Esercizi N.2 - Gli Spazi L^p

Analisi Reale - a.a. 2006/2007

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, M. Vignati e Dott. D. Monticelli

Esercizio 2.1: Siano $1 \leq p < +\infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Mostrare le seguenti affermazioni sul calcolo della norma L^p. Per ogni $f \in \mathcal{L}^p(E)$ si ha

(a)

$$||f||_p = \sup_{||g||_q \leq 1} \left| \int_E f(x)g(x)\,dx \right|,$$

(b)

$$||f||_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t)\,dt,$$

dove $q = p'$ è l'esponente coniugato di p e $m_f(t) := |\{x \in E : \ |f(t) > t\}|$ è la *funzione di distribuzione di* $|f|$.

Esercizio 2.2 - [2.4.6 delle dispense]: Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Rispetto la nostra discussione sui modi di convgergenza $f_j \to f$ per $f_j, f \in \text{mis}(E)\mathbb{R})$, completare il quadro enunciato, mostrando le seguente affermazioni.

(a) "$U \longrightarrow QU \longrightarrow QO$"

(b) "$U \longrightarrow L^\infty \longrightarrow M$"

(c) "$M \not\Rightarrow L^p$" $(1 \leq p < \infty)$

Ricordiamo le nostre abbreviazioni: $(\longrightarrow)$ = sempre vero, $(\Rightarrow)$ = vero se $|E| < +\infty$ e $|f_j| \leq M$ per ogni j. Inoltre, ricordiamo

- Convergenza Uniforme (U) : $\sup_E |f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$
- Convergenza Quasi-Uniforme (QU) : $\forall \ \alpha > 0 \ \exists \ E_\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $|E_\alpha| < \alpha$ e $\sup_{E \setminus E_\alpha} |f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$
- Convergenza Quasi-Ovvunque (QO) : $\exists \ Z$ t.c. $|Z| = 0$ e $\forall x \in E \setminus Z :$ $|f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$
- In Misura (M) : $\forall \ \alpha > 0$ $|\{x \in E : \ |f_j(x) - f(x)| > \alpha\}| \to 0, \ j \to +\infty$
- In Norma (L^∞) : $||f_j - f||_\infty = \text{ess sup}_E |f_j - f| \to 0, \ \ j \to +\infty$
- In Norma (L^p) : $||f_j - f||_p = \left[\int_E |f_j - f|^p\,dx\right]^{1/p} \to 0, \ \ j \to +\infty$

Esercizio 2.3 - [2.5.12 delle dispense]: Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| < +\infty$. Considerare i seguenti funzionali l. Verificare che sono lineari e continui su $L^p(E)$ con $1 \leq p < \infty$. Poi, trovare una rappresentante per $g \in L^{p'}(E)$ per cui $l(f) = l_g(f) = \int_E fg\,dx$. **N.B.** Esempi ancora più interessanti hanno bisogno di un po' di più di analisi funzionale (per esempio, il teorema di Hahn-Banach).

(a) $l(f)$ la media integrale di f.

(b) $l(f) = \int_{T^{-1}(E)} f(Tx)\,dx$ dove $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed invertibile.

Esercizio 2.4 - [2.6.3 delle dispense]: Sia $1 < p < +\infty$. Verificare che le seguenti successioni di funzioni $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *convergono debolmente* a zero in $L^p(\mathbb{R})$ ($f_j \rightharpoonup 0$), cioè

$$\int_E f_j g\,dx \to 0, \quad \forall g \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}),$$

ma **non** convergono fortemente (in norma L^p). **Facoltativo:** Il caso $p = 1$?

(a) $f_j(x) := \varphi(x + j)$ con $0 \neq [\varphi] \in L^p(\mathbb{R})$. Esiste una versione di questo esempio anche su $E = (0, 1)$?

(b) $f_j(x) := j^{1/p}\varphi(jx)$ con $0 \neq [\varphi] \in L^p(\mathbb{R})$.

(c) $f_j(x) := \sin(jx)$ per $x \in [0, \pi]$ e $f_j(x) := 0$ per $x \notin [0, \pi]$.

