Analisi Matematica II

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Università di Milano

Anno Accademico 2008-2009

Kevin R. Payne

July 20, 2009

Capitolo 1

L'Integrale di Riemann

Consultare le dispense dei Proff. Salvatori e Vignati [4]

Capitolo 2

Serie Numeriche

Consultare le dispense dei Proff. Salvatori e Vignati [4]. Inoltre, la dimostrazione del Teorema di Riemann-Dini (v. Teorema 3.54 di [5]) è stata dichiarata facoltativa.

Capitolo 3

Funzioni di Più Variabili

Oltre alle dispense dei Proff. Salvatori e Vignati [4], proponiamo la seguente versione abbastanza fedele a quella fatta a lezione. In particolare, si noterà la presenza centrale del concetto di spazio metrico e l'uso di un linguaggio più esplicitamente topologico. Inoltre usiamo delle notazioni diverse per funzioni di più variabili (vettori saranno indicati con una lettera solo x, al posto di $\underline{x}$, ad esempio.)

N.B. Gli spazi metrici sono stati introdotti quest'anno (a.a. 2008-2009) nel corso di Analisi I. Quindi molto (ma **NON** tutto) di quello che si trova nei paragrafi 3.3 e 3.4 potrebbe essere considerato come un richiamo. In particolare, il Teorema 3.4.4 (Limiti e restrizioni) giocherà un ruolo fondamentale per noi e non è stato fatto in Analisi I. Il paragrafo 3.5 è tutto nuovo ed è obbligatorio. Invece, il discorso sulla compattezza, connessione, completezza (nei paragrafi 3.6-3.8) è facoltativo per il corso ordinario (7cfu) ma è obbligatorio per il corso avanzato (8cfu).

3.1 Introduzione.

Il nostro obiettivo principale è studiare una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

a *valori vettoriali di più variabili reali.* In particolare, ci interessano questioni di

- limiti e continuità;
- differenziabilità ed applicazioni;
- integrabilità ed applicazioni.

Il primo argomento sarà trattato completamente in Analisi II, il secondo argomento sarà iniziato qui è concluso in Analisi III, e il terzo argomento forma una buona parte dei programmi di Analisi III e IV. Il nostro punto di vista è chiederci: data una funzione qualsiasi

$$f : A \subseteq X \to Y$$

fra insiemi X ed Y, quando è possibile definire concetti di *limite, continuità, differenziabilità*, etc.? Cioè non vogliamo aver bisogno di "inventare la ruota" ogni volta che cambiamo il contesto del dominio X o codominio Y. Conosciamo bene, per adesso, solo il caso <u>molto</u> particolare di $X = Y = \mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ è un *campo ordinato, completo* e anche uno *spazio vettoriale di dimensione 1.* Abbiamo usato alcune strutture degli spazi $X = Y = \mathbb{R}$, anche se l'utilizzo di tali strutture non è sempre stato esplicito. Per trattare le cose in modo generale diventa essenziale rendere esplicite le strutture necessarie a definire i vari concetti. Ci servono

1. Strutture algebriche;
2. Strutture geometriche;
3. Strutture topologiche.

Inoltre, vogliamo cercare di capire quando uno o più elementi tra questi entra in gioco.

3.2 Lo Spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$.

Definizione 3.2.1. *Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è l'insieme*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2 \dots, n\} \\ &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R},\end{aligned}$$

ovvero il prodotto cartesiano n-esimo di $\mathbb{R}$ con se stesso. Si chiamano <u>*vettori*</u> *gli elementi x e* <u>*componenti*</u> *di x i numeri $x_k = (x)_k$.*

Si noti che spesso vengono utilizzate altre notazioni: ad esempio, nella dispensa [4] si usa $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, per ricordare in modo esplicito che x ha almeno due componenti. Si può trovare anche $\vec{x}$, o $\mathbf{x}$. La nostra scelta forse richiede uno sforzo in più per ricordare dove "vivono" i vari oggetti. D'altre parte, questo sforzo è utile in sé e consente una notazione più snella; soprattutto quando si parlerà di limiti. Si noti anche che abbiamo introdotto delle *funzioni coordinate*

$$(\,\cdot\,)_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{dove} \quad (x)_k := x_k.$$

Proposizione 3.2.2. ($\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale) *Le operazioni*

$$(x + y)_k = (x)_k + (y)_k = x_k + y_k, \quad x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$$(\lambda x)_k = \lambda (x)_k = \lambda x_k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R},$$

definiscono una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}^n$.

Questo è un risultato noto da Geometria I e quindi ne omettiamo la dimostrazione. Però ricordiamo:

1. Gli elementi neutri sono $0 = (0, \dots, 0)$ per la somma e $1 \in \mathbb{R}$ per la moltiplicazione per scalari.
2. La dimensione $\dim \mathbb{R}^n = n$; ovvero, esistono n vettori linearmente indipendenti ma ogni collezione di m vettori con $m > m$ è linearmente dipendente.
3. La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è data da $\{e^j : \quad j = 1, \dots n\}$ dove $(e^j)_k = \delta_{jk}$ dove δ_{jk} è la delta di Kronecker (vale uno se $j = k$ e zero per $j \neq k$).

Proposizione 3.2.3. (Prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$) *La mappa $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \tag{3.2.1}$$

è un <u>*prodotto scalare*</u>*; cioè valgono:*

i) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n,$

iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$

iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Cioè, il prodotto scalare è una forma bilineare e simmetrica per cui la forma quadratica $Q(x) = \langle x, x\rangle$ è positiva definita, come è noto da Geometria I. Chiamiamo il prodotto scalare definito da (3.1) *prodotto scalare euclideo*. Notiamo anche che:

1. Il prodotto scalare è *non-degenere*, nel senso che $\langle x, y\rangle = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ implica $x = 0$.
2. Esistono altri prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$: ad esempio, per ogni matrice reale $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(n \times n)$ simmetrica e definita positiva (rispetto al prodotto scalare euclideo), cioè t.c.
$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots n$$
$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$\langle Ax, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$
possiamo definire un prodotto scalare come $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Dato un prodotto scalare, possiamo introdurre una geometria in $\mathbb{R}^n$, ovvero possiamo parlare di *lunghezza di vettori* ed *angoli fra vettori*. Il concetto di lunghezza è legato al concetto di norma. Anche se questa nozione è già stata introdotta in Geometria II, presentiamo una trattazione completa di quello che ci servirà.

Proposizione 3.2.4. ($\mathbb{R}^n$ come spazio normato) *La mappa* $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \tag{3.2.2}$$

definisce una norma nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$*; cioè valgono:*

i) $||x|| \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $||x|| = 0$ *se e solo se* $x = 0$

ii) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||, \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

Prima della dimostrazione, notiamo che la proprietà iii) sopra viene chiamata la *disuguaglianza triangolare* ed è la base della geometria nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Questa importante proprietà segue dalla seguente disuguaglianza che fornisce un legame fra il prodotto scalare e la norma.

Proposizione 3.2.5. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *In* $\mathbb{R}^n$ *vale la seguente disuguaglianza*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2.3}$$

Dimostrazione: La funzione $P(t) := ||x + ty||^2$ è un polinomio di secondo grado in t. Infatti, usando le proprietà del prodotto scalare, si trova

$$\begin{aligned} P(t) &= \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, ty\rangle + \langle ty, ty\rangle \\ &= ||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2||y||^2. \end{aligned}$$

Per definizione, $P(t) \geq 0$ per ogni t: quindi, esiste al più una soluzione dell'equazione $P(t) = 0$. Il discriminante, pertanto, deve essere non positivo, ovvero

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2||y||^2 \leq 0,$$

da cui segue $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$. $\square$

Dimostrazione: (della Prop. 3.2.4) Le affermazioni i) e ii) seguono direttamente dalla formula (3.2.2) per la norma. Invece, per mostrare la disuguaglianza triangolare, notiamo che basta mostrare

$$||x + y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2$$

Semplificando, basta mostrare

$$\langle x, y\rangle \leq ||x||\,||y||,$$

che segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dal fatto banale che $\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$. $\square$

Osservazione 3.2.6. (Lunghezza ed angoli) Come è stato già notato, la norma ed il prodotto scalare forniscono le definizioni di questi concetti geometrici. Il valore $||x||$ viene detto <u>*lunghezza* del vettore x</u>. Inoltre, <u>*l'angolo fra due vettori* $x, y \neq 0$</u> è definita da θ dove

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||}.$$

Diciamo che due vettori (non nulli) sono <u>ortogonali</u> se $\langle x, y\rangle = 0$ e in tal caso scriviamo $x \perp y$. Si ha il teorema di Pitagora per vettori ortogonali

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2, \quad x, y \neq 0 \ \text{ t.c. } \ x \perp y.$$

Adesso, proponiamo qualche semplice esercizio.

Esercizio 3.2.7 Trovare una base per il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ definito da $V = W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 : v \perp w,\ \forall w \in W\}$ dove $W = \text{span}\{(0, 1, 2, 0), (2, 3, 0, -1)\}$.

Esercizio 3.2.8 Trovare l'equazione del piano Π ortogonale al vettore $w = (0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ quando

a) Π passa per l'origine $(0, 0, 0)$.

b) Π passa per un punto generico (x_0, y_0, z_0).

Un altro concetto geometrico che discende dal prodotto scalare (o dalla norma) è il concetto di <u>distanza</u> o <u>metrica</u>.

Proposizione 3.2.9 ($\mathbb{R}^n$ come spazio metrico) *La mappa* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$d(x, y) := ||x - y|| = \langle x - y, x - y\rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2} \tag{3.2.4}$$

definisce una <u>*metrica*</u> *su* $\mathbb{R}^n$*; cioè valgono:*

i) $d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

ii) $d(x, y) \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n$

La dimostrazione è un facile esercizio. Le proprietà i), ii), e iii) seguono banalmente dalla definizione della metrica d. Invece, la disuguaglianza triangolare iv) segue da quella per la norma. Inoltre, si nota che dato una qualsiasi spazio normato (spazio vettoriale con norma), la sua norma $||\cdot||$ definisce automaticamente una metrica d tramite $d(x,y) = ||x-y||$. La cosa interessante è che esistono spazi metrici che **NON** sono spazi normati; cioè spazi con una metrica che non sono lineari (vettoriali) o per cui la metrica non è definita mediante una norma. Nel il primo caso, basti pensare ad una superficie come la sfera

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad ||x|| = 1\}.$$

Questo spazio non è uno spazio vettoriale (anche se definito così è uno sottoinsieme (nonlineare) di uno spazio vettoriale). Si può benissimo immaginare l'utilità di disporre di un concetto di distanza su S^2 che lo renda spazio metrico: se vogliamo studiare, ad esempio, limiti o continuità su S^2, servirà il concetto di metrica come base analitica per definire la *topologia* necessaria.

3.3 Spazi Metrici

In questo paragrafo, ricordiamo come la presenza di una metrica d su un insieme X trasformi X in uno spazio topologico che fornisce la base dei concetti di limite e continuità. In particolare, sarà chiarito in che cosa consiste la topologia, almeno dal punto di vista dell'analisi. Questo paragrafo rappresenta un richiamo di Analisi I per l'a.a. 2008-2009. Cominciamo con una definizione già implicita nella Proposizione 3.2.9.

Definizione 3.3.1. (X,d) *si chiama spazio metrico se* X *è un'insieme e* d *è una funzione di distanza o metrica, ovvero* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *soddifa*

i) $d(x,y) = d(y,x), \quad x,y \in X$

ii) $d(x,y) \geq 0, \quad x,y \in X$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad x,y,z \in X$

Esempi 3.3.2.

(a) $(\mathbb{R}, d)$ dove $d(x,y) = |x-y|$ è il modulo della differenza di x e y. Si verifica facilmente che d è una metrica su $\mathbb{R}$.

(b) $(\mathbb{C}, d)$ dove $d(z,\zeta) = |z-\zeta|$ è il modulo complesso della differenza di z e ζ. Ricordiamo che se $z = a+ib$, il suo modulo complesso è $|z| = (z\bar{z})^{1/2} = (a^2+b^2)^{1/2}$. Si verifica facilmente che d è una metrica su $\mathbb{C}$ usando lo stesso argomento di Proposizione 3.2.9 nel caso $n = 2$. Infatti, $(\mathbb{C}, d)$ è isomorfo ad $\mathbb{R}^2$ con la sua metrica euclidea.

