

## Esercizi N.2 - Gli Spazi $L^p$

Analisi Reale - a.a. 2006/2007

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, M. Vignati e Dott. D. Monticelli

**Esercizio 2.1:** Siano  $1 \leq p < +\infty$  e  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Mostrare le seguenti affermazioni sul calcolo della norma  $L^p$ . Per ogni  $f \in \mathcal{L}^p(E)$  si ha

(a)

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_E f(x)g(x) dx \right|,$$

(b)

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt,$$

dove  $q = p'$  è l'esponente coniugato di  $p$  e  $m_f(t) := |\{x \in E : |f(x)| > t\}|$  è la *funzione di distribuzione* di  $|f|$ .

**Esercizio 2.2 - [2.4.6 delle dispense]:** Sia  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

Rispetto la nostra discussione sui modi di convergenza  $f_j \rightarrow f$  per  $f_j, f \in \text{mis}(E)\mathbb{R}$ , completare il quadro enunciato, mostrando le seguenti affermazioni.

(a) “ $U \rightarrow QU \rightarrow QO$ ”

(b) “ $U \rightarrow L^\infty \rightarrow M$ ”

(c) “ $M \Rightarrow L^p$ ” ( $1 \leq p < \infty$ )

Ricordiamo le nostre abbreviazioni: ( $\rightarrow$ ) = sempre vero, ( $\Rightarrow$ ) = vero se  $|E| < +\infty$  e  $|f_j| \leq M$  per ogni  $j$ . Inoltre, ricordiamo

- Convergenza Uniforme ( $U$ ):  $\sup_E |f_j(x) - f(x)| \rightarrow 0, j \rightarrow +\infty$
- Convergenza Quasi-Uniforme ( $QU$ ):  $\forall \alpha > 0 \exists E_\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  t.c.  $|E_\alpha| < \alpha$  e  $\sup_{E \setminus E_\alpha} |f_j(x) - f(x)| \rightarrow 0, j \rightarrow +\infty$
- Convergenza Quasi-Ovunque ( $QO$ ):  $\exists Z$  t.c.  $|Z| = 0$  e  $\forall x \in E \setminus Z : |f_j(x) - f(x)| \rightarrow 0, j \rightarrow +\infty$
- In Misura ( $M$ ):  $\forall \alpha > 0 |\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \alpha\}| \rightarrow 0, j \rightarrow +\infty$
- In Norma ( $L^\infty$ ):  $\|f_j - f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f_j - f| \rightarrow 0, j \rightarrow +\infty$
- In Norma ( $L^p$ ):  $\|f_j - f\|_p = [\int_E |f_j - f|^p dx]^{1/p} \rightarrow 0, j \rightarrow +\infty$

**Esercizio 2.3 - [2.5.12 delle dispense]:** Sia  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  con  $|E| < +\infty$ . Considerare i seguenti funzionali  $l$ . Verificare che sono lineari e continui su  $L^p(E)$  con  $1 \leq p < \infty$ . Poi, trovare una rappresentante per  $g \in L^{p'}(E)$  per cui  $l(f) = l_g(f) = \int_E fg \, dx$ . **N.B.** Esempi ancora più interessanti hanno bisogno di un po' di più di analisi funzionale (per esempio, il teorema di Hahn-Banach).

(a)  $l(f)$  la media integrale di  $f$ .

(b)  $l(f) = \int_{T^{-1}(E)} f(Tx) \, dx$  dove  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è lineare ed invertibile.

**Esercizio 2.4 - [2.6.3 delle dispense]:** Sia  $1 < p < +\infty$ . Verificare che le seguenti successioni di funzioni  $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  convergono debolmente a zero in  $L^p(\mathbb{R})$  ( $f_j \rightharpoonup 0$ ), cioè

$$\int_E f_j g \, dx \rightarrow 0, \quad \forall g \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}),$$

ma **non** convergono fortemente (in norma  $L^p$ ). **Facoltativo:** Il caso  $p = 1$ ?

(a)  $f_j(x) := \varphi(x + j)$  con  $0 \neq [\varphi] \in L^p(\mathbb{R})$ . Esiste una versione di questo esempio anche su  $E = (0, 1)$ ?

(b)  $f_j(x) := j^{1/p} \varphi(jx)$  con  $0 \neq [\varphi] \in L^p(\mathbb{R})$ .

