Analisi Reale, Parte I

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Università di Milano

Anno Accademico 2007-2008

Kevin R. Payne

September 28, 2007

Capitolo 1

Differenziazione ed Integrazione

1.1 Introduzione.

In questo primo capitolo vogliamo analizzare i legami tra l'integrabilità nel senso di Lebesgue e la differenziabilità nel senso classico per le funzioni misurabili secondo Lebesgue. In questo senso, abbiamo due obiettivi concreti.

1.1.1. Obiettivi:

1. Dare una risposta parziale alla domanda sulle possibili generalizzazioni del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale nel contesto della teoria di Lebesgue. Sarà mostrato che gli integrali indefiniti (definiti in senso opportuno) di funzioni integrabili secondo Lebesgue sono differenziabili quasi ovunque, e, nel caso unidimensionale, sarà precisato per quali funzioni possiamo calcolare l'integrale tramite la differenza agli estremi di una sua primitiva. In questo senso, abbiamo voglia di chiudere un discorso che rimane aperto dal corso di Analisi IV. Nel corso di questa investigazione, appariranno nuovi spazi funzionali, le funzioni di *variazione limitata* e le funzioni *assolutamente continue.*

2. Fornire nuove tecniche di *Analisi Reale* per lo studio delle proprietà fini di funzioni. Così, vogliamo aprire la porta al uso di concetti della *teoria della misura* che sostituiscono i concetti topologici familiari di *compatezza, interno, esterno, bordo*, etc.. Questo approccio sta alle base di tanti problemi di *Analisi Armonica, Calcolo della Variazione, Equazioni alle Derivate Parziali* ed altro.

Per cominciare il discorso, partiamo da due risultati ben noti da Analisi II.

1.1.2. Proposizione: *Sia* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

a) *Se* $f \in \mathcal{R}([a, b])$ *(integrabile secondo Riemann) allora* $F(x) := \int_a^x f(y)\, dy$ *è* $\mathrm{Lip}([a, b])$ *e vale* $F'(x) = f(x)$ *in ogni punto* x *di continuità per* f.

b) *Se* $f \in C^0([a, b])$ *allora*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\, dy = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Si nota che la prima affermazione riguarda la regolarità di una funzione integrale e sarà inquadrata come la questione della *differenziabilità dell'integrale indefinito.* Mentre la seconda affermazione riguarda il *problema delle medie*, ovvero, la questione se le medie locali tendono al valore della funzione in x quando si calcola lungo una famiglia di intorni che tenda al punto x.

1.1.3. Problema: *Cosa succede per:*

i) $f \in \mathcal{L}([a, b])$ *(integrabile secondo Lebesgue)?*

ii) *dimensione superiore?*

Per il problema delle medie è chiaro che cosa si intende per entrambi casi i) e ii). Invece, per la questione della differenziabilità dell'integrale indefinito, abbiamo bisogno di specificare che cosa prenderà il posto della funzione integrale $F(x)$ nel caso ii). Inoltre, per il caso i), avrà senso chiederci anche quando vale

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Concludiamo questa breve introduzione fissando qualche notazione che sarà usata nel seguito:

- $B_r(x)$ e $\overline{B}_r(x)$ sono la *palla aperta* e la *palla chiusa* con raggio $r > 0$ e centro in $x \in \mathbb{R}^n$
- $S_r(x) = \partial B_r(x)$ è la *sfera* di raggio r e centro x
- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è la σ-algebra di *insiemi misurabili secondo Lebesgue* e $\mathcal{M}(A)$ sono *gli sottoinsiemi misurabili di* $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
- $|E|$ è la *misura (di Lebesgue)* di $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
- $|E|_e$ è la *misura esterna (di Lebesgue)* per $E \subset \mathbb{R}^n$
- $\alpha_n = |B_1(0)|$ è *misura della palla unitaria* e $\omega_n = |S_1(0)|_{n-1}$ è *la misura di superficie della sfera unitaria*
- $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}^1(A)$ è lo spazio di *funzioni integrabili secondo Lebesgue* su $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
- $\int_A f\, dx = \int_A f(x)\, dx$ è *l'integrale di* $f \in \mathcal{L}(A)$ *rispetto alla misura di Lebesgue*