(c) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ dove $d_2(x,y) = ||x-y|| = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$ è la norma euclidea della differenza di x e y. Questo è Proposizione 3.2.9. A volte si scrive $||x|| = ||x||_2$ per sottolineare il confronto con i prossimi due esempi.

(d) $(\mathbb{R}^n, d_1)$ dove $d_1(x,y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$. Le proprietà i) e ii) valgono chiaramente. Per la disuguaglianza triangolare iii), si sfrutta la disuguaglianza triangolare in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; cioè

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| = \sum_{k=1}^n |x_k - z_k + z_k - y_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n (|x_k - z_k| + |z_k - y_k|) = d_1(x,z) + d_1(z,y). \end{aligned}$$

Questa metrica è anche compatibile con la <u>*norma* l_1</u> definita da $||x||_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$.

(e) $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ dove $d_\infty(x,y) = \max_{1\le k\le n}\{|x_k - y_k|\}$. Le proprietà i) e ii) valgono chiaramente. Per la disuguaglianza triangolare iii), si sfrutta la disuguaglianza triangolare in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ in modo analogo all'esempio (d) sopra. Questa metrica è anche compatibile con la <u>*norma* l_∞</u> definita da $||x||_\infty = \max_{1\le k\le n}\{|x_k - y_k|\}$.

(f) (X, d_0) dove X è un insieme qualsiasi e d_0 la <u>*metrica discreta*</u> definita da

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Di nuovo, i) e ii) seguono banalmente dalla definizione. La verifica della proprietà iii) segue dall'analisi delle varie possibilità (un numero finito di casi).

(g) $(C^0([a,b]), d)$ dove $C^0([a,b])$ è lo spazio di tutte le funzioni reali e continue su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e d è definita da

$$d(f,g) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|.$$

La simmetria è ovvia e anche la non-negatività. Se $d(f,g) = 0$, allora $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ e abbiamo $f = g$. Inoltre

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \max_{a\le x\le b} |g(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\le \max_{a\le x\le b} |g(x) - h(x)| + \max_{a\le x\le b} |h(x) - g(x)| = d(f,h) + d(h,g). \end{aligned}$$

In uno spazio metrico, si può usare la metrica per distinguere (definire) degli insiemi particolari. In particolare, si possono definire in modo analitico gli insiemi *aperti* che costituiscono la base dei concetti topologici. Per prima cosa, si ha la seguente definizione basilare.

Definizione 3.3.3. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Si chiama <u>intorno sferico di raggio $r > 0$ e centro $x_0 \in X$</u> l'insieme*

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \quad d(x,x_0) < r\}.$$

Usiamo anche la terminologia <u>*palla aperta*</u> per $B_r(x_0)$.

Esempi 3.3.4. Per gli Esempi 3.3.2, si trova abbastanza facilmente la forma di $B_r(x_0)$.

(a) In $(\mathbb{R}, d)$ con $d(x,y) = |x-y|$, $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ è un intervallo aperto.

(b) In $(\mathbb{C}, d)$ con $d(z,\zeta) = |z - \zeta|$, $B_r(z_0)$ è un disco di raggio r e centro z_0

(c) In $(\mathbb{R}^n, d_2)$ can $d_2(x,y) = ||x-y|| = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$, $B_r(x_0)$ è una "vera" palla tonda di raggio r e centro x_0.

(d) In $(\mathbb{R}^n, d_1)$ con $d_1(x,y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$, $B_r(x_0)$ è un cubo di diagonale $2r$ messo "sulla punta" con centro in x_0.

(e) In $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ con $d_\infty(x,y) = max_{1\le k\le n}\{|x_k - y_k|\}$, $B_r(x_0)$ è un cubo con centro x_0 con lati di lunghezza $2r$ paralleli agli assi.

(f) In (X, d_0) con d_0 la metrica discreta, $B_r(x_0) = \{x_0\}$ per ogni $r \le 1$ e $B_r(x_0) = X$ per ogni $r > 1$.

(g) In $C^0([a,b]),d)$ con $d(f,g) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|$, $B_r(f)$ è la collezione di funzioni continue g con grafico contenuto nella striscia determinata dai grafici delle funzioni $f(x)-r$ e $f(x)+r$.

Adesso siamo pronti per definire la nozione fondamentale che ci consentirà di introdurre una struttura topologica negli spazi metrici.

Definizione 3.3.5. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Un insieme U sia chiama aperto se per ogni $x \in U$ esiste $r = r(x) > 0$ per cui $B_r(x) \subset U$.*

Esempi 3.3.6. In $(\mathbb{R}^n, d)$ dove d è la metrica euclidea.

(a) La palla $B_R(x_0)$ è aperta per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $R > 0$. Infatti, per ogni $x \in B_R(x_0)$ poniamo $d_0 = d(x,x_0)$ e prendiamo $r < \min\{d_0, R - d_0\}$. Dobbiamo solo verificare che per ogni $y \in B_r(x)$ si ha $y \in B_R(x_0)$. Si trova

$$\begin{aligned} d(y,x_0) &\le d(y,x) + d(x,x_0) < r + d_0 \\ &< R - d_0 + d_0 = R. \end{aligned}$$

(b) La palla (chiusa) $\bar{B}_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x,x_0) \le R\}$ **non** è aperta. Infatti, sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $d(x,x_0) = ||x - x_0|| = R$. Per $\epsilon > 0$, poniamo $y = x + \epsilon(x - x_0) \in \mathbb{R}^n$ e abbiamo

$$d(y,x) = ||y - x|| = ||\epsilon(x - x_0)|| = \epsilon||x - x_0|| = \epsilon R,$$

ovvero $y \in B_{2\epsilon R}(x)$ con raggio piccolo quanto vogliamo per ϵ abbastanza piccolo. Però

$$d(y,x_0) = ||x + \epsilon(x - x_0) - x_0|| = (1+\epsilon)||x - x_0|| = (1+\epsilon)R > R,$$

per ogni $\epsilon > 0$, e, quindi $y \notin \bar{B}_R(x_0)$.

Proposizione 3.3.7 *Per ogni spazio metrico (X,d) la collezione di insiemi $\mathcal{T} = \{U \subset X : U$ è aperto in $X\}$ è una topologia su X; cioè:*

i) $X \in \mathcal{T}$;

ii) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

iii) $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$ *se* $U_\alpha \in \mathcal{T}$ *per ogni* $\alpha \in \mathcal{A}$;

iv) $\bigcap_{k=1}^N U_k \in \mathcal{T}$ *se* $U_k \in \mathcal{T}$ *per ogni* $k = 1, \ldots, N$.

Dimostrazione: Abbiamo $X \in \mathcal{T}$. Infatti, per ogni $x \in X$, ogni palla $B_r(x)$ è contenuto in X per definizione. Inoltre, $\emptyset \in \mathcal{T}$ perchè la condizione è vuota (non ci sono $x \in \emptyset$ da controllare). Per mostrare che una unione arbitrario di U_α aperti è aperto, fissiamo $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Esiste $\bar\alpha \in \mathcal{A}$ per cui $x \in U_{\bar\alpha}$, e, quindi esiste $\bar r > 0$ per cui $B_{\bar r}(x) \subset U_{\bar\alpha} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Per mostrare che un'intersezione finito di aperti è aperto, fissiamo $x \in \bigcap_{k=1}^N U_k$. Abbiamo $x \in U_k$ per ogni k, e, quindi, esistono $\{r_k\}_{k=1}^N$ per cui $B_k(x) \subset U_k$ per ogni $k = 1, \ldots, N$. Scegliamo $r = \min\{r_k : \ k = 1, \ldots, N\}$ e abbiamo $B_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^N U_k$. □

In uno spazio metrico, ci sono abbastanza aperti per "separare i punti" uno dall'altro.

Proposizione 3.3.8. (Proprietà di Hausdorff) *Sia (X,d) uno spazio metrico. Per ogni copia di punti $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, esistono $B_{r_1}(x_1), B_{r_2}(x_2) \subset X$ tali che $B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2) = \emptyset$.*

Dimostrazione: Sia $\bar{d} = d(x_1, x_2)$. Scegliamo $r_1 = r_2 = \bar{d}/3$. Se ci fosse $y \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$, allora

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y) + d(y, x_2) < 2\bar{d}/3 < \bar{d} = d(x_1, x_2),$$

assurdo. □

In uno spazio metrico, si possono definire tipi di punti e tipi di insiemi particolari sulla base delle loro proprietà topologiche.

Definizione 3.3.9. (Tipi di punti) *Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Si chiama $x_0 \in X$ un*

(a) *<u>punto interno di A</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow} \exists\, r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subset A$;*

(b) *<u>punto esterno di A</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow} \exists\, r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subset (X \setminus A)$ (cioè è interno per il complemento di A in X);*

(c) *<u>punto di bordo (frontiera) di A</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall\, r > 0$ si ha $B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x_0) \cap (X \setminus A)$ (cioè, non è interno nè esterno);*

(d) *<u>punto isolato di A</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow} \exists\, r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$;*

(e) *<u>punto di accumulazione per A</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall\, r > 0$ si ha $(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$;*

(f) *<u>punto di aderenza per A</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow} (x \in A) \vee (x_0$ è punto di accumulazione per $A)$;*

Il concetto di punto di accumulazione è particolarmente importante per il concetto di limite che vogliamo definire, e, quindi vale la pena di riflettere un attimo su che cosa significhi.

Proposizione 3.3.10. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$.*

a) *Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per A, ogni intono di x_0 contiene infiniti punti di A;*

b) *Se $x_0 \in A$ non è isolato in A, allora è un punto di accumulazione per A.*

Dimostrazione: Per la prima affermazione, usiamo un argomento per assurdo. Supponiamo che esista $r > 0$ per cui $B_r(x_0) \cap A = \{x_1, \ldots, x_N\}$ un insieme finito. Poniamo

$$\bar{r} = \min_{1 \leq j \leq N} \{d(x_0, x_j) : \quad x_j \neq x_0\}.$$

Chiaramente abbiamo $B_{\bar{r}}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$, assurdo.

Per la seconda affermazione, se $x_0 \in A$ non è isolato in A, per ogni $r > 0$, $B_r(x_0) \cap A \neq \{x_0\}$. Ma $x_0 \in A$, e, quindi $B_r(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. □

Definizione 3.3.11. (Tipi di sottoinsiemi) *Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Si definisce*

(a) *A° = <u>l'interno di A</u> = l'insieme di tutti i punti interni ad A;*

(b) *A^e = <u>l'esterno di A</u> = l'insieme di tutti i punti esterni ad A;*

(c) *∂A = <u>il bordo di A</u> = l'insieme di tutti i punti di bordo di A;*

(d) Iso$A$ *= l'insieme di tutti i punti isolati di A;*

(e) *A' = <u>l'insieme derivato di A</u> = l'insieme di tutti i punti di accumulazione di A;*

(f) $\bar{A} = \underline{\text{la chiusura di } A} = A \cup A'$, *ovvero tutti i punti di A più gli eventuali punti di accumulazione di A che siano fuori di A;*

(g) *A è $\underline{\text{aperto}}$* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $A = A^\circ$*;*

(h) *A è $\underline{\text{chiuso}}$* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $A = \bar{A}$*;*

(i) *A è $\underline{\text{discreto}}$* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $A = \mathrm{Iso} A$*;*

(j) *A è $\underline{\text{perfetto}}$* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $A = A'$*;*

(k) *A è $\underline{\text{limitato}}$* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, M$ *t.c.* $d(x, y) \leq M$ *per ogni* $x, y \in A$ *(cioè la metrica è una funzione limitata su $A \times A$.)*

Proposizione 3.3.12. (Insiemi chiusi) *Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora*

a) *A è chiuso $\Leftrightarrow A' \subset A$; cioè A contiene tutti i suoi punti di accumulazione;*

b) *A è chiuso $\Leftrightarrow A^{\mathcal{C}} = X \setminus A$ è aperto;*

c) *A è aperto $\Leftrightarrow A^{\mathcal{C}} = X \setminus A$ è chiuso.*

Dimostrazione:

a) A è chiuso se e solo se $A = A \cup A'$. Quindi, A chiuso implica $A' \subset A$. D'altre parte, se $A' \subset A$, abbiamo $A' \cup A \subset A$, ma è sempre vero che $A \subset A \cup A'$.

b) Se A è chiuso e $x \in A^{\mathcal{C}} = X \setminus A$, abbiamo $x \notin A$, e, quindi, $x \notin A'$ perchè A contiene A'. Quindi esiste $r > 0$ t.c. $B_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, ma $x \notin A$, e, quindi, $B_r(x) \subset (X \setminus A)$; cioè $A^{\mathcal{C}}$ è aperto. Viceversa, se $A^{\mathcal{C}}$ è aperto, per ogni $x \in A^{\mathcal{C}}$ esiste $r > 0$ t.c. $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Quindi $B_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, ovvero, $x \notin A'$. Quindi $x \notin A \Rightarrow x \notin A'$ che equivale $A' \subset A$, ovvero A chiuso.

c) La dimostrazione è analoga di quella della **b)**. □

Proposizione 3.3.13. (Insiemi limitati) *Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora A è limitato $\Leftrightarrow A \subset B_R(x_0)$ per qualche $R > 0$ e qualche $x_0 \in X$.*

Dimostrazione: Se A è limitato, esiste $M > 0$ t.c. $d(x, y) \leq M$ per ogni $x, y \in A$. Possiamo scegliere $x_0 \in A$ arbitrario e $R = 2M$. Per ogni $x \in A$, si ha $x \in B_R(x_0)$. Infatti

$$d(x, x_0) \leq M < R = 2M.$$

D'altre parte, se $A \subset B_R(x_0)$, abbiamo

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2R,$$

e, quindi, A è limitato. □

Finiamo questo paragrafo con una proposizione che sarà usata spesso nel seguito, almeno in modo implicito. La sua dimostrazione è lasciato come un facile esercizio.

