Esercizi N.1 - Differenziazione ed Integrazione
Analisi Reale - a.a. 2006/2007
C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, M. Vignati e Dott. D. Monticelli

Esercizio 1.1 - [1.4.11 delle dispense]: Sia f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione massimale di Hardy-Littlewood f^* associata ad f (vedi Def. 1.4.1).

(b) Verificare che $f^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$.

Esercizio 1.2 - [1.4.13 delle dispense]: Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Considerare $g(x) = [\tau_{x_0} f](x) := f(x - x_0)$ la <u>*traslata di f per $x_0 \in \mathbb{R}^n$*</u>. Verificare che l'operatore massimale commuta con le traslazioni; cioè

$$g^*(x) = [\tau_{x_0} f]^*(x) = [\tau_{x_0} f^*](x).$$

(b) Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ <u>*radiale*</u>; cioè $f(x) = g(|x|)$ per qualche g. Mostrare che anche f^* è radiale.

Esercizio 1.3 - [1.4.14 delle dispense]: Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e χ_E la funzione caratteristica di E.

(a) Con $E = B_r(0)$, mostrare che esistono costanti $c_1, c_2 > 0, R > 0$ tali che

$$c_1 \frac{|E|}{|x|^n} \le \chi_E^*(x) \le c_2 \frac{|E|}{|x|^n}, \quad |x| > R$$

e quindi $\chi_E^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Generalizzare il risultato della parte **a)** a qualsiasi E misurabile e limitato

(c) Concludere che

$$f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(x) = 0 \;\; q.o. \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 1.4: Consideriamo la seguente variante comune della *funzione massimale di Hardy-Littlewood*. Per $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definiamo

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

dove $B_r(x)$ è la palla aperta con raggio r e centro $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostrare che $Mf(x)$ e $f^*(x)$ sono equivalenti nel senso che: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si ha
$$Mf(x) \le f^*(x) \le 2^n Mf(x).$$

(b) Nel caso $n = 1$, mostrare che la costante 2 è ottimale; cioè trovare una funzione f per cui $f^*(x) = 2Mf(x)$ per almeno un $x \in \mathbb{R}$.

(c) Trovare costanti positivi C_1, C_2 per cui si ha
$$C_1 Mf(x) \le \widehat{M}f(x) \le C_2 Mf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$
dove
$$\widehat{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q_r(x)|} \int_{Q_r(x)} |f(y)|\, dy,$$
con $Q_r(x)$ è il cubo con centro x e misura $(2r)^n$. $\widehat{M}f$ è una variante della funzione massimale usata da Wheeden-Zygmund.

Esercizio 1.5 - [1.9.15 delle dispense]: Ricordiamo che una funzione $f \in BV([a,b])$ se esiste finito la *variazione totale* di f
$$V[f] = V[f; a, b] := \sup_{\Gamma} V_\Gamma[f; a, b]$$
dove $\Gamma = \{a = x_0 < \dots x_m = b\}$ è una partizione finita di $[a,b]$ e la variazione su Γ è
$$V_\Gamma = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\,.$$
Siano $p, q > 0$ e
$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(x^{-q}) & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Mostrare che $f \in BV([0,1])$ se e solo se $p > q$.

Esercizio 1.6: Vogliamo stabilire un risultato di convergenza nello spazio $BV([a,b])$.

(a) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni su $[a,b]$ che converga puntualmente ad f. Mostrare che
$$V[f; a, b] \le \liminf_{n\to+\infty} V[f_n; a, b].$$

(b) Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset BV([a,b])$ con $V[f_n; a, b] \le M < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che $f_n \to f$ puntualmente su $[a,b]$ implica $f \in BV([a,b])$ e $V[f; a, b] \le M$.

Esercizio 1.7 - [1.10.9 delle dispense]: Siano $F, G \in AC([a,b])$.

(a) Mostrare che $FG \in AC([a,b])$ e vale la seguente formula di *integrazione per parti*
$$\int_a^b F'(x)G(x)\, dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b G'(x)F(x)\, dx$$

(b) Dedurre che per $f \in \mathcal{L}([a,b])$ si ha
$$\int_a^b f(x)G(x)\, dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b G'(x)F(x)\, dx$$
dove F è una qualsiasi primitiva di f.