N.B. Quest'ultimo esempio non ammette sottosuccessioni che convergono quasi-ovvunque.

Esercizio 2.5 - [2.6.7 delle dispense]: Mostrare le seguente affermazioni sulla convergenza forte e debole in L^p. Siano $\{f_j\} \subset L^p(E), f \in L^p(E)$.

(a) $||f_j - f||_p \to 0 \Longrightarrow ||f_j||_p \to ||f||_p \quad (1 \leq p \leq \infty)$.

(b) $f_j \to f$ q.o., $||f_j||_p \to ||f||_p \Longrightarrow ||f_j - f||_p \to 0 \quad (1 \leq p < \infty)$

(c) $f_j \to f$ q.o, $||f_j||_p \leq M < +\infty \Longrightarrow f_j \rightharpoonup f \quad (1 < p < \infty)$.

(d) $f_j \rightharpoonup f \Longrightarrow ||f||_p \leq \liminf ||f_j||_p \quad (1 < p < \infty)$

Esercizio 2.6 - [2.7.8 e 2.7.7 delle dispense]: Ricordiamo il prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}^n$:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\,dy, \quad f, g \in \text{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

che è definito per ogni x per cui esiste l'integrale

(a) Verificare la formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g|(x)\,dx = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx\right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g|\,dx\right], \quad f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

(b) Calcolare $f * g$ per le funzioni caratteristiche su $\mathbb{R}$ definite da

$$f = \chi_{[0,1]} \text{ e } g = \chi_{[a,b]}.$$

(c) Mostrare il Teorema di Convoluzione di Young: *Siano* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *t.c.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Allora $* : L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ *è ben definito, bilineare, continuo, e soddisfa*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p \, ||g||_q, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \; g \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Esercizio 2.7: Sia $k = k(x, y) \in \mathrm{mis}(X \times Y, \mathbb{R})$ con $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $Y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Assumiamo che esistono $C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$\int_X |k(x, y)| \, dx \leq C_1 \quad \text{e} \quad \int_Y |k(x, y)| \, dy \leq C_2$$

e definiamo *l'operatore integrale con nucleo* k via

$$Kf(x) := \int_Y k(x, y) f(y) \, dy.$$

(a) Mostrare che $K : L^p(X) \to L^p(X)$ è un operatore lineare e limitato per ogni $p \in [1, +\infty)$.

(b) Mostrare che

$$||K|| \leq C_1^{1/p} C_2^{1/p'}, \quad \text{dove} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Suggerimento: Si ricorda le disuguaglianze di Minkowski generalizzato (Esercizio 2.2.11) e di Young (Corollario 2.2.3) più il fatto che la norma di K soddisfa (vedi Esercizio 2.1)

$$||K|| := \sup_{||f||_p \leq 1} ||Kf||_p = \sup_{||f||_p \leq 1} \sup_{||g||_{p'} \leq 1} \left| \int_X Kf(x) g(x) \, dx \right|.$$

Esercizio 2.8: Mostrare le seguenti affermazioni.

(a) (Disuguaglianza di Young con ϵ) Siano $1 < p < +\infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$||fg||_1 \leq \epsilon ||f||_p^p + C(\epsilon) ||g||_q^q, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall f, g \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R}),$$

dove $q = p'$ è l'esponente coniugato di p e $C(\epsilon) := (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

(b) (Stima a priori per equazioni differenziali) Considerare l'equazione differenziale

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{q.o. } x \in (0, 1),$$

dove $f \in C^0([0, 1])$ e le coefficienti soddisfano

$$a \in AC([0, 1]), \quad b, c \in \mathcal{L}^\infty([0, 1])$$

$$a(x) \geq \lambda > 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Se $u \in C_0^2((0, 1))$ è una soluzione, allora esiste $C > 0$ t.c.

$$||u'||_2^2 \leq C \left(||f||_2^2 + ||u||_2^2 \right).$$

Suggerimento: Moltiplicare l'equazione per u, integrare e stimare.