Proposizione 3.3.14. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Allora $(A, d_{|A})$ è uno spazio metrico dove $d_{|A} : A \times A \to \mathbb{R}$ è la restrizione della metrica d in X ad A; cioè*

$$d_{|A}(x, y) = d(x, y), \quad \forall\, x, y \in A.$$

N.B. Spesso scriviamo semplicemente d per la restrizione $d_{|A}$.

3.4 Limiti e Continuità in Spazi Metrici

In questo paragrafo, ricordiamo i concetti di limite e continuità per funzioni fra spazi metrici. Di nuovo, quasi tutto può essere preso come un richiamo, tranne il Teorema 3.4.4 (limiti e restrizioni) e le sue conseguenze.

Definizione 3.4.1. *Siano $f : A \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una funzione fra spazi metrici, x_0 un punto di accumulazione di A e $y_0 \in Y$. Si dice che f ammette limite y_0 in (Y, d_Y) per x che tende ad x_0 in (X, d_X) se*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 : \ \ d_Y(f(x), y_0) < \epsilon \ \ \forall \ x \in A \setminus \{x_0\} \ \ \text{con} \ \ d_X(x, x_0) < \delta. \tag{3.4.1}$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Notiamo che (3.4.1) equivale a

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 : \ \ x \in A \setminus \{x_0\} \ \ \text{con} \ \ d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), y_0) < \epsilon \tag{3.4.2}$$

ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 : \ \ x \in A \cap (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(y_0). \tag{3.4.3}$$

I prossimi esempi sono banali ma importanti. Sono quasi gli unici esempi di natura generale nel contesto di spazi metrici arbitrari. In Analisi I, abbiamo visto in dettaglio il caso $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con la metrica euclidea) e nel prossimo paragrafo sarà trattato il caso $f : A \subset \mathbb{R}^n \to R^m$ (sempre con la metrica euclidea).

Esempi 3.4.2.

(a) (f costante) Sia $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ definita da $f(x) = y_0 \in Y$ per ogni $x \in X$. Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ per ogni $x_0 \in X$. Infatti, dato $\epsilon > 0$, abbiamo $d_Y(f(x), y_0) = 0 < \epsilon$ per ogni $x \in X$. Quindi ogni $\delta > 0$ va bene.

(b) (l'identità) Sia $f : (X, d_X) \to (X, d_X)$ definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in X$. Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$ per ogni $x_0 \in X$. È chiaro che dato $\epsilon > 0$, possiamo scegliere $\delta = \epsilon$.

Sopra, abbiamo parlato **del candidato** limite. Infatti, il limite, quando esiste, è unico.

Teorema 3.4.3. (Unicità del limite) *Se f ammette limite in (Y, d_Y) per $x \to x_0$ in X, allora il limite è unico.*

Dimostrazione: Supponiamo di avere due limiti $y_1, y_2 \in Y$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che:

$$x \in B_{\delta_k}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow d_Y(f(x), y_k) < \epsilon, \quad k = 1, 2.$$

Prendiamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e abbiamo

$$x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow d_Y(y_0, y_1) \leq d_Y(y_0, f(x)) + d_Y(f(x), y_1) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Ma ϵ è arbitrario, quindi $d_Y(y_1, y_2) = 0$, ovvero $y_1 = y_2$ □

Per mostrare la **non esistenza** di un limite, è molto utile il seguente principio.

Teorema 3.4.4. (Limiti e restrizioni) *Siano $f : A \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, $x_0 \in A'$, e $y_0 \in Y$. Si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f_{|E}(x) = y_0 \ \ \text{per ogni} \ E \subset A \ \ \text{con} \ \ x_0 \in E',$$

dove $f_{|E}(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$ è la restrizione ad E di f.

Dimostrazione: Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ tale che

$$x \in A,\ 0 < d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), y_0) < \epsilon.$$

Quindi vale l'implicazione per ogni $x \in E$ tale che $0 < d_X(x, x_0) < \delta$. □

Per funzioni $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ questo principio generalizza quello che richiede che il limite destro sia uguale al limite sinistro.

Esempio 3.4.5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

non ammette limite per $x \to 0$. Infatti, definiamo $E_\pm := \{x \in \mathbb{R} : \quad \pm x > 0\}$. Si ha

$$f_{|E_\pm}(x) = \pm 1$$

e, quindi $\lim_{x\to 0} f_{|E_\pm}(x) = \pm 1$ dipende dalla direzione in cui x tende ad 0. Quindi non esiste il limite.

Nel prossimo paragrafo, vedremo quanto importante sia questo principio quando la funzione dipende da più variabili, e, quindi ci siano più gradi di libertà di movimento. Invece, per mostrare **l'esistenza** di un limite, è spesso utile il seguente criterio.

Teorema 3.4.6. (Limiti e successioni) *Siano $f : A \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, $x_0 \in A'$, e $y_0 \in Y$. Si ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ se e solo se*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y_0 \quad \forall \{x_n\} \subset (A \setminus \{x_0\}) \ \ t.c \ \ x_n \to x_0 \ \ per\ n \to +\infty.$$

dove $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y_0$ significa

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \ t.c.\ \ d_Y(f(x_n), y_0) < \epsilon \ \ \forall\ n \geq N$$

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Segue dal Teorema 3.4.4 nel caso speciale di $E = \{x_n\} \subset (A \setminus \{x_0\})$.

($\Leftarrow$) Per assurdo supponiamo

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y_0 \quad \forall \{x_n\} \subset (A \setminus \{x_0\}) : \ x_n \to x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq y_0 \end{cases}$$

Per la seconda affermazione segue che esiste $\bar\epsilon > 0$ t.c. per ogni $\delta > 0$ si puo trovare $\bar x = \bar x(\delta) \in (A \setminus \{x_0\})$ tale che

$$0 < d_X(\bar x, x_0) < \delta \ \text{ e } \ d_Y(f(\bar x, y_0) \geq \bar\epsilon.$$

Quindi esiste una successione $x_n = \bar x(1/n) \in (A \setminus \{x_0\}$ t.c.

$$0 < d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \ \text{ ma } \ d_Y(f(x_n, y_0) \geq \bar\epsilon.$$

Questa contradisce la convergenza di $f(x_n)$ ad y_0. □

Adesso siamo pronti per affrontare la continuità.

Definizione 3.4.7. *Sia $f : A \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. Si dice*

a) *f è continua in $x_0 \in A$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;*

b) *f è continua in A se f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.*

Notiamo che la continuità in x_0 può essere espressa con la terminologia delle palle aperte: *per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ per cui*

$$x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(x_0)).$$

Il significato topologico di continuità è contenuto nel seguente importante teorema

Teorema 3.4.8. *Una funzione $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è continua se e solo se:*

$$f^{-1}(U) \ \text{ è aperto in } X \text{ per ogni } U \text{ aperto in } Y,$$

dove $f^{-1}(U) := \{x \in X : \ f(x) \in U\}$ è la controimmagine di U tramite f.

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Sia U aperto in Y. Sia $x_0 \in f^{-1}(U)$; cioè esiste $y_0 \in U$ tale che $f(x_0) = y_0$. Vogliamo mostrare l'esistenza di una palla $B_\delta(x_0) \subset X$ per cui $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U)$. Essendo U aperto e $y_0 \in U$, esiste $\epsilon > 0$ per cui $B_\epsilon(y_0) \subset U$. La continuità di f in x_0 implica l'esistenza di $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ tale che

$$x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(y_0),$$

ma $B_\epsilon(y_0) \subset U$.

($\Leftarrow$) La dimostrazione è analoga ed è lasciata per esercizio. □

Teorema 3.4.9. (Composizione di funzioni continue) *Siano $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ e $g : (X, d_Y) \to (Z, d_Z)$ funzioni continue. Allora $g \circ f : (X, d_X) \to (Z, d_Z)$ è continua.*

Dimostrazione: L'affermazione è una conseguenza facile del Teorema 3.4.8. Infatti, se U è aperto in Z allora $V := g^{-1}(U)$ è aperto in Y per la continuità di g. Quindi $W = f^{-1}(V)$ è aperto in X per la continuità di f. Ma $W = (g \circ f)^{-1}(U)$. □

Il Teorema 3.4.8 viene usato ovunque in analisi. In particolare, il teorema fornisce informazioni topologiche sull'insieme delle soluzioni di un'equazione o disequazione. Notiamo innanzitutto la seguente caratterizzazione equivalente della continuità.

Corollario 3.4.10. *Una funzione $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è continua se e solo se:*

$$f^{-1}(K) \ \text{ è chiuso in } X \text{ per ogni } K \text{ chiuso in } Y,$$

dove $f^{-1}(K) := \{x \in X : \ f(x) \in K\}$ è la controimmagine di K tramite f.

Dimostrazione: Basta notare che

$$K \text{ è chiusa in } Y \ \Leftrightarrow \ U := Y \setminus K \text{ è aperto in } Y$$

e

$$f^{-1}(K) = X \setminus (f^{-1}(Y \setminus K)) = X \setminus f^{-1}(U).$$

□

Corollario 3.4.11. *Sia $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

a) *Per ogni* $y_0 \in \mathbb{R}$*, l'insieme* $\{x \in X : \ f(x) = y_0\}$ *delle soluzioni dell'equazione* $f(x) = y_0$ *è chiuso in* X*. In particolare, limiti in* X *di soluzioni sono soluzioni.*

b) *Per ogni* $y_0 \in \mathbb{R}$*, l'insieme* $\{x \in X : \ f(x) > y_0\}$ *delle soluzioni della disequazione* $f(x) > y_0$ *è aperto in* X*. In particolare, se esiste una soluzione* x_0*, allora ci sono altre soluzioni vicine. Le stesse conclusioni valgono per la disequazione* $f(x) < y_0$*.*

Dimostrazione: Per la a), basta notare che l'insieme $\{y_0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e usare il Corollario 3.4.10. Per la b), basta notare che $(y_0, +\infty), (-\infty, y_0)$ sono aperti in $\mathbb{R}$ e usare il Teorema 3.4.8. □

Chiudiamo questo paragrafo con qualche osservazione.

1. Abbiamo enunciato vari risultati (Teorema 3.4.8, 3.4.9 e Corollario 3.4.10, 3.4.11) per funzioni definite su tutto lo spazio metrico (X, d_X). Ma questo non è essenziale. Ad esempio, possiamo generalizzare il Teorema 3.4.8 al caso di una funzione $f : A \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ perchè (A, d_X) è anche uno spazio metrico quando facciamo la restrizione di d_X ad A (vedi Proposizione 3.3.14). Basta cambiare *aperto in* X con *aperto in* A dove le palle relative ad A sono
$$B_r^A(x_0) = \{x \in A : \ d_X(x, x_0) < r\}$$
e prendono il posto delle palle $B_r(x_0) = B_r^X(x_0)$ in X. Vale anche la generalizzazione ovvia del Teorema 3.4.9 con $f : U \subset X \to (Y, d_Y)$ e $g : V \subset (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ se supponiamo anche che $f(U) \subset V$. Per Corollario 3.4.10 e Corollario 3.4.11 basta cambiare aperto/chiuso in X con aperto/chiuso in A.

