

Esercizi per il Corso Avanzato
di Analisi Matematica II - a.a. 2008/2009
C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
Proff. K. Payne, C. Tarsi, M. Calanchi

Esercizio 1. Mostrare che ogni spazio metrico compatto è completo; cioè successioni di Cauchy convergono.

Esercizio 2. Un insieme $K \subset (X, d)$ si chiama *totalmente limitato* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una collezione finita di palle aperte $\{B_\epsilon(x_1), \dots, B_\epsilon(x_N)\}$ tale che $x_i \in X$ e $K \subset \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(x_i)$. Mostrare la seguente caratterizzazione di compattezza: *Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Allora K è compatto se e solo se K è totalmente limitato.*

Esercizio 3. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra spazi metrici. Il suo *grafico* è definito nel solito modo

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

a) Mostrare che il prodotto cartesiano $X \times Y$ di due spazi metrici è uno spazio metrico con la metrica

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{[d_X(x_1, x_2)]^2 + [d_Y(y_1, y_2)]^2}.$$

b) Sia Y compatto. Mostrare che f è continua se e solo se il grafico è un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$.

c) Trovare un esempio che mostri che l'ipotesi di Y compatto non può essere, in generale, tolta.

Esercizio 4. Trovare i massimi e minimi assoluti (se esistono) per f su E .

a) $f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$ su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

b) $f(x, y) = |x|^{1/4} + |y|^{1/4}$ su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5. Siano $K \subset (X, d)$ un insieme compatto e $x \in X \setminus K$. Mostrare che esiste $y \in K$ che minimizza la distanza da x ; cioè esiste $y \in K$ tale che

$$d(x, y) \leq d(x, z) \quad \text{per ogni } z \in K.$$

Esercizio 6. Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su A chiuso con ∞ un punto di accumulazione per A . Mostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f \text{ ammette minimo globale in } A.$$

Vale anche il risultato analogo per un massimo se il limite vale $-\infty$.

Esercizio 7. Consideriamo l'estremo inferiore della funzione $f = f(x) = e^{-\|x\|}$ su sottoinsiemi E di \mathbb{R}^n .

- a) Verificare che f è limitata inferiormente su ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
- b) Si chiama *successione minimizzante per f in E* una successione $x_n \in E$ per cui $f(x_n) \rightarrow \inf_E(f)$. Nel caso $E = \overline{B}_R(0)$, mostrare che ogni successione minimizzante ammette sottosuccessione convergente. In tal caso l'estremo inferiore di f è un minimo. Questo succede per ogni E con quale proprietà?
- c) Cosa succede nei casi $E = \mathbb{R}^n$ oppure $E = \mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$?

Esercizio 8. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^n sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi, connessi per archi.

- a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \cos y > 1\}$.
- b) $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{4xy^2}{x^2+y^4} \right\}$.

Esercizio 9. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^n sono connessi, connessi per archi.

- a) $\mathbb{Q} \cap (0, 1) \subset \mathbb{R}$
- b) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- c) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$.

Esercizio 10. Mostrare che il *comb space*

$$\mathcal{C} = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (K \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 1])$$

dove $K = \{1/j, j \in \mathbb{N}\}$ è connesso per archi. Mostrare che \mathcal{C} non è *localmente connesso per archi*; cioè non è vero che dato un punto, ogni suo intorno è connesso per archi.

Esercizio 11. Mostrare le seguenti affermazioni.

- a) $E \subset (X, d)$ connesso implica che la sua chiusura \overline{E} è connessa.
- b) Se $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ è una collezione di insiemi connessi tale che $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i \neq \emptyset$, allora la loro unione $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ è connessa.

Esercizio 12. Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Mostrare che E connesso per archi implica $f(E)$ connesso per archi.

Esercizio 13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c. $f(0, 0) = 4$ e $f(x, y) \sim g(x, y)$ per $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$ dove

$$g(x, y) = \frac{x^2 y \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Esiste (x_0, y_0) per cui $f(x_0, y_0) = 2$? Giustificare la risposta.

Esercizio 14. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 - y^4 - z^3$. Determinare l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio 15. Diciamo che una funzione $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è *localmente costante su un aperto* \mathcal{U} se per ogni $x \in \mathcal{U}$ esiste un intorno $B_r(x) \subset \mathcal{U}$ su cui f è costante.

- a) Dare un esempio di f localmente costante ma non costante.
- b) Sia f continua e $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ un cammino continuo. Mostrare che l'insieme

$$T = \{t \in [0, 1] : f(\varphi(t)) = f(\varphi(0))\} \subset \mathbb{R}$$

ha massimo.

- c) Sia $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente costante su \mathcal{U} connesso per archi. Usando la parte b), mostrare che f è costante in \mathcal{U} .

Esercizio 16. Si chiama *omeomorfismo* una mappa $\Phi : X \rightarrow Y$ continua, biettiva con inversa $\Psi = \Phi^{-1} : Y \rightarrow X$ continua. Per le seguenti coppie di insiemi (rispettivamente dotati della topologia euclidea), decidere se è possibile trovare un omeomorfismo tra loro. **Suggerimento:** Considerare una restrizione opportuna di Φ o Ψ togliendo un punto dal dominio e codominio.

- a) $X = (0, 1)$ e $Y = (0, 1]$ in \mathbb{R} .
- b) $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}$