frac{\mathcal{H}_p(\varphi(Q))}{m_p(Q)} = J_\varphi(u_0).$$

Dimostrazione. Consultare il Lemma 2.6.8 di [3] per i dettagli. Il punto chiave è che $T := d\varphi(u_0)$ risulta iniettiva e quindi il risultato segue dal Teorema 3.4.2. Notiamo inoltre che la conclusione del lemma è una condizione necessaria per il teorema. Infatti, da

$$\mathcal{H}_p(\varphi(Q)) = \int_Q J_\varphi \, dm_p \quad \text{per ogni } Q \text{ tale che } x \in Q$$

abbiamo

$$\frac{\mathcal{H}_p(\varphi(Q))}{m_p(Q)} = \frac{1}{m_p(Q)} \int_Q J_\varphi \, dm_p \to J_\varphi(u_0) \;\text{ per } Q \to \{u_0\}$$

perchè J_φ è continua. □

Adesso abbiamo quello che ci serve per completare il Passo 2.

Lemma 3.4.3. *Sia $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ con $U \subset \mathbb{R}^p$ aperto tale che $J_\varphi \neq 0$ per ogni $u \in U$. Allora valgono le affermazioni (a) e (b) del Teorema 3.4.3.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni $B \subseteq U$ se B è m_p-misurabile allora $\varphi(B)$ è $\mathcal{H}_p$-misurabile e vale la formula integrale (3.4.5).

1. Consideriamo il caso $B = Q$ un cubo compatto. Essendo φ continua l'insieme $\varphi(Q)$ è compatto e quindi $\mathcal{H}_p$-misurabile. Mostriamo la formula (3.4.5) per assurdo. Se $\mathcal{H}_p(\varphi(Q)) \neq \int_Q J_\varphi \, dm_p$ allora esiste $\alpha \neq 1$ tale che

$$\mathcal{H}_p(\varphi(Q)) = \alpha \int_Q J_\varphi \, dm_p.$$

Supponiamo che $\alpha > 1$ (il caso $\alpha < 1$ è analogo). Tramite il metodo di bisezione di cubi, usato nella dimostrazione del Lemma 1.7.5, possiamo costruire una successione $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di cubi compatti tale che

$$Q_k \searrow \{u_0\} \quad \text{per qualche } u_0 \in U$$

e

$$\mathcal{H}_p(\varphi(Q_k)) \geq \alpha \int_{Q_k} J_\varphi \, dm_p.$$

Quindi

$$\frac{\mathcal{H}_p(\varphi(Q_k))}{m_p(Q_k)} \geq \alpha \frac{1}{m_p(Q_k)} \int_{Q_k} J_\varphi \, dm_p$$

e

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\mathcal{H}_p(\varphi(Q_k))}{m_p(Q_k)} \geq \alpha J_\varphi(u_0) > J_\varphi(u_0),$$

in contraddizione con il Lemma 3.4.2.

2. Usando il fatto che $\mathcal{H}_p$ è una misura boreliana e regolare, possiamo ridurre il caso generale di B misurabile a quello dei cubi compatti nel modo seguente.

   - Per ogni $B = V$ aperto esiste una collezione di cubi compatti $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ e $Q_k^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$ per $k \neq j$.
   - Per ogni $B = K$ compatto esiste una collezione di aperti $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tale che $V_j \searrow K$ per $j \to +\infty$.
   - Per ogni B misurabile esistono una collezione di compatti $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ed un insieme Z di misura nulla tali che $B = (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i) \cup Z$.

   (v. il Lemma 2.6.9 di [3] per ulteriori dettagli)

□

Passo 3: (Studiare i valori singolari) Il punto cruciale è di controllare la misura dei valori singolari. Il seguente risultato è fondamentale anche per la topologia differenziale.

Lemma 3.4.4 (di Sard). *Sia $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ con $U \subset \mathbb{R}^p$ aperto. L'insieme dei valori singolari, ovvero*

$$\varphi(S_\varphi) := \varphi\left(\left\{u \in U : \ J_\varphi = 0\right\}\right) \subset \mathbb{R}^n$$

soddisfa $\mathcal{H}_p(\varphi(S_\varphi)) = 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione è facoltativa (v. Lemma 2.6.10 di [3]), ma vogliamo dare l'idea. Si applica la formula di cambiamento della misura (Lemma 3.4.3) alla mappa regolare

$$\psi_\varepsilon : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

definita da

$$\psi_\varepsilon(u) = (\varphi(u), \varepsilon u),$$

con $\varepsilon > 0$. Più precisamente, i passaggi principali sono i seguenti.

1. È chiaro che $\psi_\varepsilon \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+p})$ con ψ_ε iniettiva. Inoltre $J_{\psi_\varepsilon} \neq 0$ su U. Infatti

$$\mathcal{J}_{\psi_\varepsilon} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_\varphi \\ \varepsilon I_p \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J^2_{\psi_\varepsilon} = \det(\mathcal{J}^t_\varphi \mathcal{J}_\varphi + \varepsilon^2 I_p) > 0.$$

   Quindi si può applicare Lemma 3.4.3 a ψ_ε per ogni $\varepsilon > 0$.

2. Si ha $\varphi = \Pi \circ \psi_\varepsilon$ dove $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ è la proiezione su $\mathbb{R}^n$ definita da $\Pi(x, u) = x$. Questa mappa è lineare e quindi Lipschitziana con $L = 1$. Quindi

$$(*) \quad \mathcal{H}_p(\varphi(A)) \leq \mathcal{H}_p(\psi_\varepsilon(A)), \quad \forall\, A \subseteq U.$$

3. L'insieme $S_\varphi := J^{-1}_\varphi(\{0\})$ è chiuso (J_φ è continua) e quindi

$$S_\varphi \cap Q \text{ è compatto per ogni cubo compatto } Q.$$

4. Applicando Lemma 3.4.3 a ψ_ε otteniamo

$$\mathcal{H}_p(\psi_\varepsilon(S_\varphi \cap Q)) = \int_{S_\varphi \cap Q} J_{\psi_\varepsilon}\, dm_p$$

   e poi usando $(*)$ dal punto 2 otteniamo

$$\mathcal{H}_p(\varphi(S_\varphi \cap Q)) \leq \int_{S_\varphi \cap Q} \sqrt{\det(\mathcal{J}^t_\varphi \mathcal{J}_\varphi + \varepsilon^2 I_p)}\, dm_p.$$

5. Prendendo il limite per $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo

$$\mathcal{H}_p(\varphi(S_\varphi \cap Q)) \leq \int_{S_\varphi \cap Q} J_\varphi\, dm_p = 0,$$

   perché $J_\varphi = 0$ su S_φ.

6. Infine, possiamo scrivere $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ con ogni Q_k un cubo compatto e sfruttare la subadditività per concludere

$$\mathcal{H}_p(\varphi(S_\varphi)) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_p(\varphi(S_\varphi \cap Q_k)) = 0,$$

perché ogni termine nella somma è nullo per il punto 5.

□

Passo 4: (Trattare il caso generale) Sia $B \subseteq U \subset \mathbb{R}^p$ tale che B è m_p-misurabile.

1. L'insieme $S_\varphi = J_\varphi^{-1}(0)$ è chiuso e quindi misurabile perchè J_φ è continua. Quindi l'insieme $B \setminus S_\varphi$ è misurabile. Per il Lemma 3.4.3 abbiamo

$$\varphi(B \setminus S_\varphi) \text{ è } \mathcal{H}_p \text{ misurabile in } \mathbb{R}^n$$

e

$$\mathcal{H}_p(B \setminus S_\varphi) = \int_{B\setminus S_\varphi} J_\varphi \, dm_p.$$

2. $\mathcal{H}_p(\varphi(S_\varphi)) = 0$ per il Lemma di Sard. Quindi

$$\varphi(B) = \varphi(B \setminus S_\varphi) \cup \varphi(S_\varphi) \text{ è } \mathcal{H}_p \text{ misurabile in } \mathbb{R}^n$$

e

$$\mathcal{H}_p(\varphi(B)) = \mathcal{H}_p(\varphi(B \setminus S_\varphi)) = \int_{B\setminus S_\varphi} J_\varphi \, dm_p = \int_B J_\varphi \, dm_p,$$

perchè $J_\varphi = 0$ su S_φ.

□

Concludiamo questo paragrafo con qualche esempio. Altri saranno presentati nelle esercitazioni.