2. Nel caso importante in cui il dominio A sia un aperto in X, gli intorni relativi ad A sono esattamente quelli relativi ad X. Questo fatto sarà usato spesso in seguito.

3. Abbiamo visto che f continua implica che la controimmagine di un aperto è aperto. In generale, **non** è vero che l'immagine di un aperto tramite una funzione continua è un aperto. Basti pensare alle funzioni costanti. Una funzione con questa proprietà si chiama **aperta**. Sarà mostrato in Analisi III che le funzioni continue e invertibile sono aperte.

4. Sarebbe naturale chiederci se abbiamo risultati analoghi a quelli familiari per funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$; ad esempio, il teorema degli zeri, della permanenza del segno, il Teorema di Weierstrass, etc. Ritorneremo a questa domanda più tardi (vedi paragrafi 3.6 e 3.7). Invece, cominciamo a vedere il caso concreto degli spazi euclidei, per iquali possiamo dire molto di più.

3.5 Limiti e continuità per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Dopo i richiami dei paragrafi precedenti, cominciamo il nostro lavoro in senso proprio. Vogliamo considerare limiti e continuità per funzioni

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dove $\mathbb{R}^n$ è lo spazio euclideo di dimensione $n \geq 1$ con la norma di $x = (x_1, \ldots, x_n)$ definita da

$$||x|| = \left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]^{1/2}$$

e $\mathbb{R}^m$ è lo spazio euclideo di dimensione $m \geq 1$. Le definizioni di limite e continuità sono solo casi particolari delle Definizioni 3.4.1 e 3.4.7.

Definizione 3.5.1. *Siano $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in A'$ un punto di accumulazione per A e $y_0 \in \mathbb{R}^m$, allora diciamo che* <u>*f ammette limite y_0 per x che tende ad x_0*</u> *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$||f(x) - y_0||_{\mathbb{R}^m} < \epsilon \quad \textit{per ogni} \;\; x \in A \setminus \{x_0\} \;\; \textit{t.c.} \;\; ||x - x_0||_{\mathbb{R}^n} < \delta.$$

In tal caso, scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$

N.B. La notazione è sempre un incubo perchè non ci sono convenzioni universalmente accettate. Notiamo che

1. Spesso scriviamo lo stesso simbolo $|| \cdot ||$ per le norme in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ se non c'è rischio di confusione.
2. Nel caso $n = 1$ e/o $m = 1$, scriviamo spesso $| \cdot |$ per le norme dato dal modulo
3. Nel caso $n = 2$, scriviamo spesso le variabili independenti come la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Primi esempi di limiti non banali con $n = 2$ e $m = 1$

Oltre agli esempi banali di f costante oppure l'identità (v. Esempio 3.4.2) proponiamo qualche esempio non banale nel caso più semplice non già trattato in Analisi I.

Esempio 3.5.2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ a & (x_1, x_2) \neq (0,0) \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. Affermiamo che

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2) = 0.$$

Abbiamo $f(x_1, 0) = 0 = f(0, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \neq 0$, e, quindi, il candidato limite è zero. Dato $\epsilon > 0$, ci serve $\delta > 0$ t.c. $0 < ||x|| < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2)| < \epsilon$. Notiamo che

$$|f(x_1, x_2)| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x_1 x_2|}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} < \epsilon,$$

e che $|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Infatti, questa seconda disuguaglianza equivale a

$$2|x_1||x_2| \leq \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)$$

ovvero

$$0 \leq (|x_1| - |x_2|)^2 .$$

Quindi

$$\frac{|x_1 x_2|}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} < \frac{1}{2} \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} = \frac{||x||}{2} < \epsilon \;\; \text{se} \;\; ||x|| < \delta = 2\epsilon.$$

Osservazione 3.5.3. Si noti che in questo esempio ѐnecessario saper <u>*stimare*</u> quantità che dipendono da più variabili. La seguente disuguaglianza è spesso utile a tale scopo. Per ogni $p \geq 0$, Si ha

$$|x_1| \leq \sqrt{x_1^2 + |x_2|^p} \;\; \text{per ogni } x_1, x_2. \tag{3.5.1}$$

Infatti, basta elevare (3.5.1) al quadrato. Nell' Esempio 3.5.2, si potrebbe stimare anche così:

$$\frac{|x_1 x_2|}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}} \leq \frac{|x_1|}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}|x_2| \leq |x_2| < ||(x_1,x_2)||.$$

Il principio di limiti e restrizioni (Teorema 3.4.4) è spesso utile per mostrare la **non esistenza** di limiti, come mostrano i seguenti due esempi.

Esempio 3.5.4. Sia $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ a & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

non ammette limite per $(x_1,x_2) \to (0,0)$. Infatti, fissato $m \in \mathbb{R}$, definiamo $E_m := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad x_2 = mx_1\}$. Si ha

$$f_{|E_m}(x) = f(x_1, mx_1) = \frac{mx_1^2}{x_1^2+m^2x_1^2} = \frac{m}{1+m^2}, \quad \forall\, x_1 \neq 0$$

e, quindi $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f_{|E_m}(x) = m/(1+m^2)$ è diverso per diversi valori di m. Quindi non esiste il limite.

Non basta considerare solo delle rette, in generale.

Esempio 3.5.5. Il limite $\displaystyle\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^5+y^2}$ non esiste. Infatti, anche se lungo le asse $x = 0, y = 0$ il limite è zero, e pure su tutte le rette $y = mx, m \neq 0$

$$f(x,mx) = \frac{mx^3}{x^5+m^2x^2} = \frac{mx}{x^3+m^2} \to 0,$$

lungo la curva $y = x^2$, si ha

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^5+x^4} = \frac{1}{x+1} \to 1 \neq 0.$$

Limiti diversi lungo curve diverse vuol dire non esistenza del limite.

Proprietà algebriche e riduzione ad una dimensione

Per funzioni $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, lo spazio di arrivo $\mathbb{R}^m$, oltre ad essere uno **spazio metrico**,è uno **spazio vettoriale** e, nel caso $m = 1$, un *campo ordinato*. Queste strutture in più arricchiscono i possibili risultati.

Proposizione 3.5.6. *Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$. Allora*

- **a)** $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ *se esistono finiti i limiti di f e g.*
- **b)** $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x)$ *se esiste finito il limite di f.*
- **c)** *$f + g$ è continua in x_0 se f, g sono continue in x_0.*
- **d)** *λf è continua in x_0 se f è continua in x_0.*

Proposizione 3.5.7. *Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Supponiamo che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Allora*

a) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = LM$ *se* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ *con* L, M *finiti.*

b) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = 0$ *se* $L = 0$ *e* g *limitata.*

c) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = +\infty$ *se* $L = +\infty$ *ed esiste* $c, \delta > 0$ *per cui* $g(x) \geq c > 0$ *per ogni* $x : 0 < ||x - x_0|| < \delta$.

d) $\lim_{x\to x_0}(f/g)(x) = L/M$ *se* L, M *sono finiti e* $M \neq 0$.

Valgono affermazioni analoghe per la continuità dei prodotti e dei rapporti. Le dimostrazioni delle Proposizioni 3.5.6 e 3.5.7 sono uguali a quelle per il caso $n = 1$ di Analisi I. Il ruolo di $|x - x_0|$ è giocato da $||x - x_0||$, oppure $d(x, x_0)$. Inoltre, si possono generalizzare queste proposizioni a funzioni $f : A \subset (X, d) \to \mathbb{R}^m$.
Poichè sappiamo gestire bene limiti e continuità per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (da Analisi I), possiamo chiederci se sia possibile sfruttare questa capacità già acquisita. La risposta è sì, ed il punto chiave è il seguente Teorema.

Teorema 3.5.8. *In* $\mathbb{R}^n$*, si ha la seguente catena di disuguaglianze: per ogni* $k = 1, \dots, n$

$$|x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \sqrt{n} \max_{1\leq k\leq n} |x_k|. \tag{3.5.2}$$

Vale, cioè, la disuguaglianze tra norme

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5.3}$$

Dimostrazione: La prima disuguaglianza in (3.5.2) è una generalizzazione della disuguaglianza (3.5.1) ed è una conseguenza diretta di

$$|x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \forall\, k, \forall\, x.$$

Per la seconda, si noti

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq n \max_{1\leq k\leq n} |x_k|^2$$

e, quindi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \sqrt{n}\sqrt{\max_{1\leq k\leq n} |x_k|^2} = \sqrt{n} \max_{1\leq k\leq n} |x_k|.$$

$\square$

Il Teorema 3.5.8 è un esempio di un fatto più generale; **tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti** nel senso che, *date due norme* $||\cdot||$ *e* $|||\cdot|||$ *esistono costanti* c, C *per cui:*

$$c||x|| \leq |||x||| \leq C||x||, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5.4}$$

Lasciamo ad esercitazione qualche altro caso di equivalenza di norme, ma mettiamo in moto la versione (3.5.2) per facilitare il calcolo di limiti riducendo ai casi di $m = 1$ o $n = 1$. In tutto quello che segue, per una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $x^0 \in A'$,

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Inoltre, la norma $||\cdot||$ sarà sempre quella euclidea (salvo controindicazioni).

Corollario 3.5.9. (Riduzione alle componenti) *Siano* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x^0 \in A'$, *e* $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. *Allora*

a) $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^0} f_k(x) = b_k$ *per ogni* $k = 1, \ldots, m$;

b) f *è continua in* x^0 $\Leftrightarrow$ f_k *è continua in* x^0 *per ogni* $k = 1 \ldots m$.

Dimostrazione: Dalla seconda disuguaglianza in (3.5.2) abbiamo

$$||f(x) - b|| \leq \sqrt{n} \max_{1\leq k\leq m} |f_k(x) - b_k|$$

e, quindi, il fatto che il membro a destra sia piccolo (convergenza delle componenti di f) implica che anche il membro a sinistra sia piccolo (convergenza della funzione a valori vettoriali f). Viceversa, dalla prima disuguaglianza in (3.5.2) abbiamo

$$\max_{1\leq k\leq m} |f_k(x) - b_k| \leq ||f(x) - b||$$

e, quindi, se il membro a destra è piccolo (convergenza della funzione a valori vettoriali f) anche il membro a sinistra è piccolo (convergenza delle componenti di f). Questa mostra la a), e la b) segue analogamente. $\square$

Esempio 3.5.10. Calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ se f è definita da:

$$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = \left(\frac{xyz}{x^2+y^4+z^2}, xy\sin z\right).$$

Possiamo calcolare il limite componente per componente. Per la prima, usiamo una stima

$$\begin{aligned} \left|\frac{xyz}{x^2+y^4+z^2}\right| &\leq \frac{|x|}{(x^2+y^4+z^2)^{1/2}} \frac{|z|}{(x^2+y^4+z^2)^{1/2}} |y| \\ &\leq (1)(1)|y| \leq ||(x,y,z)|| \to 0, \end{aligned}$$

e, quindi $f_1 \to 0$ per $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Per la seconda componente, stimiamo

$$|xy\sin z| \leq |x|\,|y| \leq (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \to 0,$$

e, quindi $f_2 \to 0$ per $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Per Corollario 3.5.9, $f \to (0,0)$ per $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

N.B. Abbiamo sfruttato una generalizzazione facile della disuguaglianza (3.5.1) della Osservazione 3.5.3 quando abbiamo stimato i primi due fattori nel conto precedente.

Come già anticipato, è molto utile sfruttare, ove possibile, quello che sappiamo sul calcolo di limiti in una variabile.

