

**Esercizi per il Corso Avanzato**  
**di Analisi Matematica II - a.a. 2006/2007**  
**C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni**  
*Prof. K. Payne e Dott. L. Vesely*

**Esercizio 1.** Sia  $K \subset (X, d)$  compatto. Mostrare che  $K$  è chiuso e limitato.

**Esercizio 2.** Mostrare che ogni spazio metrico compatto è completo; cioè successioni di Cauchy convergono.

**Esercizio 3.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione tra spazi metrici. Il suo *grafico* è definito nel solito modo

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

a) Mostrare che il prodotto cartesiano  $X \times Y$  di due spazi metrici è uno spazio metrico con la metrica

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{[d_X(x_1, x_2)]^2 + [d_Y(y_1, y_2)]^2}.$$

b) Sia  $Y$  compatto. Mostrare che  $f$  è continua se e solo se il grafico è un sottoinsieme chiuso di  $X \times Y$ .

c) Trovare un esempio che mostri che l'ipotesi di  $Y$  compatto non può essere, in generale, tolta.

**Esercizio 4.** Trovare i massimi e minimi assoluti (se esistono) per  $f$  su  $E$ .

a)  $f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$  su  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ .

b)  $f(x, y) = |x|^{1/4} + |y|^{1/4}$  su  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Esercizio 5.** Siano  $K \subset (X, d)$  un insieme compatto e  $x \in X \setminus K$ . Mostrare che esiste  $y \in K$  che minimizza la distanza da  $x$ ; cioè esiste  $y \in K$  tale che

$$d(x, y) \leq d(x, z) \quad \text{per ogni } z \in K.$$

**Esercizio 6.** Sia  $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua su  $A$  chiuso con  $\infty$  un punto di accumulazione per  $A$ . Mostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f \text{ ammette minimo globale in } A.$$

Vale anche il risultato analogo per un massimo se il limite vale  $-\infty$ .

**Esercizio 7.** Consideriamo l'estremo inferiore della funzione  $f = f(x) = e^{-\|x\|}$  su sottoinsiemi  $E$  di  $\mathbf{R}^n$ .

- a) Verificare che  $f$  è limitata inferiormente su ogni  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ .
- b) Si chiama *successione minimizzante per  $f$  in  $E$*  una successione  $x_n \in E$  per cui  $f(x_n) \rightarrow \inf_E(f)$ . Nel caso  $E = \overline{B}_R(0)$ , mostrare che ogni successione minimizzante ammette sottosuccessione convergente. In tal caso l'estremo inferiore di  $f$  è un minimo. Questo succede per ogni  $E$  con quale proprietà?
- c) Cosa succede nei casi  $E = \mathbf{R}^n$  oppure  $E = \mathbf{R}^n \setminus B_r(0)$ ?

**Esercizio 8.** Determinare se i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^n$  sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi, connessi per archi.

- a)  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + \cos y > 1\}$ .
- b)  $E = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq \frac{4xy^2}{x^2+y^4} \right\}$ .

**Esercizio 9.** Determinare se i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^n$  sono connessi, connessi per archi.

- a)  $\mathbf{Q} \cap (0, 1) \subset \mathbf{R}$
- b)  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- c)  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 1\}$ .

**Esercizio 10.** Mostrare che il *deleted comb space*  $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  definito da

$$\mathcal{D} = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (K \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times \{1\})$$

dove  $K = \{1/j, j \in \mathbf{N}\}$  è connesso ma non connesso per archi.

**Esercizio 11.** Mostrare le seguenti affermazioni.

- a)  $E \subset (X, d)$  connesso implica che la sua chiusura  $\overline{E}$  è connessa.
- b) Se  $\{E_i : i \in \mathbf{N}\}$  è una collezione di insiemi connessi tale che esiste un punto in comune; cioè  $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} E_i \neq \emptyset$ , allora la loro unione  $E = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} E_i$  è connessa.

**Esercizio 12.** Sia  $f : E \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  continua. Mostrare che  $E$  connesso per archi implica  $f(E)$  connesso per archi.

**Esercizio 13.** Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  continua t.c.  $f(0,0) = 4$  e  $f(x,y) \sim g(x,y)$  per  $\|(x,y)\| \rightarrow +\infty$  dove

$$g(x,y) = \frac{x^2 y \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Esiste  $(x_0, y_0)$  per cui  $f(x_0, y_0) = 2$ ? Giustificare la risposta.

**Esercizio 14.** Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $f(x,y,z) = x^2 - y^4 - z^3$ . Determinare l'immagine  $f(\mathbf{R}^3)$ .

**Esercizio 15.** Diciamo che una funzione  $f : \mathcal{U} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  è *localmente costante su un aperto*  $\mathcal{U}$  se per ogni  $x \in \mathcal{U}$  esiste un intorno  $B_r(x) \subset \mathcal{U}$  su cui  $f$  è costante.

- a) Dare un esempio di  $f$  localmente costante ma non costante.
- b) Sia  $f$  continua e  $\varphi : [0,1] \rightarrow \mathcal{U}$  un cammino continuo. Mostrare che l'insieme

$$T = \{t \in [0,1] : f(\varphi(t)) = f(\varphi(0))\} \subset \mathbf{R}$$

ha massimo.

- c) Sia  $f : \mathcal{U} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  localmente costante su  $\mathcal{U}$  connesso per archi. Usando la parte b), mostrare che  $f$  è costante in  $\mathcal{U}$ .

**Esercizio 16.** Si chiama *omeomorfismo* una mappa  $\Phi : X \rightarrow Y$  continua, biettiva con inversa  $\Psi = \Phi^{-1} : Y \rightarrow X$  continua. Per le seguente copia di insiemi, mostrare che **non** è possibile trovare un omeomorfismo tra loro (con la loro topologia euclidea). **Suggerimento:** Considerare una restrizione opportuna di  $\Phi$  o  $\Psi$  togliendo un punto dal dominio e codominio.

- a)  $X = (0,1)$  e  $Y = (0,1]$  in  $\mathbf{R}$ .
- b)  $X = \mathbf{R}^n$  e  $Y = \mathbf{R}$  dove  $n > 1$ .