(c)  $f_j(x) := \sin(jx)$  per  $x \in [0, \pi]$  e  $f_j(x) := 0$  per  $x \notin [0, \pi]$ .

**N.B.** Quest'ultimo esempio non ammette sottosuccessioni che convergono quasi-ovvunque.

**Esercizio 2.5 - [2.6.7 delle dispense]:** Mostrare le seguenti affermazioni sulla convergenza forte e debole in  $L^p$ . Siano  $\{f_j\} \subset L^p(E)$ ,  $f \in L^p(E)$ .

(a)  $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0 \implies \|f_j\|_p \rightarrow \|f\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty)$ .

(b)  $f_j \rightarrow f$  q.o.,  $\|f_j\|_p \rightarrow \|f\|_p \implies \|f_j - f\|_p \rightarrow 0 \quad (1 \leq p < \infty)$

(c)  $f_j \rightarrow f$  q.o.,  $\|f_j\|_p \leq M < +\infty \implies f_j \rightharpoonup f \quad (1 < p < \infty)$ .

(d)  $f_j \rightharpoonup f \implies \|f\|_p \leq \liminf \|f_j\|_p \quad (1 < p < \infty)$

**Esercizio 2.6 - [2.7.8 e 2.7.7 delle dispense]:** Ricordiamo il prodotto di convoluzione su  $\mathbb{R}^n$ :

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, dy, \quad f, g \in \text{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

che è definito per ogni  $x$  per cui esiste l'integrale

(a) Verificare la formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g|(x) \, dx = \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx \right] \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g| \, dx \right], \quad f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

(b) Calcolare  $f * g$  per le funzioni caratteristiche su  $\mathbb{R}$  definite da

$$f = \chi_{[0,1]} \quad \text{e} \quad g = \chi_{[a,b]}.$$

(c) Mostrare il Teorema di Convulsione di Young: Siano  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  t.c.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Allora  $*$ :  $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$  è ben definito, bilineare, continuo, e soddisfa

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad g \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

**Esercizio 2.7:** Sia  $k = k(x, y) \in \text{mis}(X \times Y, \mathbb{R})$  con  $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  e  $Y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ . Assumiamo che esistono  $C_1, C_2 > 0$  t.c.

$$\int_X |k(x, y)| dx \leq C_1 \quad \text{e} \quad \int_Y |k(x, y)| dy \leq C_2$$

e definiamo l'operatore integrale con nucleo  $k$  via

$$Kf(x) := \int_Y k(x, y)f(y) dy.$$

(a) Mostrare che  $K : L^p(X) \rightarrow L^p(X)$  è un operatore lineare e limitato per ogni  $p \in [1, +\infty)$ .

(b) Mostrare che

$$\|K\| \leq C_1^{1/p} C_2^{1/p'}, \quad \text{dove} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

*Suggerimento:* Si ricorda le disuguaglianze di Minkowski generalizzato (Esercizio 2.2.11) e di Young (Corollario 2.2.3) più il fatto che la norma di  $K$  soddisfa (vedi Esercizio 2.1)

$$\|K\| := \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|Kf\|_p = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \left| \int_X Kf(x)g(x) dx \right|.$$

**Esercizio 2.8:** Mostrare le seguenti affermazioni.

(a) **(Disuguaglianza di Young con  $\epsilon$ )** Siano  $1 < p < +\infty$  e  $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Allora

$$\|fg\|_1 \leq \epsilon \|f\|_p^p + C(\epsilon) \|g\|_q^q, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall f, g \in \text{mis}(E, \mathbb{R}),$$

dove  $q = p'$  è l'esponente coniugato di  $p$  e  $C(\epsilon) := (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}$ .

(b) **(Stima a priori per equazioni differenziali)** Considerare l'equazione differenziale

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{q.o. } x \in (0, 1),$$

dove  $f \in C^0([0, 1])$  e le coefficienti soddisfano

$$a \in AC([0, 1]), \quad b, c \in \mathcal{L}^\infty([0, 1])$$

$$a(x) \geq \lambda > 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Se  $u \in C_0^2((0, 1))$  è una soluzione, allora esiste  $C > 0$  t.c.

$$\|u'\|_2^2 \leq C (\|f\|_2^2 + \|u\|_2^2).$$

*Suggerimento:* Moltiplicare l'equazione per  $u$ , integrare e stimare.