Corollario 3.5.11. (Separazione di variabili) *Siano* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $x^0 \in A'$.

a) *Se* f *è una funzione di una variabile sola; cioè, se* $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_k)$ *per qualche* k *e qualche* $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $x_k^0 \in I$, *allora*

$$\lim_{x\to x^0} f(x) = \lim_{x_k\to x_k^0} g(x_k)$$

se esiste il limite di g.

b) *Se f è una funzione con variabili separate; cioè, se*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=1}^{n} g_k(x_k)=g_1(x_1)g_2(x_2)\cdots g_n(x_n)$$

dove $g_k : I_k \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x_k^0 \in I_k$, allora

$$\lim_{x\to x^0} f(x)=\prod_{k=1}^{n}\left[\lim_{x_k\to x_k^0} g_k(x_k)\right]$$

se esistono finiti i limiti delle g_k.

Dimostrazione: Questa volta sfruttiamo le disuguaglianze (3.5.2) nello spazio del dominio in $\mathbb{R}^n$.

a) Supponiamo $\lim_{x_k\to x_k^0} g(x_k)=b\in\mathbb{R}$. Allora per ogni $\epsilon>0$, esiste $\delta>0$ per cui

$$|f(x)-b|=|g(x_k)-b|<\epsilon \quad\text{se}\quad 0<|x_k-x_k^0|<\delta.$$

Quindi basta scegliere $||x-x^0||\le\sqrt{n}|x_k-x_k^0|<\sqrt{n}\delta$, per avere $|f(x)-b|<\epsilon$; cioè $f\to b$ per $x\to x^0$.

b) Segue dalla parte a) più la Proposizione 3.5.7 (limite del prodotto di due funzioni). □

Esempio 3.5.12. Calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ se f è definita da:

$$f(x,y)=\left(\sin(xy),\sqrt{x+y},\frac{(y+1)\sin x}{x}\right).$$

Lavoriamo componente per componente. Per $f_1(x,y)=\sin(xy)$ abbiamo $xy\to 0$ per $(x,y)\to(0,1)$ grazie al Corollario 3.5.11. Poi, usando la continuità della funzione sin, abbiamo $f_1(x,y)\to\sin 0=0$ per $(x,y)\to(0,1)$. Abbiamo $f_2(x,y)=\sqrt{x+y}\to 1$, per il Corollario 3.5.11 e la continuità di $\sqrt{t}$. Infine, f_3 è il prodotto di $y+1$ e $\sin x/x$), per cui $f_3(x,y)\to 2$ per $(x,y)\to(0,1)$. Il limite di f vale $(0,1,2)$.

Polinomi e funzioni razionali

Vediamo ora alcune classi di funzioni continue per cui il calcolo di limiti è particolarmente agevole. Cominciamo con qualche definizione dove denotiamo con $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ i numemi interi (non-negativi) e $\mathbb{N}^+$ quelli positivi.

Definizione 3.5.13.

a) *Si chiama multi-indice un elemento $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ per qualche $n\in\mathbb{N}^+$. Si chiama grado di α la quantità $|\alpha|:=\sum_{k=1}^n\alpha_k$.*

b) *Si chiama monomio (in $\mathbb{R}^n$) una qualsiasi espressione della forma*

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

e si chiama grado di x^α il grado di α.

c) *Sia chiama polinomio (in $\mathbb{R}^n$ di grado d con coefficienti reali) una qualsiasi funzione della forma*

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le d} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R},$$

dove $a_\alpha \neq 0$ per qualche α con $|\alpha| = d$.

d) *Si chiama funzione razionale (in $\mathbb{R}^n$) una qualsiasi funzione della forma*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P, Q \quad \text{sono polinomi.}$$

Esempio 3.5.14. La funzione $P(x) = 5 + 3x_1x_2 + 4x_1^2x_2$ è un polinomio di grado 3 in $\mathbb{R}^2$. Infatti si ha

$$a_{(0,0)} = 5, \; a_{(1,1)} = 3, \; a_{(2,1)} = 4$$

e gli altri a_α con $|\alpha| \le 3$ sono nulli.

Usando proprietà algebriche e la separazione di variabili, si ottiene facilmente il seguente risultato.

Proposizione 3.5.15.

a) *Ogni polinomio in $\mathbb{R}^n$ è continuo in $\mathbb{R}^n$. In particolare vale*

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0), \quad \text{per ogni } \; x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

b) *Ogni funzione razionale in $\mathbb{R}^n$ è continua in $\mathbb{R}^n \setminus Z$ dove $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad Q(x) = 0\}$ è l'insieme degli zeri di Q. In particolare vale*

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = R(x_0), \quad \text{per ogni } \; x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus Z.$$

Dimostrazione: Per la parte a), abbiamo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ continuo su $\mathbb{R}^n$ per il principio della separazione di variabili (Corollario 3.5.11 b). Quindi ogni polinomio è continuo in $\mathbb{R}^n$ per le proprietà algebriche (Proposizione 3.5.6). La parte b) è una conseguenza immediata dalla parte a) e la proprietà algebrica in Proposizione 3.5.7 d).

Un metodo particolare per $n = 2$

Una tecnica, a volte utile, è l'uso delle *coordinate polari* per limiti di funzioni di due variabili. Si pone

$$x = x_0 + r\cos\theta, \quad y = y_0 + r\sin\theta, \quad \text{con} \quad r \ge 0, \theta \in [0, 2\pi). \tag{3.5.5}$$

Poi, data una funzione $f = f(x, y)$ definita per $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$, si pone

$$f^*(r, \theta) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \tag{3.5.6}$$

Si noti che $(x, y) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow r \to 0^+$ perchè $r = ||(x - x_0, y - y_0)||$. Inoltre, per θ fisso, quando $r \to 0^+$, si va verso (x_0, y_0) lungo una retta con pendenza $\tan\theta$. Sappiamo, allora, che non basta che il limite esista per ogni θ fissato (come succede nel Esempio 3.5.5), ma serve che il limite esiste **uniformemente** rispetto a θ.

Proposizione 3.5.16. *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Allora*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = b$$

se $f^*(r,\theta)$ *definita da* (3.5.5) – (3.5.6) *soddisfa*

$$\lim_{r\to 0^+} f^*(r,\theta) = b \quad \textit{uniformente rispetto a } \theta$$

ovvero, per ogni $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tale che*

$$|f^*(r,\theta) - b| < \epsilon \ \ \forall r \in (0,\delta), \ \ \forall\, \theta \in [0, 2\pi). \tag{3.5.7}$$

Dimostrazione: Basta notare che la condizione (3.5.7) è equivalente ad

$$|f(x,y) - b| < \epsilon \ \ \forall\ (x,y):\ 0 < ||(x - x_0, y - y_0)|| < \delta.$$

□

Esercizio 3.5.17. Usando Proposizione 3.5.14, rifare gli esempi esempi 3.5.2 e 3.5.4.

Non è sempre vero che questa tecnica sia di facile utilizzoo, come si vede nell'esempio seguente.

Esempio 3.5.18. Mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4 + y^2} = 0$$

Definiamo $f(x,y) = x^5/(x^4 + y^2)$. Arriviamo subito alla conclusione se usiamo una stima opportuna

$$0 \le \left| \frac{x^5}{x^4 + y^2} \right| \le |x| \to 0 \ \text{ per } \ (x,y) \to (0,0).$$

Invece, usando la sostituzione (3.5.5), l'espressione (3.5.6) diventa

$$f^*(r,\theta) = \frac{r^5 \cos^5\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3\cos^5\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

e, quindi, troviamo

$$|f^*(r,\theta)| \le \frac{r^3}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}.$$

Per stimare quest'ultima espressione uniformemente in θ, ci serve un minorante per $h(\theta) = r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta$ per $\theta \in [0, 2\pi)$ per $r > 0$ fisso e piccolo. Si nota che $h(0) = h(2\pi) = r^2$ e che

$$h'(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta(1 - 2r^2\cos^2\theta),$$

dove il secondo fattore è positivo per ogni $r > 0$ piccolo. Quindi, l'unici zeri di $h'(\theta)$ sono in $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$, dove

$$h(\pi) = r^2, \ h(\pi/2) = h(3\pi/2) = 1$$

Quindi, per $r > 0$ piccolo, il minimo di h è r^2. Allora

$$|f^*(r,\theta)| \le \frac{r^3}{r^2} = r \to 0$$

uniformemente in θ.

Limiti infiniti e limiti all'infinito

Finiamo questo paragrafo con una breve discussione sul caso di *limiti infiniti* e *all'infinito* per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Innanzitutto, abbiamo bisogno di precisare che cosa intendiamo per infinito in $\mathbb{R}^n$. Un modo per introdurre il concetto di infinito consiste nell' aggiungere un punto, chiamato ∞, che rende $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *compatto*; in particolare, ∞ sarà il simbolo che rappresenta il limite di ogni successione la cui norma è definitivamente più grande di ogni numero finito (vedi Paragrafo 3.6 per il concetto di compattezza). Lo stesso discorso è stato fatto quando la retta reale è stata ampliata a $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. In $\mathbb{R}^n$, aggiungere un punto solo all'infinito vuol dire che nel concetto di limite infinito o all'infinito interessa solo il fatto che la norma della variabile, indipendente o dipendente, sia illimitata. Di fatto, aggiungiamo un punto ∞ e prolunghiamo la funzione norma a $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \to [0, +\infty]$ definendo "$||\infty|| = +\infty$".

Definizione 3.5.19. *Sia ∞ il punto all'infinito di $\mathbb{R}^n$.*

a) *Per ogni $r > 0$, si chiama intorno sferico bucato di raggio r e centro ∞, l'insieme*

$$B_r^\circ(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x|| > r\}; \tag{3.5.8}$$

b) *Il punto ∞ è un punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$ (A è necessariamente illimitato) se per ogni $r > 0$ esiste $x \in A \cap B_r^\circ(\infty)$; ovvero, per ogni $r > 0$ esiste $x \in A$ con $||x|| > r$.*

Definizione 3.5.20. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

a) *Se ∞ è un punto di accumulazione per A e $b \in \mathbb{R}^m$, diciamo che $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $r = r(\epsilon)$ tale che*

$$x \in A, \ ||x|| > r \ \Rightarrow \ ||f(x) - b|| < \epsilon;$$

b) *Se ∞ è un punto di accumulazione per A, diciamo che $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $r = r(M)$ tale che*

$$x \in A, \ ||x|| > r \ \Rightarrow \ ||f(x)|| > M;$$

c) *Se x^0 è un punto di accumulazione per A, diciamo che $\lim_{x\to x^0} f(x) = \infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta = \delta(M)$ tale che*

$$x \in A, \ 0 < ||x - x^0|| < \delta \ \Rightarrow \ ||f(x)|| > M.$$

In tutti i casi, abbiamo l'unicità del limite e qualche proprietà algebrica del limite (somme, prodotti, etc.) prestando particolare attenzione ai casi di limiti infiniti dovuta al fatto che l'infinito è "unico".

Esempi 3.5.21.

(a) $\lim_{(x,y)\to\infty} \left[(x^2y + xy)e^{-2x^2-3y^2}\right] = 0$. Infatti

$$\frac{|x^2y + xy|}{e^{2x^2+3y^2}} \le \frac{x^2\,|y| + |x|\,|y|}{e^{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{e^{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}} \to 0 \ \text{ per } (x,y) \to \infty$$

dove abbiamo usato $t^{3/2}e^{-t}, te^{-t} \to 0$ per $t \to +\infty$ con $t = x^2 + y^2$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\log(xy^2 + x^2y), xy) = \infty$ in $\mathbb{R}^2$. Infatti, basta avere una componente che tenda all'infinito in $\mathbb{R}$; cioè

$$||(\log(xy^2 + x^2y), xy)|| \geq |\log(xy^2 + x^2y)| \to +\infty$$

per $||(x,y)|| \to 0^+$ perchè sul dominio $A = \{(x,y) : \ xy^2 + x^2y > 0\}$ abbiamo

$$0 < xy^2 + x^2y \leq |x|\,|y|(|x| + |y|) \leq ||(x,y)||^3$$

e quindi

$$\log(xy^2 + x^2y) \leq \log\left(||(x,y)||^3\right) \to -\infty, \quad \text{per} \quad ||(x,y)|| \to 0^+.$$

3.6 Continuità e Compattezza.

In questo paragrafo, vogliamo approfondire un'altro concetto topologico molto usato in analisi; cioè la compattezza in spazi metrici. Questo concetto è stato introdotto in Analisi I nel linguaggio puramente topologico dei ricoprimenti. Qui, vogliamo sfruttare la metrica per dare una presentazione equivalente nel più analittico linguaggio della estrazione di sottosuccessioni convergenti. Questo materiale rappresenta un argomento molto importante, ma è facoltativo per il programma d'esame per l'anno accademico 2008-2009 (**tranne** gli enunciati del Teorema 3.6.6 (Heine-Borel) e Teorema 3.6.10 (Weierstrass) nel caso $(X, d) = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$). Invece, il resto del paragrafo (insieme con i paragrafi 3.7 e 3.8) è la base del corso avanzato.

