

**Esercizi di Ricapitolazione**  
**di Analisi Matematica II - a.a. 2006/2007**  
**C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni**  
*Prof. K. Payne*

**I. Calcolo Integrale.**

**Primitive.**

1. Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione definita in un intervallo  $I$ . Dare delle condizioni sufficienti affinché  $f$  ammette delle primitive in  $I$ . Sono necessarie?
2. Trovare tutte le primitive di  $f(x) = x^{-1/2} \log(1+x)$  per  $x > 0$ .
3. Trovare tutte le primitive di  $f(x) = \sin(|x|)$  in  $I = [-2, 4]$ .
4. Trovare i valori del parametro  $\alpha$  per cui  $f$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & x < 1 \\ \alpha x^2 - x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

ammette primitiva in  $\mathbf{R}$ . Poi calcolare tutte le primitive.

**Integrale di Riemann ed Applicazioni**

1. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione limitata. Elencare delle condizioni sufficienti affinché  $f$  sia integrabile secondo Riemann. Illustrare con controesempi quelli condizioni che *non* siano necessarie.
2. Calcolare l'integrale definito  $\int_0^\pi \sqrt{1+4x^2} dx$ .
3. Calcolare il valor medio della funzione  $f(x) = x \arctan x$  su  $[-1, 1]$ .
4. Calcolare l'area della regione **limitata** contenuta fra i grafici delle funzioni  $f(x) = 4 - |x|$  e  $g(x) = x^2$ .
5. Trovare la distanza percorsa  $s(3)$  al tempo  $t = 3$  di un moto con funzione di velocità  $v(t) = e^t \sin t$  se  $s(0) = 1$ .

**Integrali Impropri e Funzioni Integrali**

1. Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione non necessariamente limitata su un intervallo non necessariamente limitato. Elencare delle condizioni sufficienti affinché  $f$  sia integrabile secondo Riemann. Illustrare con controesempi quelli condizioni che *non* siano necessarie.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale  $\alpha$  converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^{-\alpha})}{\sqrt[3]{(1 + \log^2 x) \log(1 + x^{2\alpha})}} dx.$$

3. Calcolare (se esiste) il valore del integrale improprio  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  se

$$f(x) = \min\{\log x, (e/x)^2\}.$$

4. A variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ , determinare il dominio della funzione integrale

$$F_a(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{(t^2 - 6t + 5) \log(1 + \sqrt{t})} dt.$$

5. Fare uno studio qualitativo della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{\arctan(t^3(t-1))}{t(1+t^3)} dt$$

includendo il dominio di definizione, comportamento al bordo del dominio di definizione, monotonia, eventuali estremanti, eventuali asintoti.

6. Data la funzione integrale

$$F(x) = 2 + \int_{x^2-4x}^{\log(x/4)} \frac{e^{t^2}}{t+1} dt$$

determinare l'intervallo massimale  $I$  che contiene  $x = 4$  per cui  $F$  è definita. Trovare (se esiste) l'equazione della retta tangente al grafico di  $F$  nel punto  $(4, F(4))$ .

## II. Serie Numeriche

### Calcolo della somma di una serie.

- Calcolare la somma della serie  $\sum_{n=3}^{+\infty} e^{-2n}(e^{-2} \log(n+1) - \log(n))$ .
- Trovare i valori di  $\alpha$  per cui  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha^2 + 1)^{-n}}{4} < 1$ .

### Convergenza delle serie.

- Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie a termini non negativi. Elencare delle condizioni sufficienti affinché la serie sia convergente.

2. Al variare del parametro reale  $\alpha$  discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^2 + \sqrt[3]{n}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((1+1/n)^n - e)^\alpha}{\log(1+n^{\alpha/2})}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2x+3}{x^2+1} \right)^n$$

### III. Limiti e Continuità

1. Calcolare (se esistono) i limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2} - e^{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(\sin x - \sin y)}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

2. Calcolare (se esistono) i limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\log(1+|xy|)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} y e^{-x^2}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} (x+y) e^{-2x^2 - 5y^2}.$$

3. Sia  $A$  l'insieme definito da

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : 1 < \frac{4xy^3}{x^2 + y^6} \leq 4 \right\}.$$

Decidere quale delle seguenti affermazioni siano vere:  $A$  è limitato,  $A$  è aperto,  $A$  è chiuso.

### IV. Calcolo Differenziale

#### Derivabilità e Differenziabilità

1. Discutere **brevemente** la relazione fra le proprietà di continuità, esistenza delle derivate parziali, derivabilità direzionale, differenziabilità, continuità delle derivate parziali per una funzione  $f$  definita in un intorno di  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ .

2. Discutere la continuità, derivabilità direzionale, differenziabilità per le funzioni:

$$f(x, y) = \sqrt{|y-3|} \log(1+x)$$

$$g(x, y) = |(x^2 - y^2)x|$$

$$u(x, y) = \begin{cases} (\sin y) \arctan\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Sia  $f(x, y, z) = x^2 \log(yz) + e^{3x-z^2}$ . Calcolare la derivata direzionale  $D_v f(0, 1, 1)$  con  $v = (3, -1, 2)/\sqrt{14}$ . Trovare l'equazione del iperpiano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, 1, 1, f(0, 1, 1))$ .

### Derivate delle Funzioni Composte ed Equazioni alle Derivate Parziali

1. Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione di classe  $C^1$  tale che  $f(2, 0) = 3$  e  $\nabla f(2, 0) = (2, 4)$ . Trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $g(x) = f(x^2 + 1, \log x)$  nel punto  $(1, g(1))$ .
2. Siano  $(u, v) = f(x, y, z) = (xz \log y, \sinh(x^2 z + y))$  e  $(s, t) = g(u, v) = (e^u v^2, \cos(u^2 + v))$ . Calcolare

$$\frac{\partial s}{\partial y}(x, y, z); \quad \frac{\partial t}{\partial z}(x, y, z); \quad D(g \circ f)(0, 1, 1).$$

3. Trovare una soluzione  $u = u(x, y)$  del problema

$$\begin{cases} \text{(EDP)} & yu_x - xu_y = 0 & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \\ \text{(CS)} & u(x, 0) = e^{-x^2} & x > 0 \end{cases}$$

**Suggerimento:** Per prima cosa, mostrare che  $u = g(x^2 + y^2)$  è una soluzione di classe  $C^1$  dell'equazione alle derivate parziali (EDP) per ogni  $g$  di classe  $C^1$ . Poi scegliere  $g$  per soddisfare la condizione supplementare (CS)

### Formula di Taylor ed Estremi Locali

1. Discutere la differenziabilità del primo e secondo ordine nell'origine per la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y+1}} - y\sqrt{1+x}$$

e scrivere (se hanno senso) le formule di Taylor del primo e secondo ordine centrato in  $(0, 0)$  con il resto di Peano.

2. Al variare del parametro reale  $\alpha$  trovare gli eventuali estremanti locali per la funzione  $f(x, y) = x^2 + 2xy + (\alpha + 1)y^2 - y^4/2$ .
3. Trovare gli eventuali estremanti locali per le funzioni

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + 3x^2 + 5y^2}; \quad ; \quad g(x, y) = |xy|(x - y - 1); \quad h(x, y) = y^3(x - y^2)(x - 3)$$

$$F(x, y, z) = \int_1^{xyz^2} \frac{e^{-t^2}}{t+3} dt$$

## V. Equazioni Differenziali

### Equazioni del Primo Ordine

1. Discutere l'esistenza e l'unicità del problema di Cauchy

$$y' = \sqrt{y(x+2)}; \quad y(x_0) = y_0$$

al variare dei parametri  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ . Calcolare poi le soluzioni indicando il più ampio intervallo di definizione. Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = 1 + y \left( 2x - \frac{1}{x} \right); \quad y(1) = \frac{1}{4}$$

3. Discutere l'esistenza e l'unicità del problema di Cauchy

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^3}{y^3}; \quad y(1) = a$$

al variare del parametro reale  $a$ . Calcolare poi la soluzione nel caso  $a = -1$  indicando il più ampio intervallo di definizione.

4. Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy va variare il parametro reale  $a$

$$y' + \frac{y}{x^2 + 1} + \frac{xy^2}{x^3 + 1} = 0; \quad y(0) = a.$$

Stabilire poi per quali valori di  $a$  la soluzione è ben definita solo su un intervallo limitato.

**N.B.** Non è detto che si riesca ad esplicitare completamente la soluzione. In tal caso, si fa un'analisi del dominio d'esistenza della soluzione in forma implicita.

### Equazioni di Ordine Superiore

1. Determinare per quali valori del parametro  $a \in \mathbf{R}$  la soluzione del problema di Cauchy:

$$y'' - 2ay + 9y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1/3$$

sia limitata su  $(-2, +\infty)$ .

2. Data l'equazione differenziale  $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 x$ , trovare tutte le soluzioni e poi discutere l'esistenza e l'unicità del problema al contorno a variare dei parametri reali  $a, b$ :

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 x; \quad y(0) = a; \quad y(\pi) = b.$$