1.2 L'integrale indefinito

Come primo passo, ci chiediamo in che modo possiamo generalizzare il concetto dell'integrale indefinito (vedi Proposizione 1.1.2.a) al caso di dimensione $n \geq 2$. Una possibile risposta è fornita dal seguente formula: sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, poniamo

$$F(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} f(y_1, y_2)\, dy_2 dy_1. \tag{1.2.1}$$

Cioè, questo è un tentativo di definire F nel punto (x_1, x_2). Però, per un certo numero di motivi, questa non è una buona idea. Invece, è più utile avere la nostra funzione integrale definita su una collezione di insiemi.

1.2.1. Definizione: *Sia* $f \in \mathcal{L}(A)$ *con* $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. *Si chiama* <u>*integrale indefinito di f*</u> *l'applicazione* $F : \mathcal{M}(A) \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(E) := \int_E f(y)\, dy, \quad E \in \mathcal{M}(A). \tag{1.2.2}$$

1.2.2. Osservazione: *F così definita è una funzione (additiva) di insiemi, cioè, $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ dove*

- **i)** *Σ è un σ-algebra di insiemi;*
- **ii)** *$F(E) < +\infty$ per ogni $E \in \Sigma$;*
- **iii)** *$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, $\{E_k\} \subset \Sigma$ disgiunti $\Longrightarrow F(E) = \sum_{k\in\mathbb{N}} F(E_k)$.*

N.B. Vedi cap. 10 di Wheeden-Zygmund [11] per un trattamento più esteso e più astratto del concetto di funzioni di insiemi.
Abbiamo delle buone proprietà per le funzioni additive di insiemi, per cui ci serve prima delle definizioni generali.

1.2.3. Definizione: *Una funzione additiva di insiemi si chiama continua $\overset{\circ}{\Longleftrightarrow} |F(E)| \to 0$ se* $\mathrm{diam}(E) \to 0$*; cioè*

$$\forall\epsilon > 0 \;\; \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0 : \quad E \in \Sigma, \mathrm{diam}(E) < \delta \Longrightarrow |F(E)| < \epsilon. \tag{1.2.3}$$

Uno può chiedersi se l'uso della parola continua è giustificabile. Lo è come mostra il seguente fatto.
1.2.4. Esercizio Sia $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione (additiva) di insiemi. Mostrare che se F è continua nel senso (1.2.3) allora

$$\forall\epsilon > 0 \;\; \exists\; \delta > 0 : \quad E_1, E_2 \in \Sigma \;\; \text{con} \;\; \mathrm{diam}(E_1 \Delta E_2) < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |F(E_1) - F(E_2)| < \epsilon, \tag{1.2.4}$$

dove $E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ è la differenza simmetrica di E_1 e E_2.
Non tutte le funzioni additive di insiemi sono continue come si vede dal seguente esempio.

1.2.5. Esempio: Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $0 \in A$. Definiamo $F : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ via

$$F(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in E \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora F è una funzione additiva di insiemi ma non è continua.
Un concetto più forte usa la *misura* $|E|$ di E anzichè il diametro.

1.2.6. Definizione: *Una funzione additiva di insiemi si chiama assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue $\overset{\circ}{\Longleftrightarrow} |F(E)| \to 0$ se $|E| \to 0$; cioè*

$$\forall\epsilon > 0 \;\; \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0 : \quad E \in \Sigma, |E| < \delta \Longrightarrow |F(E)| < \epsilon. \tag{1.2.5}$$

1.2.7. Osservazione: *Una funzione di insieme assolutamente continua è continua, ma non vale il contrario, in generale.*
La prima implicazione dipende dal fatto che $\mathrm{diam}(E)$ piccolo $\Longrightarrow |E|$ piccolo. In particolare, se $\mathrm{diam}(E) < \nu$ allora E è contenuto in $B_\nu(x_0)$ una palla aperta di raggio ν e centro in $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Quindi, $|E| < \alpha(n)\nu^n$ dove $\alpha(n) = |B_1(0)|$. Invece, non vale, in generale, il contrario.