Cominciamo con la definizione (già vista in Analisi I) a livello topologico.

Definizione 3.6.1. *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico (vedi Proposizione 3.3.7). Si chiama $K \subseteq X$ compatto se da una qualsiasi collezione di insiemi aperti $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ con la proprietà*

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha, \tag{3.6.1}$$

esiste una sottocollezione finita $\mathcal{U}_N = \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ con la stessa proprietà; cioè $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{\alpha_i}$.

Si chiama ricoprimento aperto di K una collezione $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ di insiemi aperti con la proprietà (3.6.1). Quindi, la compattezza di K equivale dire: *da ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di K, si può estrarre un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}_N$ di K.* Si dice anche che K compatto soddisfa la *proprietà di Heine-Borel.* Nel caso $X = \mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea (generata dalla norma $||\cdot||$), è stato detto (in Analisi I) che un insieme è compatto se è **chiuso** e **limitato**. Una dimostrazione di questa affermazione è uno dei nostri obiettivi. Per cominciare, i seguenti esempi mostrano che la proprietà di Heine-Borel cade in $\mathbb{R}$ se uno togliesse una di queste due proprietà topologiche.

Esempi 3.6.2. Nello spazio topologico $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$:

(a) $A = (0, +\infty)$ **non** è compatto. Infatti, dal ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{(0, j) : \ j \in \mathbb{N}^+\}$ non si può estrarre un sottoricoprimento finito. Il problema è che A **non è limitato**.

(b) $A = (0, 1)$ **non** è compatto. Infatti, dal ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{(0, 1 - 1/j) : \ j = 2, 3, \ldots\}$ non si può estrarre un sottoricoprimento finito. Il problema è che A **non è chiuso**; cioè il punto di accumulazione $1 \in A'$ non sta in A. C'è lo stesso problema per il ricoprimento $\mathcal{U} = \{(1/j, 1) : \ j = 2, 3, \ldots\}$ dovuto al fatto che $0 \in A' \setminus A$.

Negli spazi metrici (X, d), la proprietà di compattezza per K equivale alla seguente proprietà delle successioni in K.

Definizione 3.6.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Si chiama $K \subseteq X$ compatto per successioni se da ogni successione $\{x_j\} \subset K$ si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{j_k}\}$ convergente a qualche $x \in K$.*

La dimostrazione dell'equivalenza delle due definizioni 3.6.1 e 3.6.3 nel caso di spazi metrici sfrutta le seguenti proprietà di insiemi compatti per successioni.

Teorema 3.6.4. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $K \subset X$ compatto per successioni. Allora*

a) *K è chiuso*

b) *K è limitato*

c) *K è separabile; cioè esiste un sottoinsieme $Y \subset K$ numerabile e denso.*

Dimostrazione: Sia K compatto per successioni in (X, d). Possiamo assumere che K sia non vuoto, altrimenti non c'è niente da dimostrare.

1. K **è chiuso:** Sia $\{x_j\} \subset K$ tale che x_j converge ad $x \in X$. Dobbiamo mostrare che $x \in K$. Dalla compatezza di K, esistono $y \in K$ ed una sottosuccessione $\{x_{j_k}\}$ tale che $x_{j_k} \to y$ per $k \to +\infty$. Ma abbiamo anche $x_{j_k} \to x$ per la convergenza di $\{x_j\}$. Per l'unicità del limite $x = y \in K$.

2. K **è limitato:** Per assurdo, supponiamo che K sia illimitato. Per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$ abbiamo $K \not\subset B_r(x)$. Quindi, scegliendo qualsiasi $x \in X$ fisso, esite una successione $\{x_j\} \subset K$ tale che $d(x_j, x) \to +\infty$ per $j \to \infty$. Quindi, per ogni sottosuccesione $\{x_{j_k}\}$ e per ogni $y \in K$ si ha
$$d(x_{j_k}, y) \geq d(x_{j_k}, x) - d(x, y) \to +\infty,$$
ovvero nessuna sottosuccessione di $\{x_j\} \subset K$ può convergere ad un punto $y \in K$. Questo è assurdo.

3. K **è separabile:** Sia $x_0 \in K$ arbitario. Per la parte b), abbiamo $\sup_{x \in K} d(x, x_0) := d_0 < +\infty$. Scegliamo $x_1 \in K$ tale che
$$d(x_0, x_1) \geq d_0/2.$$
Per induzione, scegliamo $x_{j+1} \in K$ tale che
$$\min_{1 \leq k \leq j} d(x_k, x_{j+1}) \geq d_j/2 \quad \text{dove} \quad d_j := \sup_{x \in K} \min_{1 \leq k \leq j} d(x_k, x).$$
Abbiamo $\{d_j\}$ una successione descrescente in $[0, +\infty)$. Infatti, per ogni $x \in K$ si ha
$$\min_{1 \leq k \leq j+1} d(x_k, x) \leq \min_{1 \leq k \leq j} d(x_k, x)$$
e prendendo il sup per $x \in K$ si ha $d_{j+1} \leq d_j$. Ci sono due possibilità. La prima possibilità è $d_j \geq \delta > 0$ per ogni j. Ma, allora nessuna sottosuccessione di $\{x_j\}$ può convergere in K (non può essere una successione di Cauchy). Questo è assurdo per la compatezza di K. La seconda possibilità è che $d_j \to 0$. In questo caso $\{x_j\} \subset K$ è uno sottoinsieme numerabile e denso perchè per ogni $x \in K$ si può prendere la successione $\{x_{k_j}\}$ con $x_{k_j} \in \{x_1, \ldots, x_j\}$ il punto più vicino ad x; cioè
$$d(x_{k_j}, x) := \min_{1 \leq k \leq j} d(x_k, x) \leq d_j \to 0 \quad \text{per} \quad j \to +\infty.$$

□

Adesso possiamo mostrare il risultato voluto.

Teorema 3.6.5. *Un insieme $K \subset (X, d)$ è compatto (soddisfa la proprietà di Heine-Borel) se e solo se K è compatto per successioni; cioè da ogni successione $\{x_j\} \subset K$ si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{j_k}\}$ convergente a qualche $x \in K$.*

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Sia K compatto (proprietà di Heine-Borel). Supponiamo, per assurdo, che K non sia compatto per successioni. Allora esiste una successione $\{x_j\} \subset K$ senza punto di accumulazione in K. Da questa successione possiamo prendere una sottosuccessione $\{y_k\}$ con tutti elementi distinti; cioè $y_k \neq y_m$ per ogni $k \neq m$. Nessun punto y_m è punto di accumulazione per la successione $\{y_k\}$. Quindi, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $r_m > 0$ tale che

$$B_{r_m}(y_m) \cap K \cap \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{y_m\}.$$

Quindi

$$\mathcal{U} := \{B_{r_m}(y_m) : \ m \in \mathbb{N}\} \bigcup (K \setminus \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}})$$

fornisce un ricoprimento di K compatto con insiemi aperti (relativi ad K). Ogni sua sottocollezione finita non può coprire K. Questo è assurdo.

($\Leftarrow$) Supponiamo K compatto per successioni.

1. Consideriamo un ricoprimento $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ <u>numerabile</u> di K. Vogliamo estrarre un sottoricoprimento finto. Supponiamo per assurdo che questo non sia possible. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$ la collezione finita $\{E_1, \ldots, E_m\}$ non ricopre K. Quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $x_m \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j$. Per la compatezza di K, esistono $y \in K$ ed una sottosuccessione $\{x_{m_k}\}$ tale che $x_{m_k} \to y$ per $k \to +\infty$. L'insieme $F_m := X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j$ è chiuso in X e $x_n \in F_m$ per ogni $n \geq m$. Quindi $y \in F_m$. Ma $y \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ per cui $y \notin K$. Questo è assurdo.
2. Per il caso generale, consideriamo un ricoprimento arbitrario $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Vogliamo usare la separabilità di K (parte c) del Teorema 3.6.3) per estrarre un sottoricoprimento numerabile. Una volta fatto questo, il risultato segue dal punto 1. Esiste un sottoinsieme numerabile e denso $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di K. La collezione di palle aperte

$$\mathcal{B} = \{B_{1/k}(y_j) : \quad j, k \in \mathbb{N}\}$$

è un ricoprimento numerabile di K. Per ogni E aperto in X, esiste una sottocollezione (numerabile) $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{B}$ tale che

$$E \cap K = \{K \cap B' : B' \in \mathcal{B}'\}$$

Infatti, per ogni $x \in E \cap K$ esiste una palla $B_r(x) \subset E$. Prendiamo $y_{\bar{j}}$ tale che $d(y_{\bar{j}}, x) < 1/\bar{k}$ con $2/\bar{k} < r$. Abbiamo $x \in B_{y_{\bar{j}}}(1/\bar{k}) \subset E$. Possiamo prendere $\mathcal{B}'$ come la collezione delle palle distinte $B_{y_{\bar{j}}}(1/\bar{k})$ per x che varia in $E \cap K$. Denotiamo con $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la successione di palle necessaria al variare di $\alpha \in \mathcal{A}$. Per costruzione, si ha $B_j \subset E_{\alpha_j}$ per qualche $\alpha_j \in \mathcal{A}$. Quindi, abbiamo estratto un ricoprimento numerabile $\{E_{\alpha_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ di K. □

Sulla base di Teorema 3.6.5, si potrebbe **definire** la compattezza negli spazi metrici come compatezza per successioni. Sfruttando questa equivalenza nel caso particolare $(X, d) = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$, possiamo mostrare la caratterizzazione di compattezza enunciato in Analisi I.

Teorema 3.6.6. (di Heine-Borel) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Allora K è compatto se e solo se K è chiuso e limitato.*

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Se K è compatto (per successioni) possiamo applicare Teorema 3.6.4 (a) e (b) per trovare K chiuso e limitato.

($\Leftarrow$) Qui, l'idea è di ripetere l'argomento di bisezione usato nella dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass. Si mostra che ogni successione $\{x_j\} \subset K$ limitata dovrebbe avere un punto di accumulazione $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Esiste una sottosuccessione convergente ad x^0. Ma K è anche chiuso, quindi la sottosuccessione converge in K. □

Il primo legame tra compattezza e continuità si trova al livello topologico.

Teorema 3.6.7. *Sia $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ una funzione continua tra spazi topologici. Se $K \subset X$ è compatto, allora l'immagine $f(K)$ è compatto in Y.*

Dimostrazione: Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \ \alpha \in \mathcal{A}\}$ è un ricoprimento aperto di $f(K)$, allora $\mathcal{V} := \{V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha), \ \alpha \in \mathcal{A}\}$ è un ricoprimento aperto di K perchè f è continua. Essendo K compatto, esiste un sottoricoprimento finito $\{V_{\alpha_i} = f^{-1}(U_{\alpha_i}) : \ i = 1, \dots N\}$ di K, e, quindi $\{U_{\alpha_i} : \ i = 1, \dots N\}$ è un sottoricoprimento finito di $f(K)$. □

Notiamo che **non** è vero, in generale, che K compatto in Y implica che il controimmagine $f^{-1}(K)$ è compatto in X. Ad esempio, qualsiasi funzione costante f definita su uno spazio topologico non compatto avrà tutto il spazio X come la controimmagine del valore assegnato di f. Invece, se f è continua e **invertibile**, allora sarà vero (vedi Analisi Matematica III). Una funzione per cui K compatto implica $f^{-1}(K)$ compatto si chiama **propria**. Adesso, cominciamo a vedere delle conseguenze della continuità su insiemi compatti in spazi metrici; in particolare, la relazione con il concetto di continuità in senso uniforme e la relazione con massimi e minimi per funzioni a valor reali.