Esempio 3.4.2 (Curve con parametrizzazione C^1)**.** Sia $\varphi : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 ed iniettiva; cioè $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$ dove ogni $\varphi_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 ed iniettiva per $k = 1, \ldots, n$. Allora

$$\mathcal{H}_1(\varphi(a,b)) = \int_a^b |\varphi'(u)| \, du.$$

In particolare, la *lunghezza del cammino* $\varphi(a,b)$ si ottiene integrando la *velocità scalare* $|\varphi'(u)|$ sull'intervallo di tempo (a,b) percorso se si pensa di u come un parametro di tempo. Infatti $M = \varphi(a,b)$ è 1-parametrizzabile con $U = (a,b)$ aperto e quindi per il

Teorema 3.4.3 M è $\mathcal{H}_1$-misurabile e possiamo calcolare la sua misura tramite (3.4.5). Si trova

$$\mathcal{J}_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_n' \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{J}_\varphi^t \mathcal{J}_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_n' \end{bmatrix} = |\varphi'|^2$$

e quindi $J_\varphi(u) = \sqrt{\mathcal{J}_\varphi^t(u)\mathcal{J}_\varphi(u)} = |\varphi'(u)|$.

In realtà, basterebbe avere φ solo C^1 ed iniettiva *a tratti*; ovvero esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ tale che $\varphi_{|(t_{k-1},t_k)}$ è C^1 ed iniettiva su (t_{k-1}, t_k) per ogni $k = 1, \ldots, N$. In tal caso

$$\mathcal{H}_1(M) = \mathcal{H}_1(M \setminus \{\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_N)\}) = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(u)|\, du.$$

Esempio 3.4.3. Calcolare la misura $\mathcal{H}_1(M)$ del cerchio unitario nello spazio definito da $M = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Notiamo che M è un insieme chiuso (ad esempio, $M = \Phi^{-1}(\{0\})$ per la funzione continua $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$) e quindi M è $\langle_1$-misurabile. Possiamo parametrizzare $\tilde{M} := M \cup Z := M \setminus \{(1, 0, 1)\}$ da $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 ed iniettiva dove $\varphi(u) = (\cos u, \sin u, 1)$ e $|\varphi'(u)| = 1$. Quindi

$$\mathcal{H}_1(M) = \mathcal{H}_1(\tilde{M}) = \int_0^{2\pi} du = 2\pi,$$

dove abbiamo anche usato il fatto che $\mathcal{H}_1(M) = \mathcal{H}_1(\tilde{M}) + \mathcal{H}_1(Z)$ perché $\mathcal{H}_0(Z) = 1 \Rightarrow \mathcal{H}_1(Z) = 0$.

Esempio 3.4.4 (Il grafico di una funzione di classe C^1). Sia $g : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.

- Definiamo una parametrizzazione $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ da

  $$\varphi(u) = (u, g(u)).$$

  È evidente che φ risulta iniettiva ed è C^1.

- La sua matrice jacobiana è

  $$\mathcal{J}_\varphi = \begin{bmatrix} I \\ \nabla g \end{bmatrix},$$

  dove I è l'identità $(n-1) \times (n-1)$. Quindi

  $$J_\varphi = \sqrt{\det\left(\mathcal{J}_\varphi^t \mathcal{J}_\varphi\right)} = \sqrt{1 + |\nabla g|^2}$$

  e

  $$\mathcal{H}_{n-1}(\text{grafico}(g)) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, du \quad (du = dm_{n-1} = d\mathcal{H}_{n-1}). \tag{3.4.6}$$

Esempio 3.4.5. Calcolare l'area ($\mathcal{H}_2(M)$) del paraboloide $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < 1, z = x^2 + y^2\}$

- M è il grafico della funzione g definita da $g(x, y) = x^2+y^2$ per $(x, y) \in U = B_0(0) \subset \mathbb{R}^2$. La funzione g è di classe C^∞.
- Per l'esempio precedente, M è $\mathcal{H}_2$-misurabile e abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(M) &= \int_{B_1(0)} \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, dxdy = \int_{B_1(0)} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho \, d\theta \right) d\rho = 2\pi \frac{1}{12} \left.(1 + 4\rho^2)^{3/2}\right|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

3.5 Integrazione su insiemi parametrizzabili e varietà

Obiettivo: Dare senso a $\int_M f \, d\mathcal{H}_p$ per $M \subset \mathbb{R}^n$ con $\dim_{\mathcal{H}}(M) = p \in \{1, \dots, n-1\}$.
Nel caso degli insiemi p-parametrizzabili abbiamo già tutto quello che ci serve per dare una buona risposta. Inoltre questa risposta sarà il modello locale per una risposta più completa per le varietà.

3.5.1 Integrazione su insiemi p-parametrizzabili

Teorema 3.5.1. *Sia $M = \varphi(U)$ con $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 ed iniettiva. Sia $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

a) f è $\mathcal{H}_p$-misurabile su M $\;\Leftrightarrow\;$ $(f \circ \varphi)J_\varphi$ è m_p-misurabile su $U \subseteq \mathbb{R}^p$ o equivalentemente $\mathcal{H}_p$-misurabile su $U \subseteq \mathbb{R}^p$.

b) f è $\mathcal{H}_p$-integrabile su M $\;\Leftrightarrow\;$ $(f \circ \varphi)J_\varphi$ è m_p-integrabile su $U \subseteq \mathbb{R}^p$ o equivalentemente $\mathcal{H}_p$-integrabile su $U \subseteq \mathbb{R}^p$.
In tal caso

$$\int_M f \, d\mathcal{H}_p = \int_U f(\varphi(u))J_\varphi(u)\, du \quad (du = dm_p = d\mathcal{H}_p). \tag{3.5.1}$$

Usando $du = d\mathcal{H}_p$ possiamo leggere la formula (3.5.1) come una formula di cambiamento di variabili per l'integrale rispetto a $\mathcal{H}_p$.

Dimostrazione. La dimostrazione è facoltativa (v. il Teorema 2.8.1 di [3]). Però notiamo che:

- la formula (3.5.1) viene dimostrata usando il Teorema 3.4.2 in modo analogo a quello che abbiamo fatto per mostrare che (CdM) $\Rightarrow$ (CdV) nel caso della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.
- Essendo $J_\varphi = 0$ su S_φ serve il fatto che $\varphi^{-1}(M) \setminus S_\varphi$ è m_p-misurabile in R^p (v. la Proposizione A.1 del paragrafo 2.6 di [3]).

$\square$

Esempio 3.5.1. Verificare che f è sommabile su M e calcolare $\int_M f\, d\mathcal{H}_2$ se

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 1, z = x^2 + y^2\} \qquad \text{e} \qquad f(x, y, z) = xy.$$

Come abbiamo già visto $M = \varphi(U)$ con $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi(x, y) = (x, y, g(x, y))$ con $(x, y) \in U$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$. Quindi M è $\mathcal{H}_2$-misurabile. Inoltre f è continua su $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^3)$ e quindi f e $|f|$ sono $\mathcal{H}_2$-misurabile. Applicando (3.5.1) a $|f|$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int_M |f|\, d\mathcal{H}_p &= \int_{B_1(0)} |f(x, y, g(x, y))| \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, dxdy \\ &= \int_{B_1(0)} |xy| \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy < +\infty \end{aligned}$$

perché la funzione integranda è limitata su un insieme di misura finita. Quindi, f è sommabile su M. Applicando (3.5.1) ad f ottentiamo

$$\int_M f\, d\mathcal{H}_p = \int_{B_1(0)} xy \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy = 0,$$

perché la funzione integranda è dispari in x (ed in y) su un insieme simmetrico in x (ed in y).

Esempio 3.5.2. Ripetere Esempio 3.5.1 con $\widetilde{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 + y^2\}$ al posto di M. Notiamo che

$$\widetilde{M} = M \cup Z = M \cup \{(x, y, x^2 + y^2) : \ x^2 + y^2 = 1\},$$

dove abbiamo già visto che M è $\mathcal{H}_2$-misurabile e $\mathcal{H}_2(Z) = 0$ (abbiamo già visto che $\mathcal{H}_1(Z) = 2\pi$). Quindi $\widetilde{M}$ è $\mathcal{H}_2$-misurabile. La sommabilità su $\widetilde{M}$ segue dalla sommabilità su M ed il valore dell'integrale rimane zero. Infine, notiamo che la $\mathcal{H}_\alpha$-misurabilità di $\widetilde{M}$ per ogni $\alpha \geq 0$ segue direttamente dal fatto che $\widetilde{M}$ è chiuso.

Un motivo per aver voglia dell'integrale di una funzione f su un insieme M è il concetto del *valor medio* che fornisce un numero che rappresenta qualche informazione globale sulla distribuzione dei valori di f su M.

Definizione 3.5.1. Sia $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{H}_\alpha$-integrabile su $M \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ con misura positiva e finita. Il *valor medio di f su M* è la quantità

$$\bar{f}_{|M} := \frac{1}{\mathcal{H}_\alpha(M)} \int_M f \, d\mathcal{H}_\alpha.$$

Notiamo che il valor medio è un numero finito se l'integrale di f è finito.

Esercizio 3.5.1. Calcolare il valor medio $\overline{|f|}_{|M}$ dove f e M sono definite in Esempio 3.5.1.

3.5.2 Integrazione su varietà compatte

Siano $p, n, k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ e $1 \leq p \leq n-1$.