1.2.8. Esempio: Siano $A = [0,1] \times [0,1]$ e $D = \{(x,x) \in A\}$ il diagonale in A. Sia

$$\Sigma = \{E \subset A : \;\; E \text{ è misurabile}, E \cap D \text{ è } \underline{\text{linearmente misurabile}}\},$$

cioè, $E \bigcap D$ può essere identificato con un sottoinsieme E_1 di $\mathbb{R}$ e si chiede che $E_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Definiamo $F(E) := |E \cap D|_1 = |E_1|_1$. Allora F è continua (perchè ?) ma non assolutamente continua. Esistono E con $|E|_2$ arbitrariamente piccola ma $|E \cap D|_1$ limitato dal basso da una costante positiva (ad esempio?).

Il risultato principale di questo paragrafo è il seguente teorema sulla regolarità dell'integrale indefinito.

1.2.9. Teorema: *Sia $f \in \mathcal{L}(A)$ con $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora l'integrale indefinito F di f è assolutamente continua.*

Dimostrazione:

1. Possiamo assumere $f \geq 0$; altrimenti, si considera la parte positiva f^+ e la parte negativa f^- di f. Ricordiamo che
$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}, \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

2. Per $f \geq 0$, spezziamo $f = T_k f + (f - T_k f)$ con un taglio a quota k (con k da scegliere in modo opportuno). Più precisamente poniamo
$$g_k(x) := T_k f(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq k \\ k & \text{se } f(x) > k \end{cases}$$
Quindi, abbiamo anche
$$h_k(x) := f(x) - T_k f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \leq k \\ f(x) - k & \text{se } f(x) > k \end{cases}$$
Abbiamo $0 \leq g_k \nearrow f$, e, quindi, per il Teorema di Beppo-Levi (convergenza monotona), abbiamo $\int_A g_k\, dx \nearrow \int_a f\, dx$, ovvero, $\int_A h_k\, dx \searrow 0$ per $k \to +\infty$. Quindi, $\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{k} = \bar{k}(\epsilon)$ t.c.
$$0 \leq \int_A h_{\bar{k}}(x)\, dx = \int_A (f(x) - T_{\bar{k}} f(x))\, dx < \epsilon/2.$$
Essendo $h_{\bar{k}} \geq 0$, per ogni $E \in \mathcal{M}(A)$, si ha
$$0 \leq \int_E h_{\bar{k}}(x)\, dx < \epsilon/2. \tag{1.2.6}$$

3. D'altra parte, $0 \leq g_{\bar{k}} = T_{\bar{k}} \leq \bar{k}$, e, quindi
$$0 \leq \int_E g_{\bar{k}}(x)\, dx \leq \bar{k}|E| < \epsilon/2, \tag{1.2.7}$$
per ogni $E \in \mathcal{M}(A)$ con $|E| < \epsilon/(2\bar{k}(\epsilon))$. Quindi, usando $f = g_{\bar{k}} + h_{\bar{k}}$ e combinando (1.2.6) e (1.2.7), si ha $0 \leq \int_E f\, dx < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$, e, quindi, il risultato.

□

1.2.10. Osservazione: *C'è un risultato inverso del Teorema 1.2.9: Sia F è una funzione additiva di insiemi t.c. F è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Allora esiste $f \in \mathcal{L}(A)$ t.c. $F(E) = \int_E f(x)\, dx$ per ogni $E \in \mathcal{M}(A)$.*

Questo risultato è una versione del Teorema di Radon-Nikodym (vedi Cap. 10 di [11], per esempio). Faremo il caso unidimensionale nel paragrafo 1.10. Un'altra versione del Teorema di Radon-Nikodym sarà usata nel paragrafo 2.9.