Definizione 3.6.8. *Una funzione $f : A \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ si chiama uniformemente continua su A se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che*

$$x, y \in A, \quad d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Teorema 3.6.9. (di Heine-Cantor) *Sia $f : K \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ continua su K compatto. Allora f è uniformemente continua su K.*

Dimostrazione: Per assurdo. Se fosse falso, esisterebbe $\bar{\epsilon} > 0$ ed esisterebbero due successione $\{x_j\}, \{y_j\} \subset K$ tali che

$$d_Y(f(x_j), f(y_j) \geq \bar{\epsilon} \ \text{ ma } \ d_X(x_j, y_j) \to 0 \ \text{ per } \ j \to +\infty. \tag{3.6.2}$$

Per la compattezza di K, esistono sottosuccessioni $\{x_{j_k}\}, \{y_{j_k}\} \subset K$ e punti limiti $x, y \in K$ per cui $x_{j_k} \to x, y_{j_k} \to y$. Ma allora,

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, x_{j_k}) + d_X(x_{j_k}, y_{j_k}) + d_X(y_{j_k}, y) \to 0 \ \text{ per } \ k \to +\infty.$$

Quindi $x = y$ e si ha

$$d_Y(f(x_{j_k}), f(y_{j_k})) \leq d_Y(f(x), f(x_{j_k})) + d_X(f(x), f(y_{j_k})) \to 0 \ \text{ per } \ k \to +\infty,$$

in contradizione con (3.6.2). □

Adesso, esaminiamo il legame tra continuità, compattezza ed estremi globali per funzioni a valori in $\mathbb{R}$ (un campo ordinato).

Teorema 3.6.10. (di Weierstrass) *Sia $f : K \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ continua su K compatto. Allora*

a) *f è limitata su K;*

b) *f ammette massimo e minimo in K; cioè esistono $x_{\min}, x_{\max} \in K$ t.c.*

$$f(x_{\min}) \leq f(x), \quad f(x_{\max}) \geq f(x), \quad \forall\, x \in K.$$

Dimostrazione:

a) Se f non fosse limitata superiormente, esiste $\{x_j\} \subset K$ per cui

$$f(x_j) \geq j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.6.3}$$

Per la compattezza (per successioni), esiste una sottosuccessione $\{x_{j_k}\}$ convergente ad $x \in K$. Quindi per la continuità $f(x_{j_k}) \to f(x) \in \mathbb{R}$ per $k \to +\infty$, in contradizione con (3.6.3). C'è un argomento analogo se f non fosse limitata inferiormente.

b) Essendo f limitata, esiste una successione $\{x_j\} \subset K$ per cui

$$f(x_j) \to \Lambda = \sup_{x \in K} f(x).$$

Per la compattezza (per successioni), esiste una sottosuccessione $\{x_{j_k}\}$ connvergente ad $x \in K$. Quindi per la continuità $f(x_{j_k}) \to f(x) = \Lambda$, e, quindi $x_{\max} = x$. L'argomento per il minimo è analogo. □

3.7 Continuità e Connessione

Nello stesso spirito del paragrafo precedente, vogliamo dare in modo sintetico e rapido un trattamento del concetto topologico di connessione e la sue relazioni con le funzioni continue. Di nuovo, l'argomento è facoltativo per il programma d'esame (7cfu) per l'anno accademico 2008-2009 ma è obbligatorio per il corso avanzato (8cfu). Cominciamo con la definizione al livello degli spazi metrici, e poi passiamo al concetto per sottoinsiemi di spazi metrici ed i legami con le funzioni continue.

Definizione 3.7.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Si chiama X connesso se non è possibile decomporre $X = U \cup V$ con U, V aperti (in X), disgiunti, non vuoti. Invece, uno spazio per cui $X = U \cup V$ con U, V aperti disgiunti non vuoti si chiama sconnesso.*

Dal punto di vista intuitivo, la connessione di uno spazio vuol dire che non è fatto di due (o piu') "gobbe distinte". In pratica, non è così facile usare la definizione direttamente per mostrare che un certo spazio sia connesso; è più facile mostrare che uno spazio non lo è.

Esempi 3.7.2.

(a) Uno spazio metrico formato di un punto solo è connesso.

(b) (X, d) con $X = (0, 1) \cup (1, 2) \subset \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$ è sconnesso. X è l'unione di due aperti disgiunti non vuoti $U, V = (0, 1), (1, 2)$.

(c) (X, d) con $X = B_1(0,0) \cup B_1(2,0) \subset \mathbb{R}^2$ e $d(x, y) = ||x - y||$ è sconnesso essendo $U = B_1(0,0), V = B_1(2,0)$ aperti, disgiunti, non vuoti con unione X.

In parte per le difficoltà di decidere se uno certo spazio è connesso, sarà utile di considerare espressioni equivalente per la connessione. Per la prima espressione, ricordiamo che un sottoinsieme A di X si chiama <u>*proprio*</u> se $A \neq X, A \neq \emptyset$.

Proposizione 3.7.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora X è connesso se e solo se non ci sono sottoinsiemi propri che siano sia aperti che chiusi; cioè gli unici sottoinsiemi A che sono sia aperti che chiusi sono $A = X, \emptyset$.*

Dimostrazione: Se A è proprio, aperto, chiuso allora $B = X \backslash A$ è non vuoto, aperto e $X = A \cup B$. Quindi, l'esistenza di A implica la sconnessione di X. Vice-versa la sconnessione di X implica l'esistenza di A. $\square$

Osservazione 3.7.4. Questa proposizione viene usata spessa per mostrare che una proprietà $\mathcal{P}$ vale ovunque in uno spazio connesso X. Si verifica che l'insieme A dei punti per cui vale $\mathcal{P}$ sia aperto, chiuso, non vuoto. Quindi $A = X$.

La seguente definizione serve per un'altra espressione equivalente della connessione e per definire sottoinsiemi connessi.

Definizione 3.7.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Due sottoinsiemi $A, B \subset X$ sono chiamati <u>separati</u> se $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$; cioè se nessun punto della chiusura di B appartiene ad A e nessun punto della chiusura di A appartiene a B.*

Proposizione 3.7.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora X è connesso se e solo se X non è l'unione di due sottoinsiemi non vuoti e separati.*

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Per assurdo, supponiamo che $X = A \cup B$ con A, B separati non vuoti. Si trova che A, B sono aperti. Infatti, da $A \cap \overline{B} = \emptyset$ si ha $A \subset (X \setminus \overline{B})$ e da $A \cup B = X$ si ha $(X \setminus \overline{B}) \subset (X \setminus B) \subset A$. Quindi $A = X \setminus \overline{B}$ e A è aperto. Si trova B aperto usando lo stesso argomento. Quindi X è l'unione di due aperti disgiunti non vuoti, assurdo.

($\Leftarrow$) Se X non fosse connesso, esisterebbero due aperti disgiunti non vuoti U e V per cui $X = U \cup V$. Ovviamente U e V sono anche chiusi. Quindi sono separati. Infatti,

$$(U \cap \overline{V}) \cup (\overline{U} \cap V) = U \cap V = \emptyset,$$

ovvero X è l'unione di due insiemi separati non vuoti, assurdo. $\square$

Adesso siamo pronti per la definizione di un sottoinsieme connesso.

Definizione 3.7.7. *Un sottoinsieme $E \subseteq (X, d)$ di uno spazio metrico si chiama <u>connesso</u> se E non è l'unione di due suoi sottoinsiemi A e B non vuoti e separati, altrimenti si chiama E <u>sconnesso.</u>*

Notiamo che sarebbe stato possibile dare una definizione naturale pensando di $(E, d_{|E})$ come uno spazio metrico a se; cioè, usando la *topologia relativa* su E, indotta dalla restrizione della metrica ad E. Ma, la Proposizione 3.7.6 essenzialmente mostra che questo concetto sarebbe equivalente a quello dato in Definizione 3.7.7 perchè la chiusura nella topologia relativa ad E di un sottoinsieme $A \subset E$ è $E \cap \overline{A}$ dove $\overline{A}$ è la chiusura nella topologia di X. Più concretamente, si vede che i controesempi 3.7.2 b), c) sono sconnessi anche per la Definizione 3.7.7. Nel caso della retta reale, si può caratterizzare gli insiemi connessi.

Teorema 3.7.8. *Un sottoinsieme $E \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ con più di un punto è connesso se e solo se E è un intervallo; cioè ha la proprietà che $x, y \in E$ con $x < y$ implica $z \in E$ per ogni z tale che $x < z < y$. In particolare, $\mathbb{R}$ è connesso.*

($\Rightarrow$) Se E connesso con più di un punto non fosse un intervallo, esisterebbero $x, y \in E$ e $z \notin E$ per cui $x < z < y$. Allora $A := E \cap (-\infty, z)$ e $B := E \cap (z, +\infty)$ sono due insiemi non vuoti e separati con unione E, assurdo.

($\Leftarrow$) Per assurdo, supponiamo che l'intervallo E sia sconnesso. Allora esiterebbero A, B non vuoti separati con $E = A \cup B$. Prendiamo $x \in A, y \in B$ con $x < y$ (il caso contrario $y > x$ è analogo). Poichè $A \cap [x, y]$ è limitato superiormente, esiste finito $z = \sup(A \cap [x, y])$. Per la proprietà nota del estremo superiore $z \in \overline{A}$ e, quindi, $z \notin B$ perchè A e B sono separati. In particolare, $x \leq z < y$. Se fosse $z \notin A$, allora $x < z < y$ e, quindi, $z \notin E$, assurdo. Quindi, dobbiamo avere $z \in A$. Ma in tal caso, poichè A e B sono separati, abbiamo $z \notin \overline{B}$. Quindi, esiste $z_1 \notin B$ tale che $z < z_1 < y$. Ma allora, z_1 soddisfa $x < z < z_1 < y$ e, quindi, non appartiene ad A per la definizione di z. Quindi $z_1 \notin A \cup B$, assurdo. □

Un modo generale di mostrare che un insieme è connesso è di sfruttare il fatto che la connessione è trasportata da una funzione continua. Il seguente teorema è il punto chiave di tutto il nostro discorso.

Teorema 3.7.9. *Sia $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una funzione continua fra spazi metrici. Se X è connesso, allora $f(X)$ è connesso in Y. In particolare, l'immagine di $f(E)$ è connessa per ogni $E \subset (X, d_X)$ connesso.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che E sia connesso in X, ma $f(E)$ sia sconnesso in Y. Allora esisterebbero $A, B \subset Y$ separati in Y per cui $f(E) = A \cup B$. Scegliamo

$$C := f^{-1}(A) \cap E \quad \text{e} \quad D := f^{-1}(B) \cap E.$$

Si ha:

1. C, D sono non vuoti. Infatti, $f(E) = A \cup B$ con A, B non vuoti, quindi c'è almeno un punto x_A di E mandato in A, e almeno un punto x_B di E mandato in B.

2. $E = C \cup D$. Infatti, $C, D \subset E$, per definizione, e, quindi $C \cup D \subset E$. D'altra parte, per ogni $x \in E$, $f(x) \in A \cup B$. Quindi x viene mandato in A oppure in B, ovvero $x \in C \cup D$.

3. C e D sono separati. Basta mostrare che $\overline{C} \cap D = \emptyset$, perchè l'affermazione $\overline{C \cap \overline{D}}$ è del tutto analogo. Si ha $A \subset \overline{A}$, e, quindi $C \subset f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{A})$. Quindi, $\overline{C} \subset \overline{f^{-1}(\overline{A})} = f^{-1}(\overline{A})$ poichè $\overline{A}$ è chiuso e f continua. Quindi abbiamo

$$f(\overline{C}) \subset \overline{A}.$$

D'altre parte, $f(D) \subset B$ dove $B \cap \overline{C} = \emptyset$ (A, B separati). Quindi $\overline{C} \cap D = \emptyset$.

Quindi, E sarebbe sconnesso, assurdo. □

Combinando i Teoremi 3.7.8 e 3.7.9 per funzioni $f : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ continue su insiemi connessi a valori in $\mathbb{R}$, si ottengono subito i classici risultati noti per funzioni definite su intervalli a valori reali.