Definizione 3.5.2. Un insieme non vuoto $M \subset \mathbb{R}^n$ è detta *p-varietà di classe C^k* se per ogni $x_0 \in M$ esistono un intorno aperto W_0 di x_0 ed una mappa $\Phi \in C^k(W_0, \mathbb{R}^{n-p})$ tali che

(V1) $M \cap W_0 = \{x \in W_0 : \ \Phi(x) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^{n-p}\}$ $\quad$ ($n-p$ equazioni in n variabili)

(V2) rango $(\mathcal{J}_\Phi(x_0)) = n - p$ $\quad$ ($\mathcal{J}_\Phi$ ha rango massimale)

Osservazione 3.5.1. Ogni p-varietà di classe C^k risulta localmente p-parametrizzabile di classe C^k. Infatti

- La condizione (V1) dice che M è definito locamente tramite un sistema di equazioni

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-p}. \tag{3.5.2}$$

- Poi, usando la condizione (V2) ed applicando il teorema di Dini, in qualche intorno di x_0 possiamo risolvere il sistema (3.5.2) per una collezione di variabili $v = (v_1, \dots, v_{n-p})$ in funzione delle altre $u = (u_1, \dots, u_p)$ dove $v_k = x_{i_k}$ per $k = 1, \dots, n-p$. Più precisamente esistono

$$\begin{cases} \text{intorni } U \subseteq \mathbb{R}^p \text{ di } u_0, V \subset \mathbb{R}^{n-p} \text{ di } v_0 \\ g : U \to V \quad \text{di classe } C^k \end{cases}$$

tali che rispetto a queste nuove coordinate (u, v) su $\mathbb{R}^n$ abbiamo x_0 rappresentato da $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ e

$$M \cap (U \times V) = \{(u, g(u)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : \ u \in U\}$$

Denotiamo con $W := U \times V$ l'intorno di x_0 in cui abbiamo questa rappresentazione locale di M come il grafico della funzione g.

- Quindi M è *localmente p-parametrizzabile* usando $\varphi \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ definita nel modo solito
$$\varphi(u) := (u, g(u)) \quad \text{per ogni } u \in U$$
e abbiamo un'espressione locale per l'integrale di f su $M \cap W$
$$\int_{M\cap W} f \, d\mathcal{H}_p = \int_U f(\varphi(u)) J_\varphi(u) \, du \quad (du = dm_p = d\mathcal{H}_p). \tag{3.5.3}$$

Osservazione 3.5.2. Quindi per una p-varietà possiamo integrare localmente (su $M \cap W$) ogni $f \geq 0$ che è $\mathcal{H}_p$-misurabile su M. Inoltre possiamo dire che *f è localmente sommabile su M rispetto alla misura $\mathcal{H}_p$* se per ogni intorno locale $M \cap W$ gli integrali
$$\int_{M\cap W} f^+ \, d\mathcal{H}_p \quad \text{e} \quad \int_{M\cap W} f^- \, d\mathcal{H}_p$$
sono finiti e poniamo
$$\int_{M\cap W} f \, d\mathcal{H}_p := \int_{M\cap W} f^+ \, d\mathcal{H}_p - \int_{M\cap W} f^- \, d\mathcal{H}_p.$$

Domanda: Come possiamo "globalizzare" questa costruzione locale per ottenere un integrale su tutto M?

Risposta: Avvalendoci dell'esistenza di una *partizione dell'unità* che ci consentirà di "incollare" delle espressioni locali per gli integrali.

Lemma 3.5.1 (Esistenza di una partizione dell'unità continua)**.** *Sia M una p-varietà compatta di classe C^k in $\mathbb{R}^n$ con $k \geq 1$. Allora esistono un numero finito di*
$$\begin{cases} \text{parametrizzazioni locali } \varphi_i : U_i \subset \mathbb{R}^p \to M \text{ di classe } C^k \\ \text{funzioni continue } \zeta_i : M \to [0,1] \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad i = 1, \dots N$$
tali che

a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^N \varphi(U_i) = M;$

b) $\zeta_i(x) = 0$ *se* $x \in M \setminus \varphi(U_i)$*, ovvero* $\operatorname{supp}(\zeta_i) \subset \varphi(U_i)$ *per ogni* $i = 1, \dots, N;$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^N \zeta_i(x) = 1$ *per ogni* $x \in M.$

Dimostrazione. Prima di iniziare, notiamo che la compatezza sarà usata per avere solo un numero finito di pezzi.

1. Per ogni $x \in M$ esistono

$$\begin{cases} \text{una bolla } B_{r_x}(x) \subset \mathbb{R}^n \text{ di raggio } r_x \\ \text{una parametrizzazione locale } \varphi_x : U_x \subset \mathbb{R}^p \to M \text{ di classe } C^k \end{cases}$$

tali che $\varphi_x(U_x) = M \cap B_{r_x}(x)$.

2. Essendo M compatta possiamo estrarre dal ricoprimento aperto $\{B_{r_x/2}(x)\}_{x \in M}$ di M un sottoricoprimento finito $\{B_{r_i/2}(x_i)\}_{i=1}^N$.

3. Per ogni $i = 1, \ldots, N$ esiste una funzione $\sigma_i : M \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$ continua tale che

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \cap \overline{B}_{r_i/2}(x_i) := F_i \\ 0 & x \in M \setminus B_{2r_i/3}(x_i) := E_i \end{cases}$$

. Infatti basta definire[1]

$$\sigma_i(x) := \frac{d(x, E_i)}{d(x, E_i) + d(x, F_i)}.$$

   - Ogni σ_i è continua perché la funzione $d(\cdot, A)$ è continua per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ e $d(x, E_i) + d(x, F_i) > 0$ per ogni $x \in M$.
   - Abbiamo $0 \le \sigma_i(x) \le 1$ per ogni $x \in M$ perché $0 \le d(x, E_i) \le d(x, E_i) + d(x, F_i)$.
   - È evidente che $\sigma_i \equiv 0$ su E_i e $\sigma_i \equiv 1$ su F_i.

4. Poniamo $\zeta_i(x) := \dfrac{\sigma_i(x)}{\sigma(x)}$ dove $\sigma(x) := \displaystyle\sum_{i=1}^N \sigma_i(x)$. Notiamo che $\sigma(x) \ge 1$ perché ogni $\sigma_i \ge 0$ ed ogni $x \in M$ appartiene a qualche F_i. Quindi ζ_i è ben definita. Inoltre

   - ζ_i è continua per ogni $i = 1, \ldots, N$;
   - $0 \le \zeta_i \le 1$ per ogni $i = 1, \ldots, N$;
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^N \zeta_i = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N \sigma_i \equiv 1$ su M.

□

Osservazione 3.5.3. Siano M una p-varietà compatta di classe C^k con $k \ge 1$ ed $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{H}_p$ misurabile e non negativa. Allora esiste l'integrale di f su M rispetto alla misura $\mathcal{H}_p$ ed è calcolabile tramite la formula

$$\int_M f \, d\mathcal{H}_p = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (\zeta_i f \circ \varphi_i) \, J_{\varphi_i}(u) \, du \quad (du = dm_p = d\mathcal{H}_p), \tag{3.5.4}$$

[1]Ricordiamo che $d(x, A)$ è la distanza euclidea da x ad A.

dove $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^N$ è un sistema di parameterizzazioni locali di M con $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i)$ e $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$ una partizione dell'unità continua subordinata a $\{U_i\}_{i=1}^N$. Infatti usando la partizione dell'unità e l'additività dell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned} \int_M f\, d\mathcal{H}_p &= \int_M \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \right) f\, d\mathcal{H}_p \\ &= \sum_{i=1}^N \int_M \zeta_i f\, d\mathcal{H}_p \end{aligned}$$

Poi usando $(\mathrm{supp}(\zeta_i) \subset \varphi(U_i))$ ed il Teorema 3.4.3 otteniamo

$$\begin{aligned} \int_M f\, d\mathcal{H}_p &= \sum_{i=1}^N \int_{M \cap \varphi(U_i)} \zeta_i f\, d\mathcal{H}_p \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (\zeta_i f \circ \varphi_i)\, J_{\varphi_i}(u)\, du \end{aligned}$$

In particolare, il valore dell'integrale è independente dalle scelte delle parametrizzazioni locali e della partizione dell'unità.

Concludiamo questo paragrafo con qualche esempio e qualche osservazione sulle p-varietà.

Esempio 3.5.3 (L'insieme di livello di una funzione regolare)**.** Sia $\Phi \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $n \geq 2$. Allora per ogni $c \in \mathbb{R}$, *l'insieme si livello*

$$M = \Phi_c := \{x \in \Omega : \Phi(x) = c\}$$

è una $(n-1)$-varietà se

$$\nabla\Phi(x) \neq 0 \quad \text{per ogni } x \in \Phi_c.$$

Infatti $\widetilde{\Phi}(x) := \Phi(x) - c$ definisce globalmente M tramite l'equazione $\widetilde{\Phi}(x) = 0$.

Osservazione 3.5.4. L'insieme di livello Φ_c è un *vincolo regolare* per il problema degli estremi vincolati noto dal corso di Analisi 3. Sappiamo anche che $\nabla\Phi(x)$ è ortogonale allo *spazio tangente ad M nel punto x*, ovvero

$$\langle \nabla\Phi(x), v \rangle = 0 \tag{3.5.5}$$

per ogni *vettore tangente* $v = \gamma'(0)$ dove $\gamma : (-\delta, \delta) \to M \subset \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi funzione derivabile con $\gamma(0) = x$. Infatti, fissato un qualsiasi cammino γ così abbiamo $\Phi(\gamma(t)) = c$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$ ed applicando la regola della catena otteniamo

$$0 = \frac{d}{dt}\Phi(\gamma(t)) = \langle \nabla\Phi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle, \quad t \in (-\delta, \delta)$$

e quindi abbiamo (3.5.5) usando $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$.

Notiamo che lo spazio normale in $x \in M$ ha dimensione uno e $\{\nabla\Phi(x)\}$ fornisce una base. Un'altra base è $\{-\nabla\Phi(x)\}$.

Esempio 3.5.4. Un esempio concreto è la *sfera di raggio* $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$. Ponendo $\Phi(x) = |x|^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$\partial B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\} = \Phi_{r^2}$$

dove $\nabla\Phi(x) = 2x \neq 0$ per ogni $x \in \Phi_{r^2}$ se $r > 0$. Il vettore $\nabla\Phi(x)$ è chiaramente ortogonale alla sfera e punta "fuori" rispetto alla bolla $B_r(0)$ che ha la sfera come il suo bordo.

Questo esempio appartiene ad una classe di $(n-1)$-varietà che sarà al centro della nostra attenzione nel prossimo capitolo, cioè il bordo di un dominio regolare. Un'ultimo esempio è il seguente. Altri saranno discussi in esercitazione.

Esempio 3.5.5 (Il grafico di una funzione)**.** Sia

$$\begin{array}{rcll} g : U \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} & \text{di classe } C^k \\ \hat{x}_n & \mapsto & g(\hat{x}_n) & \end{array}$$

dove $\hat{x}_n := (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Allora il grafico di g

$$M = \{x = (\hat{x}_n, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = g(\hat{x}_n), \ \hat{x}_n \in U\},$$

è una $(n-1)$-varietà di classe C^k. Infatti basta definire $\Phi \in C^k(U \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tramite la formula

$$\Phi(x) = \Phi(\hat{x}_n, x_n) := x_n - g(\hat{x}_n). \tag{3.5.6}$$

Abbiamo così una funzione Φ che definisce globalmente M, ovvero

$$M = \{x \in U \times \mathbb{R} : \Phi(x) = 0\}$$

e abbiamo rango $(\mathcal{J}_\Phi(x)) = 1 = n - (n-1)$ per ogni $x \in M$.

N.B. Nel caso $g \in C^k(\overline{U}, \mathbb{R})$ con U limitato, M risulta una $(n-1)$-varietà compatta.

Osservazione 3.5.5. Con la scelta di Φ fatta in (3.5.6) abbiamo che il vettore $\nabla\Phi(x) = (-\nabla g(\hat{x}_n), 1)$ "punta in su" per ogni $x \in M$. Con la scelta opposta $\Phi(x) = g(\hat{x}_n) - x_n$, $\nabla\Phi(x)$ punterebbe "in giù".

Capitolo 4

I teoremi fondamentali del calcolo integrale in più variabili

In questo capitolo il nostro obiettivo principale è di generalizzare la seguente versione del teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI) in una variabile: *Se* $f \in C^1([a,b])$, *allora*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \tag{4.0.1}$$

Più precisamente, data una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ con Ω "ammissibile", ci chiediamo come esprimere l'integrale di una derivata parziale di f, cioè

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = ?$$

Poi la risposta a questa domanda sarà usata per:

1. ottenere una formula di *integrazione per parti* per integrali multipli;
2. dimostrare il *teorema della divergenza*;
3. sviluppare numerose applicazioni.

4.1 Aperti regolari ed i teoremi fondamentali

Il primo passo verso il teorema fondamentale è di precisare una classe di domini ammissibili.

Definizione 4.1.1. Sia $n \geq 2$. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è detto regolare se

(R1) Ω è limitato

(R2) $\mathrm{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$

(R3) $\partial\Omega$ è una $(n-1)$-varietà di classe C^k con $k \geq 1$.

Osservazione 4.1.1 (Sulla condizione (R2)).

a) L'ipotesi (R2) serve per escludere esempi come

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x| < 1, 1 < |x| < 2\} = B_2(0) \setminus \partial B_1(0),$$

dove ci sono punti di Ω situati su entrambi i lati della parte $\partial B_1(0)$ di $\partial\Omega$. Vogliamo avere domini tali per cui in ogni punto $x \in \partial\Omega$ esiste una direzione normale che "punta verso l'esterno" di Ω e una che "punta verso l'interno" di Ω, ma in questo esempio le due direzioni normali sono entrambe "interne".

b) Notiamo che l'esempio nella parte a) non è *connesso*. Quando un aperto Ω è anche connesso Ω è detto un *dominio*.

Proposizione 4.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto regolare. Allora per ogni $x \in \partial\Omega$:*

a) esistono un intorno aperto W di x ed una funzione $\Phi \in C^k(W, \mathbb{R})$ con $\nabla\Phi \neq 0$ su W tali che

(i) $\partial\Omega \cap W = \{x \in W : \Phi(x) = 0\}$;

(ii) $\Omega \cap W = \{x \in W : \Phi(x) < 0\}$.

b) il versore $\nu(x) := \dfrac{1}{|\nabla\Phi(x)|}\nabla\Phi(x)$ soddisfa

(i) $\{\nu(x)\}$ è una base per lo spazio normale a $\partial\Omega$ nel punto x;

(ii) $x + t\nu \notin \overline{\Omega}$ e $x - t\nu \in \Omega$ per ogni $t > 0$ e piccolo .

Il vettore $\nu(x)$ è detto versore normale esterno a $\partial\Omega$ nel punto x.

Dimostrazione. a): $M = \partial\Omega$ è una $(n-1)$-varietà compatta di classe C^k per le proprietà (R1) e (R3). Quindi per ogni $x \in \partial\Omega$, possiamo rappresentare $\partial\Omega$ come il grafico di una funzione di classe C^k, ovvero esistono[1]

- $j = j(x) \in \{1, \ldots, n\}$;
- intorni <u>circolari</u>

$$\begin{cases} U \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ di } \hat{x}_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ V \subset \mathbb{R} \text{ di } x_j \end{cases}$$

[1]Usiamo l'Osservazione 3.5.1 con la scelta di intorni circolari (bolle).

- $g : U \to V$ di classe C^k

tali che
$$\partial\Omega \cap (U \times V) = \{(\hat{x}_j, x_j) \in U \times V : \; x_j = g(\hat{x}_j)\}.$$
Gli insiemi
$$SG(g) := \{(\hat{x}_j, x_j) \in U \times V : \; x_j < g(\hat{x}_j)\}$$
$$SG^*(g) := \{(\hat{x}_j, x_j) \in U \times V : \; x_j > g(\hat{x}_j)\}$$
sono aperti, connessi e disgiunti da $\partial\Omega$. Quindi sono contenuti in Ω oppure $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Usando la proprietà (R2) si mostra che ci sono solo due possibilità:
$$(A) \quad SG(g) \subset \Omega \;\text{ e }\; SG^*(g) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$
oppure
$$(B) \quad SG(g) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \;\text{ e }\; SG^*(g) \subset \Omega.$$
Quindi scegliendo $W = U \times V$ e
$$\Phi(\hat{x}_j, x_j) = \begin{cases} x_j - g(\hat{x}_j) & \text{se } SG(g) \subset \Omega, \text{ ovvero caso (A)} \\ g(\hat{x}_j) - x_j & \text{se } SG^*(g) \subset \Omega, \text{ ovvero caso (B)} \end{cases}$$
otteniamo la tesi.

b): Dall'Analisi 3 sappiamo che la dimensione dello spazio normale è 1 e che per ogni punto sull'insieme di livello $\Phi = 0$, il vettore $\nabla\Phi(x)$ punta nella direzione di crescita massimale per Φ. Quindi punta verso l'esterno se $\Phi = 0$ su $\partial\Omega \cap W$ e $\Phi < 0$ su $\Omega \cap W$.