Corollario 3.7.10. (Teorema dei valori intermedi) *Sia $f : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ una funzione definita su E connesso in X. Se esistono $x_\alpha, x_\beta \in E$ per cui $f(x_\alpha) = \alpha < \beta = f(x_\beta)$, allora per ogni $\gamma \in (\alpha, \beta)$ esiste $x_\gamma \in E$ per cui $f(x_\gamma) = \gamma$.*

Dimostrazione: Essendo f continua su E connesso, l'immagine $f(E) \subset \mathbb{R}$ è connessa, e, quindi, è un intervallo. Cioè, per ogni $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\gamma \in f(E)$, ovvero, esiste $x_\gamma \in E$ tale che $f(x_\gamma) = \gamma$. □

Corollario 3.7.11. (Teorema degli zeri) *Sia $f : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ una funzione definita su E connesso in X. Se esistono $x_+, x_- \in E$ per cui $f(x_-) < 0 < f(x_+)$, allora esiste $x_0 \in E$ per cui $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione: Segue direttamente dal Corollario 3.7.10 usando $\alpha = f(x_-), \beta = f(x_+)$. Si ha $x_0 = x_\gamma$ per $\gamma = 0$. □

A questo punto abbiamo dei bei risultati sulla importanza della connessione e la continuità di funzioni tra sottoinsiemi di spazi metrici, ma non sappiamo riconoscere bene ancora chi sono i sottoinsiemi connessi. Cominciamo a rimediare questa situazione con un altro corollario dei Teoremi 3.7.8 e 3.7.9. La sua dimostrazione è immediata.

Corollario 3.7.12. *Sia $\varphi : I = [a, b] \to (X, d)$ una funzione continua, detto <u>cammino o arco</u> in X. Allora l'immagine $\varphi(I)$ è connessa in X.*

Il risultato dice che gli estremi del cammino $x = \varphi(a), y = \varphi(b)$ sono "legati" con un passeggiata continua che rimane completamente in X, ovvero che l'estremo y è "raggiungibile" da x con un cammino continuo. Questo risultato suggerisce la seguente definizione di una forma più forte (in generale) di connessione.

Definizione 3.7.13. *Sia $E \subseteq (X, d)$. Diciamo che E è <u>connesso per archi</u> se dati due punti $x, y \in E$ esiste un cammino (continuo) $\varphi : [0, 1] \to E$ tale che $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$.*

Teorema 3.7.14. *Sia $E \subseteq (X, d)$ connesso per archi. Allora E è connesso. Inoltre, se $E \subset (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ è aperto i due concetti di connessione sono uguali; cioè E aperto connesso in $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ implica E connesso per archi.*

Prima di fare la dimostrazione, notiamo che la classe di esempi di insiemi connessi cresce molto.

Esempi 3.7.15.

(a) $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ è connesso per archi e, quindi connesso. Basta prendere $\varphi(t) = (1-t)x + ty$ con $t \in [0, 1]$ per connettere x ad y.

(b) Ogni sottoinsieme E **convesso** in $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi dove la convessità vuol dire: $x, y \in \mathbb{R}^n$ implica che il segmento $[x, y] = \{z = (1-t)x + ty : \quad t \in [0, 1]\}$ è contenuto in E. In particolare, le palle aperte, palle chiuse, rettangoli, etc. sono connessi per archi e, quindi, connessi.

(c) Un esempio di un'insieme connesso ma **NON** connesso per archi è costruita dal grafico della funzione $f(x) = \sin(1/x)$ (*topologist's sine curve*). Più precisamente

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = f(x), \quad x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) : \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

è connesso ma non connesso per archi.

Dimostrazione di Teorema 3.7.14.

<u>E connesso per archi implica E connesso</u>. Per assurdo, supponiamo che che E non sia connesso. Allora esiste una separazione di $E = A \cup B$ con A e B non vuoti e nessun punto limite in comune ($\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$). Esistono $x \in A, y \in B$ e prendiamo un cammino $\varphi : [0, 1] \to E$ tale che $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$. Abbiamo $\Gamma := \varphi([0, 1])$ l'immagine di φ connesso in E. Però $C := \Gamma \cap A$ e $D := \Gamma \cap B$ soddisfano $\Gamma = C \cup D$ e non hanno un punto limite in comune. Quindi, C e D sono separati in Γ connesso, dunque almeno uno di loro è vuoto. Questo è assurdo perche φ parte da A e finisce in B.

$E \subset (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ connesso e aperto implica E connesso per archi. Possiamo assumere che E non sia vuoto. Allora esiste almeno un punto $x_0 \in E$. Definiamo l'insieme di tutti i punti connessi ad x_0 tramite un cammino continuo, ovvero

$$E_{x_0} = \{x \in E : \ \exists \ \varphi : [0,1] \to E \text{ t.c. } \varphi(0) = x_0, \ \varphi(1) = x\}.$$

1. Mostriamo che E_{x_0} è aperto. Sia $x \in E_{x_0} \subset E$ dove E è aperto. Allora esiste $B_\epsilon(x) \subset E$ e basta mostrare che per ogni $y \in B_\epsilon(x)$ possiamo costruire un cammino continuo da x_0 ad y. Esiste $\varphi_1 : [0,1] \to E$ continua con $\varphi_1(0) = x_0$ e $\varphi_1(1) = x$. Da x ad y possiamo definire $\varphi_2 : [0,1] \to B_\epsilon(x) \subset E$ via

   $$\varphi_2(t) = (1-t)x + ty, \quad t \in [0,1].$$

   Chiaramente φ_2 è continua, $\varphi_2(0) = x, \varphi_2(1) = y$, e il suo immagine sta in $B_\epsilon(x)$ (la palla è convessa). Allora possiamo definire $\varphi : [0,1] \to E$ incollando φ_1 e φ_2 via

   $$\varphi(t) = (\varphi_1 * \varphi_2)(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \varphi_2(2t-1) & 1/2 \le t \le 2. \end{cases}$$

   Chiaramente $\varphi(0) = x_0, \varphi(1/2) = x = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \varphi(1) = y$ e φ è continua con il suo immagine in E. Quindi $y \in E_{x_0}$ e E_{x_0} è aperto.

2. Mostriamo che E_{x_0} è chiuso. Infatti, per ogni $x \in E \setminus E_{x_0}$ esiste una palla $B_\epsilon(x) \subset E$ (E è aperto). Se esistesse un $y \in B_\epsilon(x)$ connesso ad x_0 con un cammino continuo φ_1 da x_0 ad y, allora esisterebbe un cammino continuo $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ con φ_2 il segmento da y ad x, assurdo.

3. Abbiamo E_{x_0} non vuoto perchè x_0 è connesso a se stesso via il cammino costante $\varphi(t) = x_0$ per ogni $t \in [0,1]$.

Poichè E_{x_0} è non vuoto, aperto e chiuso in E e E è connesso, abbiamo $E_{x_0} = E$. Quindi ogni punto in E è connesso ad x_0. Segue che per ogni $x, y \in E$, x e y sono connessi via un cammino che passa per x_0. Quindi E è connesso per archi. □

3.8 Completezza

In questo paragrafo, ricordiamo il concetto di spazio metrico *completo* e forniamo la dimostrazione della completezza di $\mathbb{R}^n$ per $n \ge 1$ già affermata in Analisi I. Ricordiamo inanzitutto che il punto chiave è il concetto di successione di Cauchy e se ogni successione di Cauchy è convergente, o meno.

Definizione 3.8.1. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_j\} \subset X$ si chiama successione di Cauchy se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$d(x_j, x_k) < \epsilon \ \text{ per ogni } \ j, k \ge N. \tag{3.8.1}$$

Ogni successione convergente è una successione di Cauchy ma non vale il contrario in generale.

Teorema 3.8.2. *Sia $\{x_j\} \subset (X,d)$ convergente, cioè esiste $x \in X$ t.c. $d(x_j, x) \to 0$ per $j \to \infty$. Allora $\{x_j\}$ è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione: Per la convergenza abbiamo: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$d(x_j, x) < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ per ogni } \ j \ge N.$$

Usando la disuguaglianza triangolare si ha

$$d(x_j, x_k) \leq d(x_j, x) + d(x, x_k) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{per ogni} \quad j, k \geq N.$$

□

Per avere un'esempio che mostra che non è vero che ogni successione di Cauchy sia convergente, basta prendere $X = (0, 1)$ con la sua metrica euclidea fornita dal modulo $|\cdot|$. La successione $\{x_j = 1/j\}$ è di Cauchy ma non converge ad $x \in X$ (il candidato limite è "fuori" dello spazio X).

Definizione 3.8.3. *Si chiama uno spazio metrico (X, d) completo se ogni successione di Cauchy è convergente (con limite in X).*

Il nostro obiettivo principale è il seguente teorema.

Teorema 3.8.4. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione:
Il caso $n = 1$: Per prima cosa, ogni successione di Cauchy $\{x_j\}$ in $\mathbb{R}$ è limitata. Infatti, usando $\epsilon = 1$ (ad esempio) nella Definizione 3.8.1, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|x_j - x_k| < 1$ per ogni $j, k \geq N$. Scegliendo $k = N$ abbiamo

$$\min\{x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N - 1\} < x_j < \max\{x_1, \ldots x_{N-1}, 1 + x_N\}, \quad \text{per ogni} \quad j \in N.$$

Essendo $\{x_j\}$ limitata in $\mathbb{R}$, esiste una sottosuccessione $\{x_{j_k}\}$ convergente ad un $x \in X$ per il Teorema di Bolzano-Weierstrass di Analisi I (ci sono due possibilità: 1) $\{x_j\}$ ammette un numero finito di valori e, quindi, la successione è convergente; 2) c'è un punto di accumulazione in X). Ma allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_j - x| \leq |x_j - x_{j_m}| + |x_{j_m} - x| < \epsilon \quad \text{per ogni} \quad j, j_m \geq N,$$

dove $N = \max\{N_1(\epsilon/2), N_2(\epsilon/2)\}$ con N_1, N_2 ben definiti perchè $\{x_j\}$ è Cauchy e $\{x_{j_m}\}$ converge ad x.

Il caso $n \geq 2$: Sia $\{x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ la successione $\{x_i^{(j)}\}$ definita dalla componente i-esima è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ per il Teorema 3.5.3. Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_i^{(j)} - x_i^{(k)}| \leq ||x^{(j)} - x^{(k)}|| < \epsilon \quad \text{per ogni} \quad j, k \geq N.$$

Quindi, per il primo passo, ogni successione $\{x_i^{(j)}\} \subset \mathbb{R}$ converge ad $x_i \in \mathbb{R}$, ovvero la successione $\{x^{(j)}\} \subset \mathbb{R}^n$ converge ad $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. □

Concludiamo questo paragrafo con la seguente generalizzazione del risultato noto sull'intesezione di una famiglia di intervalli inscatolati.

Teorema 3.8.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Sia $\{F_j\} \subset (X, d)$ una successione decrescente di sottoinsiemi chiusi e non vuoti. Se $\lim_{j \to +\infty} \mathrm{diam}(F_j) = 0$ allora esiste un unico punto $x \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j$.*

Dimostrazione: Per prima cosa, il punto è unico (se esiste). Infatti, se ci fossero due punti $x \neq y \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j$ allora

$$d(x, y) \leq \mathrm{diam}(F_j) \to 0,$$

assurdo. Per l'esistenza, per ogni $j \in \mathbb{N}$, scegliamo un punto $x_j \in F_j$ (non vuoto). Essendo $\{F_j\}$ descrescente $(F_1 \supset F_2 \supset \cdots)$, $x_j, x_k \in F_k$ se $j \geq k$ per cui

$$d(x_j, x_k) \leq \mathrm{diam}(F_k) \to 0 \quad \text{per} \quad j \geq k \to +\infty.$$

Quindi, $\{x_j\}$ è una successione di Cauchy con limite $x \in X$. Ma ogni F_j è chiuso e contiene tutti gli x_k con $k \geq j$. Quindi $x \in F_j$ per ogni j. $\square$

Capitolo 4

Calcolo Differenziale per Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Consultare le dispense dei Proff. Salvatori e Vignati [4].

Capitolo 5

Equazioni Differenziali

Consultare le dispense dei Proff. Salvatori e Vignati [4]

Bibliography

[1] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[2] C. Maderna e M. Soardi, *Lezioni di Analisi Matematica*, CittàStudi s.c.r.l., Milano, 1993.

[3] J. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[4] M. Salvatori e M. Vignati, *Appunti di Analisi Matematica II*, Università degli Studi di Milano, scaricabili dalla rete, `www.mat.unimi.it/~maura`.

[5] W. Rudin - *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill Italia srl., Milano, 1991; tradotta dall'inglese *Principles of Mathematical Analysis, 3rd Edition*, McGraw Hill, New York, 1976.