□

Definizione 4.1.2. Sia Ω un aperto regolare. Lo spazio delle *funzioni di classe C^1 fino al bordo* è
$$C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) = \left\{ f = f\big|_{\overline{\Omega}} : \quad f \text{ è di classe } C^1 \text{ in un intorno aperto di } \overline{\Omega} \right\}.$$

Per le applicazioni che abbiamo in mente, questa definizione di regolarità fino al bordo ci farà comodo. Ma altre definizioni sono possibili. Ad esempio, invece di chiedere che f sia la restrizione ad $\overline{\Omega}$ di una funzione regolare in un intorno di $\overline{\Omega}$, è possibile chiedere che f sia $C^1(\Omega)$ e che f e le sue derivate parziali del primo ordine possano essere prolungate con continuità fino al bordo. Questo succede se queste funzioni sono uniformemente continue sui sottoinsiemi (limitati) di Ω.

4.1.1 I teoremi fondamentali per aperti regolari in $\mathbb{R}^n$

Ora enunciamo il risultato che risponde alla domanda principale di questo capitolo.

Teorema 4.1.1 (TFCI in più variabili). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto regolare e $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Allora per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial\Omega} f\, \nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1}, \tag{4.1.1}$$

dove ν_j è la componente j-esima del versore normale esterno a $\partial\Omega$.

Notiamo che sicuramente gli integrali sono ben definiti perché i domimi di integrazione sono boreliani (quindi $\mathcal{H}_\alpha$-misurabili per ogni $\alpha \geq 0$) e le funzioni integrande sono limitate e continue (quindi $\mathcal{H}_\alpha$-misurabili). Prima della dimostrazione, vorremmo fare qualche osservazione e indicare qualche conseguenza importante del teorema.

Osservazione 4.1.2. La formula (4.1.1) per $n \geq 2$ è una vera generalizzazione della formula (4.0.1) nel caso $n = 1$. Infatti, posto $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ abbiamo $\partial\Omega = \{a, b\}$ con versore normale esterno

$$\nu(a) = -1 \quad \text{e} \quad \nu(b) = 1.$$

Quindi

$$\int_a^b f'(x)\, dx = \int_\Omega \frac{df}{dx}\, d\mathcal{H}_1 = \int_{\partial\Omega} f\, \nu\, d\mathcal{H}_0 = f(b) - f(a).$$

Corollario 4.1.1 (Integrazione per parti negli integrali multipli). *Sia Ω un aperto regolare in $\mathbb{R}^n$ e siano $f, g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Allora per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial\Omega} g f\, \nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1} - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n, \tag{4.1.2}$$

dove ν_j è la componente j-esima del versore normale esterno a $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Applicando il Teorema 4.1.1 al prodotto $fg \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ risulta

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(gf)\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial\Omega} g f\, \nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1}.$$

Usando la formula di Leibniz e la linearità dell'integrale risulta

$$\int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n + \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial\Omega} g f\, \nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1},$$

e abbiamo mostrato la formula (4.1.2). □

La prossima conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale è uno dei risultati più usati nell'analisi superiore. Prima di enunciarla abbiamo bisogno di una definizione.

Definizione 4.1.3. Sia F un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto $\mathcal{O}$ di $\mathbb{R}^n$, ovvero $F \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$ con $F = (F_1, \dots, F_n)$. È detta *divergenza di F* la funzione scalare

$$\operatorname{div} F := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \in C^0(\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

Corollario 4.1.2 (Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^n$)**.** *Siano Ω un aperto regolare in $\mathbb{R}^n$ e $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1} \tag{4.1.3}$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$ e ν è il versore normale esterno a $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Sfuttando il Teorema 4.1.1 e la linearità dell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_n &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \, d\mathcal{H}_{n-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} F_j \, \nu_j \, d\mathcal{H}_{n-1} \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.1.3 (Intepretazione della divergenza di un campo vettoriale)**.**

a) La quantità $\langle F, \nu \rangle|_{\partial\Omega}$ è detta *densità di flusso di F uscente dal bordo $\partial\Omega$* ed il suo integrale su $\partial\Omega$ è detto *flusso di F uscente dal bordo $\partial\Omega$*.

b) Il significato della divergenza di F può essere espresso usando il teorema della divergenza nel modo seguente: *per ogni $x_0 \in \Omega$*

$$\operatorname{div} F(x_0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathcal{H}_n(B_r(x_0))} \int_{\partial B_r(x_0)} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1},$$

ovvero il rapporto infinitesimale fra il flusso di F uscente dal bordo delle sfere e la misura delle bolle con centro in x_0.

Infatti, essendo Ω aperto, per ogni $r > 0$ piccolo risulta $B_r(x_0) \subset \Omega$. Se il campo F è C^1 in un intorno di x_0, allora applicando il teorema della divergenza otteniamo

$$\frac{1}{\mathcal{H}_n(B_r(x_0))} \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1} = \frac{1}{\mathcal{H}_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_n,$$

ma $\operatorname{div} F \in C^0(B_r(x_0), \mathbb{R})$ e quindi

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{H}_n(B_r(x_0))} \int_{\partial B_r(x_0)} \langle F, \nu\rangle \, d\mathcal{H}_{n-1} = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathcal{H}_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_n = \operatorname{div} F(x_0).$$

Osservazione 4.1.4 (Utilità del teorema di divergenza)**.** Le applicazioni del teorema sono numerose ed un certo numero di esse saranno illustrate nel prossimo paragrafo. In particolare, il risultato fornisce uno modo per scambiare un integrale esteso su un dominio dato con un altro esteso al bordo o vice versa. Inoltre in molte applicazioni il punto di partenza è una scelta opportuna del campo vettoriale F.

Un primo esempio nel quale si opera una scelta opportuna di F è il calcolo della misura del bordo di un insieme.

Esempio 4.1.1. Per ogni $n \geq 2$ e $r > 0$ si ha

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial B_r(0)) = n\omega_n r^{n-1} = \frac{n}{r}\mathcal{H}_n(B_r(0)). \tag{4.1.4}$$

Il dominio $B_r = B_r(0)$ è un aperto regolare. Il suo bordo è la $(n-1)$-varietà

$$\partial B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \Phi(x) = |x|^2 - r^2 = 0\} \quad \text{dove } \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ e } \nabla\Phi = 2x \neq 0 \text{ su } \partial B_r.$$

Inoltre $\Phi < 0$ su B_r e quindi il versore normale esterno è $\nu = \dfrac{x}{|x|}$. Esaminando la formula

$$\int_{B_r} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial B_r} \langle F, \nu\rangle \, d\mathcal{H}_{n-1}$$

sarebbe utile avere un campo F tale che $\operatorname{div}(F)$ e/o $\langle F, \nu\rangle$ è costante sull'insieme di integrazione. Scegliendo $F(x) = x \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = n$$

e quindi

$$\begin{aligned} n\mathcal{H}_n(B_r(0)) &= \int_{B_r(0)} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial B_r(0)} \langle F, \nu\rangle \, d\mathcal{H}_{n-1} \\ &= \int_{\partial B_r(0)} \left\langle x, \frac{x}{|x|}\right\rangle d\mathcal{H}_{n-1} = \int_{\partial B_r(0)} r \, d\mathcal{H}_{n-1} \\ &= r\mathcal{H}_{n-1}(\partial B_r(0)). \end{aligned}$$

Vedremo altre applicazioni al calcolo integrale della misura di un insieme nel prossimo paragrafo.

Osservazione 4.1.5. Nei risultati fondamentali abbiamo usato un'ipotesi di regolarità sul bordo di Ω; cioè che $\partial\Omega$ è di classe C^k con $k \geq 1$. Questo è stato fatto per avere il versore normale esterno ν ben definito ovunque su $\partial\Omega$. Però possiamo indebolire quest'ipotesi. Infatti l'integrale di bordo rispetto alla misura $\mathcal{H}_{n-1}$ non vede un eventuale cambiamento della funzione integranda $\langle F, \nu\rangle$ su un insieme di $\mathcal{H}_{n-1}$-misura nulla. Quindi dovrebbe bastare solo avere $\partial\Omega$ di classe "C^1 a tratti" in qualche senso ancora da stabilire.

Esempio 4.1.2. Siano $\Omega = Q_r = Q_r(0)$ il cubo aperto di lato $2r$ e centro nell'origine di $\mathbb{R}^2$ e $F \in C^1(\overline{Q_r}, \mathbb{R}^2)$. Possiamo mostrare che

$$\int_{Q_r} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_2 = \int_{\partial Q_r} \langle F, \nu\rangle \, d\mathcal{H}_1,$$

almeno in qualche senso?

1. Il versore normale esterno ν è ben definito solo sulla *parte regolare del bordo*, ovvero

   $$\partial_{\text{reg}}\Omega := \partial\Omega \setminus \{A, B, C, D\}$$

   dove

   $$A = (-r, -r), \; B = (r, -r), \; C = (r, r), \; D = (-r, r)$$

   sono i vertici del quadrato Q_r. Essendo $\mathcal{H}_0(\{A, B, C, D\}) = 4$ abbiamo $\mathcal{H}_1(\{A, B, C, D\}) = 0$. Quindi $\langle F, \nu\rangle$ è definita $\mathcal{H}_1$-quasi ovunque su $\partial\Omega$. Inoltre $\langle F, \nu\rangle$ è $\mathcal{H}_1$-misurabile e limitata su $\partial_{\text{reg}}\Omega$ e perciò $\mathcal{H}_1$-integrabile su $\partial_{\text{reg}}\Omega$. Così la funzione $\langle F, \nu\rangle$ determina un'unica classe in $L(\partial\Omega, \mathcal{H}_{n-1})$ dove

   $$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \, d\mathcal{H}_1 := \int_{\partial_{\text{reg}}\Omega} \langle F, \nu\rangle \, d\mathcal{H}_1 = \int_{\partial\Omega} \langle F, \tilde{\nu}\rangle \, d\mathcal{H}_1,$$

   e $\tilde{\nu}$ è un qualsiasi prolungamento di ν da $\partial_{\text{reg}}\Omega$ a $\partial\Omega$. Ad esempio $\tilde{\nu} = 0$ su $\partial\Omega \setminus \partial_{\text{reg}}\Omega$.

2. Scegliendo le parametrizzazioni canoniche per i quattro lati di Q_r (estremi esclusi) otteniamo

   $$\begin{cases} \Gamma_1 = (A, B) & (x, y) = (x, -r) & \nu = (0, -1) & d\mathcal{H}_1 = dx \\ \Gamma_2 = (B, C) & (x, y) = (r, y) & \nu = (1, 0) & d\mathcal{H}_1 = dy \\ \Gamma_3 = (D, C) & (x, y) = (x, r) & \nu = (0, 1) & d\mathcal{H}_1 = dx \\ \Gamma_4 = (A, D) & (x, y) = (-r, y) & \nu = (-1, 0) & d\mathcal{H}_1 = dy \end{cases}$$

dove $x, y \in (-r, r)$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial_{\mathrm{reg}}\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_1 &= \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_1 \\
&= -\int_{\Gamma_1} F_2 \, d\mathcal{H}_1 + \int_{\Gamma_2} F_1 \, d\mathcal{H}_1 + \int_{\Gamma_3} F_2 \, d\mathcal{H}_1 - \int_{\Gamma_4} -F_1 \, d\mathcal{H}_1 \\
&= \int_{-r}^{r} [F_2(x, r) - F_2(x, -r)] \, dx + \int_{-r}^{r} [F_1(r, y) - F_1(-r, y)] \, dy.
\end{aligned}$$

3. Invece sfruttano il teorema di Fubini ed il TFCI in una variabile otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{Q_r} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_2 &= \int_{Q_r} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy \\
&= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-r}^{r} \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx \right) dy + \int_{-r}^{r} \left(\int_{-r}^{r} \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dy \right) dx \\
&= \int_{-r}^{r} [F_1(r, y) - F_1(-r, y)] \, dy + \int_{-r}^{r} [F_2(x, r) - F_2(x, -r)] \, dx.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo mostrato

$$\int_{Q_r} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_2 = \int_{\partial_{\mathrm{reg}} Q_r} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_1 = \int_{\partial Q_r} \langle F, \tilde{\nu} \rangle \, d\mathcal{H}_1,$$

dove $\tilde{\nu}$ è un qualsiasi prolungamento di ν da $\partial_{\mathrm{reg}} Q_r$ a ∂Q_r.

Torneremo a questo tipo di ragionamento per trattare domini Ω con qualche singolarità al bordo nel prossimo paragrafo.

Osservazione 4.1.6 (Sulla notazione per le misure)**.** La presentazione di questi teoremi fondamentali viene fatta di solito prima della teoria di integrazione di Lebesgue e Hausdorff. Quindi il trattamento sfrutta l'integrale di Riemann su Ω ed una teoria di integrazioni su $\partial\Omega$ costruita un pò ad hoc. La teoria che stiamo sviluppando contiene quella classica. Nell'ambito classico, si vede spesso

$$dx \text{ al posto di } d\mathcal{H}_n = dm_n \quad \text{e} \quad dS \text{ oppure } d\sigma \text{ al posto di } d\mathcal{H}_{n-1} \, ,$$

dove dS denota *la misura di superficie* per una superficie parametrizzata da $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ soprattutto nel caso $n = 3$. Si definisce $dS := \sqrt{\det \left([\mathcal{J}_\varphi(u)]^t [\mathcal{J}_\varphi(u)] \right)} \, du$ e si mostra che la misura del sostegno $M = \varphi(U)$ non dipende dalla scelta della parametrizzazione

φ di M.[2] Con queste notazioni abbiamo

$$\text{(TFCI)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f\, \nu_j\, dS$$
$$\text{(IPP)} \qquad \int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} g f\, \nu_j\, dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx$$
$$\text{(TdD)} \qquad \int_\Omega \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle\, dS$$

4.1.2 Dimostrazione del TFCI in più variabili

Ora torniamo alla dimostrazione del Teorema 4.1.1. Ricordiamo che vogliamo mostrare la formula (4.1.1), ovvero

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial\Omega} f\, \nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1},$$

se Ω è un aperto regolare e $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. (del Teorema 4.1.1)
Passo 1: (Spezzare il problema tramite una partizione dell'unità) Sia $\widetilde{\Omega}$ un aperto tale che $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$ e $f \in C^1(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R})$.

1. Esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{R} = \{W_0, W_1, \dots, W_N\}$ di $\overline{\Omega}$ tale che

   (i) $W_0 \subset \overline{W_0} \subset \Omega$;

   (ii) $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} W_i \subset \widetilde{\Omega}$;

   (iii) $\forall\, i \geq 1, W_i = U_i \times V_i$ dove $W_i \cap \Omega$ è un *dominio k-normale* per qualche $k = k(i)$, ovvero
   $$W_i \cap \Omega = SG(g_i) \quad \text{oppure} \quad W_i \cap \Omega = SG^*(g_i)$$
   dove
   $$\begin{array}{rcll} g_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1} & \to & V_i \subset \mathbb{R} & \text{di classe } C^1 \\ \hat{x}_k & \mapsto & x_k = g_i(\hat{x}_k) & \end{array}.$$

   Infatti, basta seguire il ragionamento della Proposizione 4.1.1 usando le proprietà (R1), (R2) e (R3) e sfruttare la compatezza di $\partial\Omega$ e $\overline{\Omega}$.

2. Esiste una partizione dell'unità di classe C^∞ subordinata ad $\mathcal{R}$ e $\overline{\Omega}$, ovvero una collezione $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ tale che

[2] Invece noi abbiamo definito la misura di Hausdorff di M e mostrato che si può calcolarla tramite l'integrale di $d\sigma = d\mathcal{H}_{n-1}$.

(a) $\zeta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{supp}(\zeta_i) \subset W_i, \quad \forall i \geq 0$;

(b) $0 \leq \zeta_i \leq 1, \quad \forall i \geq 0$;

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} \zeta_i \equiv 1$ in $\widetilde{\Omega}$ (cioè in un intorno di $\overline{\Omega}$).

Prendiamo per buono che valga quest'affermazione (v. l'Appendice del paragrafo §3.1 di [3] per una dimostrazione). In realtà, ci serve solo la regolarità C^1 per le funzioni ζ_i e sappiamo già come costruire una partizione dell'unità con funzioni lipschiztiane (Lemma 3.5.1). Il passaggio da Lipschitz a C^∞ sfrutta un processo di regolarizzazione, detto *mollificazione*, che sarà studiato nel corso Analisi Reale. Ci limiteremo a notare solo che il punto cruciale è di integrare una funzione ζ con bassa regolarità contro le traslate di una funzione η liscia a supporto compatto, ovvero la *convoluzione di ζ ed η*.

3. Sfruttando la partizione dell'unità otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=0}^{N} \zeta_i f\right) d\mathcal{H}_n \quad (\text{ dalle proprietà 2(c)})\\
&= \sum_{i=0}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta_i f)\, d\mathcal{H}_n\\
&= \sum_{i=0}^{N} \int_{W_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta_i f)\, d\mathcal{H}_n \quad (\text{ dalle proprietà 2(a)}),
\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{W_0} \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta_0 f)\, d\mathcal{H}_n + \sum_{i=1}^{N} \int_{W_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta_i f)\, d\mathcal{H}_n. \tag{4.1.5}$$

Passo 2: (Trattare il pezzo interno, cioè quello con $i = 0$)

Lemma 4.1.1. *Siano $O \subseteq \mathbb{R}^n$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tali che* $\mathrm{supp}(h)$ *è compatto ed è contenuto in O. Allora*

$$\int_O \frac{\partial h}{\partial x_j}\, dx = 0 \qquad (dx = d\mathcal{H}_n = dm_n). \tag{4.1.6}$$

Dimostrazione. Essendo $\mathrm{supp}(h)$ compatto in O, esiste $M > 0$ tale che $\mathrm{supp}(h) \subset Q_M(0) = [-M, M]^n \subset \mathbb{R}^n$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_O \frac{\partial h}{\partial x_j}\, dx &= \int_{[-M,M]^n} \frac{\partial h}{\partial x_j}\, dx\\
&= \int_{[-M,M]^{n-1}} \left(\int_{-M}^{M} \frac{\partial h}{\partial x_j}(\hat{x}_j, x_j)\, dx_j\right) d\hat{x}_j\\
&= \int_{[-M,M]^{n-1}} \Big(h(\hat{x}_j, M) - h(\hat{x}_j, -M)\Big)\, d\hat{x}_j = 0,
\end{aligned}$$

perché h è nullo in un intorno del bordo di $[-M, M]^n$. □

Osservazione 4.1.7. Se O ha bordo regolare; cioè con versore normale esterno ν ben definita su ∂O, allora essendo $h = 0$ vicino al bordo otteniamo la (4.1.1) con O al posto di Ω:

$$\int_O \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = 0 = \int_{\partial O} h\nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1},$$

ovvero la tesi del teorema per funzioni con supporto compatto all'interno. Inoltre, nel caso che ∂O non fosse regolare, potremmo infilare un aperto regolare Ω fra il supporto di h ed il bordo di O per ottenere la formula (4.1.1) per Ω.

Passo 3: (Trattare i pezzi a cavallo del bordo; cioè $i \geq 1$)

Lemma 4.1.2. *Siano D un dominio k-normale e $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tali che* $\operatorname{supp}(h) \subset U \times (a, b)$ *dove $D = SG(g)$ oppure $SG^*(g)$ con*

$$\begin{array}{rcll} g : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} & \to & (a, b) \subset \mathbb{R} & \textit{di classe } C^1 \\ \hat{x}_k & \mapsto & x_k = g(\hat{x}_k) & \end{array}.$$

Allora

$$\int_D \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial^* D} h\nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1}, \tag{4.1.7}$$

dove $\partial^* D$ è il grafico di g.

La dimostrazione sarà fatta alla fine, ma osserviamo subito che anche qui si tratta di un caso particolare del teorema.

Osservazione 4.1.8. Essendo $h = 0$ su $\partial D \setminus \partial^* D$ abbiamo la formula 4.1.1) per $\Omega = D$ nel senso che

$$\int_D \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial_{\mathrm{reg}} D} h\nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1} = \int_{\partial D} h\tilde{\nu}_j\, d\mathcal{H}_{n-1},$$

dove $\tilde{\nu}$ è un qualsiasi prolungamento di ν da $\partial_{\mathrm{reg}} D$ a ∂D.

Passo 4: (Assemblare i pezzi) Dalla formula (4.1.5) del Passo 1 abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n &= \int_{W_0} \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta_i f)\, d\mathcal{H}_n + \sum_{i=1}^{N} \int_{W_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta_i f)\, d\mathcal{H}_n \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{N} \int_{W_i \cap \partial\Omega} \zeta_i f \nu_j \, d\mathcal{H}_{n-1} \quad \text{(Lem. 4.1.1 e Lemma 4.1.2)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \int_{W_i \cap \partial\Omega} \zeta_i f \nu_j \, d\mathcal{H}_{n-1} \quad (\zeta_0 = 0 \text{ su } \partial\Omega) \\
&= \sum_{i=0}^{N} \int_{\partial\Omega} \zeta_i f \nu_j \, d\mathcal{H}_{n-1} \quad (\operatorname{supp}(\zeta_i) \subset W_i) \\
&= \int_{\partial\Omega} f \nu_j \, d\mathcal{H}_{n-1},
\end{aligned}$$

perché $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} \zeta_i \equiv 1$ su $\overline{\Omega}$. Questo completa la dimostrazione del teorema modulo la dimostrazione del Lemma 4.1.2. □

Dimostrazione. (del Lemma 4.1.2) Trattiamo esplicitamente solo il caso di un dominio k-normale $D = SG(g)$. Il caso $D = SG^*(g)$ è del tutto analogo. La dimostrazione si spezza in due casi. Il caso facile $k = j$ dove la derivata parziale è presa nella direzione di normalità del dominio e il caso meno facile dove $k \neq j$

Il caso $k = j$: Qui l'argomentazione è molto simile a quella usata per l'Esempio 4.1.2 dove $\Omega = Q_r \subset \mathbb{R}^2$.

- Usando il teorema di Fubini ed il TFCI in una variabile otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n &= \int_U \left(\int_a^{g(\hat{x}_j)} \frac{\partial h}{\partial x_j}\, dx_j \right) d\hat{x}_j \\
&= \int_U \Big(h(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j)) - h(\hat{x}_j, a) \Big)\, d\hat{x}_j \\
&= \int_U h(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j))\, d\hat{x}_j
\end{aligned}$$

  perché $h = 0$ sul "lato inferiore" di ∂D dove $\hat{x}_j = a$.

- Per calcolare $\displaystyle\int_{\partial^* D} h \nu_j \, d\mathcal{H}_{n-1}$ dove $\partial^* D$ è il grafico di g e $D = SG(g)$ sappiamo che

$$\nu(x) = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \quad \text{dove} \quad \Phi(x) = \Phi(\hat{x}_j, x_j) = x_j - g(\hat{x}_j).$$

Quindi su $\partial^* D$ risulta

$$\nu_j = \frac{\partial_{x_j}\Phi}{|\nabla\Phi|} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(\hat{x}_j)|^2}} \quad \text{e} \quad d\mathcal{H}_{n-1} = \sqrt{1+|\nabla g(\hat{x}_j)|^2}\, d\hat{x}_j$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\partial^* D} h\nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1} &= \int_U h(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j)) \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(\hat{x}_j)|^2}} \sqrt{1+|\nabla g(\hat{x}_j)|^2}\, d\hat{x}_j \\ &= \int_U h(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j))\, d\hat{x}_j.\end{aligned}$$

Il caso $k \neq j$: Qui non possiamo applicare banalmente il TFCI in una variabile. Invece, il punto cruciale è di sfruttare la derivazione sotto il segno di integrale.

- Cominciamo con l'integrale su D

$$\int_D \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_U \left(\int_a^{g(\hat{x}_k)} \frac{\partial}{\partial x_j} h(\hat{x}_k, x_k)\, dx_k \right) d\hat{x}_k. \tag{4.1.8}$$

Essendo $h \in C^1$ e D limitato, possiamo derivare sotto il segno di integrale

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_a^{g(\hat{x}_k)} h(\hat{x}_k, x_k)\, dx_k \right) = h(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k) + \int_a^{g(\hat{x}_k)} \frac{\partial h}{\partial x_j}(\hat{x}_k, x_k)\, dx_k. \tag{4.1.9}$$

Inserendo la (4.1.9) nella (4.1.8) otteniamo

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n &= \int_U \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_a^{g(\hat{x}_k)} h(\hat{x}_k, x_k)\, dx_k \right) - h(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k) \right] d\hat{x}_k \\ &= -\int_U h(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k)\, d\hat{x}_k + \int_U \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_a^{g(\hat{x}_k)} h(\hat{x}_k, x_k)\, dx_k \right) \right] d\hat{x}_k \\ &:= -\int_U h(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k)\, d\hat{x}_k + I(D).\end{aligned}$$

Usando il Lemma 4.1.1 si mostra che l'integrale $I(D)$ è nullo. Infatti, la funzione $H : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definita da

$$H(\hat{x}_k) = \begin{cases} 0 & \hat{x}_k \notin U \\ \int_a^{g(\hat{x}_k)} h(\hat{x}_k, x_k)\, dx_k & \hat{x}_k \in U \end{cases}$$

risulta di classe C^1 con $\mathrm{supp}(H) \subset U$. Applicando il Lemma 4.1.1 otteniamo

$$I(D) = \int_U \frac{\partial H}{\partial x_j}\, d\hat{x}_k = 0.$$

In definitiva risulta

$$\int_D \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = -\int_U h(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k)\, d\hat{x}_k. \tag{4.1.10}$$

- Per l'integrale su $\partial^* D$ (il grafico di g su U) notiamo che

$$\nu_j = -\frac{\partial_{x_j} g(\hat{x}_j)}{\sqrt{1 + |\nabla g(\hat{x}_k)|^2}} \quad \text{e} \quad d\mathcal{H}_{n-1} = \sqrt{1 + |\nabla g(\hat{x}_k)|^2}\, d\hat{x}_k.$$

Quindi

$$\int_{\partial^* D} h\nu_j \, d\mathcal{H}_{n-1} = -\int_U h(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_j)\, d\hat{x}_k,$$

ovvero la (4.1.10).

□

4.2 Generalizzazioni ed applicazioni

In questo paragrafo conclusivo, vogliamo approfondire l'argomento dell'utilizzo dei teoremi fondamentali. In particolare, vogliamo

1. Introdurre una classe di aperti che non sono regolari ma per cui continua a valere i teoremi fondamentali. Vogliamo una classe abbastanza ampia per facilitare la risoluzioni di esercizi concreti con domini semplici ma singolari.
2. Approfondire l'applicazione al calcolo integrale delle misure di Hausdorff di insiemi in $\mathbb{R}^n$.
3. Indicare diverse importanti applicazioni del teorema della divergenza ed integrazione per parti.

4.2.1 Domini non regolari

Osservazione 4.2.1. Nell'Esempio 4.1.2 abbiamo già visto che per $\Omega = Q_r \subset \mathbb{R}^2$ e $F \in C^2(\overline{Q}_r, \mathbb{R}^2)$ che vale il teorema della divergenza nella forma

$$\int_{Q_r} \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_2 = \int_{\partial_{\text{reg}} Q_r} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_1 = \int_{\partial Q_r} \langle F, \tilde{\nu} \rangle \, d\mathcal{H}_1, \tag{4.2.1}$$

dove $\tilde{\nu}$ è un qualsiasi prolungamento del versore normale esterno ν da $\partial_{\text{reg}} Q_r$ a ∂Q_r.

Una classe di domini che include quest'esempio è fornita dalla definzione seguente.

Definizione 4.2.1. Siano $n \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, limitato con $\operatorname{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$. Ω è detto *aperto ammissibile* se esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_q \cup S$ dove:

(A1) per ogni $k = 1, \ldots, q$, Σ_k è relativamente aperto in $\partial\Omega$;

(A2) per ogni $k = 1, \ldots, q$, esiste una $(n-1)$ varietà M_k di classe C^1 tale che $\overline{\Sigma}_k \subset M_k$;

(A3) S è compatto e contenuto in un'unione finita di $(n-2)$-varietà;

(A4) $\overline{\Sigma}_k \cap \overline{\Sigma}_j \subset S$ per ogni $k \neq j$.

In tal caso diciamo che il bordo $\partial\Omega$ è C^1 *a tratti*, denotiamo la *parte regolare di* $\partial\Omega$ con

$$\partial_{\text{reg}}\Omega = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_q \tag{4.2.2}$$

e diciamo che S è la *parte singolare di* $\partial\Omega$.

Consideriamo qualche esempio.

Esempio 4.2.1. Sia $\Omega = Q_r$ il quadrado dell'Esempio 4.1.2. Ω è un aperto ammissibile secondo la Definzione 4.2.1. Infatti abbiamo $\{\Sigma_k\}_{k=1}^4 = \{(A,B),(B,C),(D,C),(A,D)\}$ e $S = \{A,B,C,D\}$ e valgono tutte le richieste della definzione.

Esempio 4.2.2. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a < x < b, \ \alpha(x) < y < \beta(x), \ \alpha,\beta \in C^1([a,b])\}$. È evidente che Ω è ammissibile ed è anche detto *dominio normale rispetto alle asse x*. Ovviamente, esistano anche domini normali rispetto alle asse y dove si scambiano i ruoli di x e y.

Esempio 4.2.3. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in U, \ \alpha(x,y) < z < \beta(x,y), \ \alpha,\beta \in C^1(\overline{U})\}$. Se $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto ammissibile, allora è evidente che $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è ammissibile. L'insieme Ω è anche detto *dominio normale rispetto alle asse z*. Ovviamente, esistano anche domini normali rispetto alle asse x (rispettivamente y) dove si scambiano i ruoli di z e x (rispettivamente y).

Osservazione 4.2.2. Notiamo che se la funzione α è costante, i domini Ω negli Esempi 4.2.2 e 4.2.3 sono domini 2 normali e 3- normali rispettivamente secondo la Definizione usata nel Passo 1 della dimostrazione del Teorema 4.1.1. Più precisamente sono della forma $SG(\beta)$ con la richiesta di una certa regolarità del bordo di U nel caso $n = 3$. Questa regolarità in più viene usata per dimostrare il teorema fondamentale <u>senza</u> l'ipotesi che h ha supporto compatto. Questi domini normali sono quelli usati tipicamente come "blocchi di costruzione" per domini ammissibili in un trattamento basato solo sulla teoria di integrazione secondo Riemman.

Enunciamo una versione dei teoremi fondamentali utile soprattutto per svolgere gli esercizi.

Teorema 4.2.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ammissibile. Allora*

(a) Per ogni $j = 1, \ldots, n$ e per ogni $f \in C^1(\overline{\Omega}), \mathbb{R})$ si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial_{\text{reg}}\Omega} f\nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1} = \sum_{k=1}^q \int_{\Sigma_k} f\nu_j\, d\mathcal{H}_{n-1},$$

dove $\partial\Omega = \partial_{\text{reg}}\Omega \cup S$ e $\partial_{\text{reg}}\Omega = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_q$.

(b) Per ogni $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, d\mathcal{H}_n = \int_{\partial_{\mathrm{reg}}\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1} = \sum_{k=1}^{q} \int_{\Sigma_k} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1},$$

Osservazione 4.2.3. Ovviamente esiste anche una versione di integrazione per parti per domini ammissibili. Inoltre, al posto degli integrali su $\partial_{\mathrm{reg}}\Omega$ si può usare un'integrale su $\partial\Omega$ con una qualsiasi prolungamento $\tilde{\nu}$ di ν da $\partial_{\mathrm{reg}}\Omega$ a $\partial\Omega$.

Non dimosteremo questo risultato. Ci limitermo a notare che la dimostrazione viene fatta:

1. facendo una decomposizione di Ω ammissibile in un numero finto di domini normali (v. Esempi 4.2.2 e 4.2.3);

2. adattando la dimostrazione del Lemma 4.1.2 tenendo conto dei contributi "nuovi" su $\partial U \times (a, b)$ e $U \times \{a\}$.

Anche se questa versione è abbastanza generale, esistono dei domini semplici per cui valgono i teoremi principali ma cadono fuori la classe dei domimi ammissibili.

Esempio 4.2.4. Sia Ω il cono in R^3 definito da $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}$.

- È evidente che Ω non è né un aperto regolare né un aperto ammissibile. Il bordo non è una 2-varietà per la presenza del vertice nell'origine, quindi manca la proprietà (R3) di un aperto regolare. Inoltre, la parte regolare di $\partial\Omega$ è fatta di due pezzi: Σ_1 il disco a quota $z = 1$ e Σ_2 la parte laterale dove $0 < z < 1$. Manca la proprietà (A2) di un aperto ammissibile perché la chisura di Σ_2 contiene il vertice e non esiste una 2-varietà M_2 di classe C^1 tale che $\overline{\Sigma}_2 \subset M_2$.

- Comunque, abbiamo i teoremi fondamentali anche per domini con singolarità di questo tipo. Ad esempio, consideriamo il teorema fondamentale del calcolo integrale per Ω. L'insieme

  $$\Omega_\varepsilon := \Omega \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

  è chiramente un aperto ammissibile con tre pezzi regolari (i due dischi a quota $z = \varepsilon, 1$ e la parte laterale con $\varepsilon < z < 1$) e due pezzi singolari (le due circonferenze a quota $z = \varepsilon, 1$). Quindi per ogni $f \in C^1(\overline{\Omega})$ e per ogni $j = 1, 2, 3$ abbiamo

  $$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, d\mathcal{H}_3 = \int_{\partial_{\mathrm{reg}}\Omega_\varepsilon} f \nu_j \, d\mathcal{H}_2.$$

ovvero
$$\int_{\Omega} \chi_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, d\mathcal{H}_3 = \int_{\partial_{\mathrm{reg}}\Omega} \chi_{\partial_{\mathrm{reg}}\Omega_\varepsilon} f \nu_j \, d\mathcal{H}_2.$$

Essendo $f \in C^1(\overline{\Omega})$ possiamo applicare il teorema sulla convergenza dominata e passare al limite per $\varepsilon \to 0^+$. Risulta
$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, d\mathcal{H}_3 = \int_{\partial_{\mathrm{reg}}\Omega} f \nu_j \, d\mathcal{H}_2.$$

Da questo segue anche le formula di integrazione per parti ed il teorema di divergenza per il cono.

Bibliografia

[1] N. Fusco, P. Marcellini, and C. Sbordone. *Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni*. Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[2] E. Giusti. *Analisi Matematica 2, Terza edizione*. Bollati Boringhieri, Torino, 2003.

[3] E. Lanconelli. *Lezioni di Analisi Matematica 2: Seconda Parte*. Pitagora Editore, Bologna, 1997.

[4] E. Lanconelli. *Lezioni di Analisi Matematica 2: Prima Parte (Seconda edizione)*. Pitagora Editore, Bologna, 2000.

[5] G. Molteni and M. Vignati. *Analisi Matematica 3*. CittàStudi Edizioni, Milano, 2006.

[6] E. Stein and R. Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, volume III of *Princeton Lectures and Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[7] R. L. Wheeden and A. Zygmund. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, volume 43 of *Pure and Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1977.