1.3 Il Teorema di Differenziazione di Lebesgue

Il nostro obiettivo è di studiare la differenziabilità dell'integrale indefinito, ovvero, il problema delle medie.

1.3.1. Domanda: *Siano $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{B}$ la famiglia di palle aperte B t.c. $x \in B$. È vero che*

$$\frac{F(B)}{|B|} = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy \to f(x), \quad \text{per} \quad |B| \to 0? \tag{1.3.1}$$

Quando abbiamo la proprietà (1.3.1) diciamo che *l'integrale indefinito è differenziabile in x con* derivata $f(x)$ e scriviamo

$$\lim_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \frac{F(B)}{|B|} = \lim_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy = f(x). \tag{1.3.2}$$

N.B.

1. La proprietà (1.3.2) vuol dire: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\epsilon, x, f)$ t.c.

$$B \in \mathcal{B}, |B| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| < \epsilon \tag{1.3.3}$$

2. Abbiamo seguito la definizione usato da Stein-Shakarchi [9] quando abbiamo scelto la famiglia $\mathcal{B}$ di palle con contengono x. Invece, Wheeden-Zygmund [11] usano la famiglia $\mathcal{Q}$ di cubi con lati paralleli alle asse con centro in x. Le due definizioni sono equivalenti come avremo modo di mostrare nel paragrafo 5.

1.3.2. Osservazione: *essendo che $F(B)$ non cambia se cambiamo f su un insieme di misura nulla, non possiamo aspettare che valga* (1.3.1) *ovunque, solo che valga quasi ovunque (q.o).*

Il risultato principale del capitolo è il seguente teorema che ci impegnerà per un pò.

1.3.3. Teorema (di Differenziazione di Lebesgue): *Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Allora l'integrale indefinito F di f è differenziabile con derivata f per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$; cioè,*

$$\lim_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy = f(x), \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

1.3.4. Esercizio: Trovare qualche esempio "onesto" che mostra che la conclusione del Teorema 1.3.3 non vale ovunque; cioè un $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ per cui il limite non esiste (o non esiste finito) ovunque. Così, non c'e' modo di cambiare f in un punto per ricuperare il risultato.

1.3.5. Osservazione: *Il teorema (TDL) vale sicuramente per $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$.*

Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| &= \frac{1}{|B|}\left|\int_B [f(y) - f(x)]\,dy\right| \\ &\leq \sup_{y\in B}|f(y) - f(x)| \to 0, \quad \text{per } |B| \to 0,\end{aligned}$$

per la continuità uniforme di f su ogni palla chiusa e piccola. Quindi, un'idea potrebbe essere di approssimare f mediante funzioni continue e di controllare il resto. Qui, nascono delle nuove tecniche. In particolare, la *funzione massimale di Hardy-Littlewood* ed argomenti di *ricoprimento di Vitali.* Invece di preparare prima il terreno per la dimostrazione, preferiamo "scoprire" perchè nascono questi strumenti nel contesto della dimostrazione. Quindi, cominciamo subito la dimostrazione, e, poi, con la calma sistemeremo tutto.

Dimostrazione (del TDL): Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Passo 1:</u> *Basta mostrare che: per ogni $\alpha > 0$ si ha $|E_\alpha| = 0$ dove*

$$E_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\,dy - f(x) \right| > 2\alpha \right\}.$$

Infatti, perchè allora:

1. $E := \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ ha misura nulla.
2. Ponendo
$$|\Phi(B)| := \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\,dy - f(x) \right|, \tag{1.3.4}$$
vogliamo mostrare che sul complemento di E abbiamo $\lim_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} |\Phi(B)| = 0$ usando il controllo che abbiamo sul limite superiore di $|\Phi(B)|$. Ricordiamo che
$$\limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} |\Phi(B)| := \lim_{\delta\to 0^+} \left(\sup_{\{B:|B|<\delta, x\in B\}} |\Phi(B)| \right) = \inf_{\delta>0} \left(\sup_{\{B:|B|<\delta, x\in B\}} |\Phi(B)| \right). \tag{1.3.5}$$
3. Su $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ si ha
$$\limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\,dy - f(x) \right| \le \frac{2}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
e, quindi,
$$\limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\,dy - f(x) \right| = 0, \quad \forall x \in E^c.$$
Cioè, abbiamo $\limsup_{|B|\to 0} |\Phi(B)| = 0$, e, abbiamo $0 \le \liminf |\Phi(B)| \le \limsup |\Phi(B)| = 0$; cioè, esiste ed è zero il limite di $|\Phi(B)|$ per ogni $x \notin E$.

<u>Passo 2:</u> *(Approssimare f con $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$).*

Lemma 1: *Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $g = g_\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ t.c. $||f - g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$.*
Questo è un risultato di Analisi IV ed è Lemma 7.2 in [11] dove si può consultare la dimostrazione. Ricordiamo solo che $C_0^0(\mathbb{R}^n)$è lo spazio di funzioni *continue con supporto compatto* e $||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx$. In particolare, esiste una successione $\{g_k\} \subset C_0^0(\mathbb{R}^n)$ t.c. $||f - g_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$ per $k \to +\infty$.

<u>Passo 3</u> *(Usare g_ϵ per spezzare E_α).*

1. Con $\alpha > 0$ e ϵ fissati, scegliamo $g = g_\epsilon$ secondo Lemma 1. Abbiamo
$$\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy - f(x) = \frac{1}{|B|}\int_B [f(y)-g(y)]\,dy + \frac{1}{|B|}\int_B [g(y)-g(x)]\,dy + [g(x)-f(x)]$$
Usando la disuguaglianza triangolare e l'Osservazione 1.3.5 (g è continua) sul secondo termine, si trova
$$\limsup_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| \le \limsup_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-g(y)|\,dy + |g(x)-f(x)| \quad (1.3.6)$$

2. Adesso vogliamo scambiare il problema di controllare il limite superiore nel membro destro di (1.3.6) con quello più semplice di controllare l'estremo superiore. Quindi, possiamo affermare
$$\limsup_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| \le \sup_{\{B: x\in B\}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-g(y)|\,dy + |g(x)-f(x)|,$$
ovvero,
$$\limsup_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| \le (f-g)^*(x) + |g(x)-f(x)|, \quad (1.3.7)$$
dove
$$f^*(x) := \sup_{\{B: x\in B\}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\,dy$$
è la *funzione massimale di Hardy-Littlewood*.

3. Abbiamo $x \in E_\alpha \Longleftrightarrow$ il membro sinistro di (1.3.7) è maggiore di 2α. Quindi, poniamo
$$E^*_\alpha = \{x : (f-g)^*(x) > \alpha\} \;\text{ e }\; \widetilde{E}_\alpha = \{x : |f-g|(x) > \alpha\}, \quad (1.3.8)$$
e abbiamo $E_\alpha \subset E^*_\alpha \cup \widetilde{E}_\alpha$. Quindi, il teorema si riduce all'affermazione che $|E^*_\alpha| = 0 = |\widetilde{E}_\alpha|$.

Passo 4: Si ha $|\widetilde{E}_\alpha| = |\{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\}| \le \epsilon/\alpha$ *per ogni* $\epsilon > 0$.
Infatti, usando la *disuguaglianza di Tchebychev* (vedi Cor. 5.12 di [11]):
$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \le \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx, \quad \forall \alpha > 0,$$
si trova $|\widetilde{E}_\alpha| \le \alpha^{-1}||f-g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon/\alpha$, per la scelta di $g = g_\epsilon$.

Passo 5: $\exists A > 0$ *t.c.* $|E^*_\alpha| = |\{x : (f(x)-g(x))^*| > \alpha\}| \le A\epsilon/\alpha$ *per ogni* $\epsilon > 0$.
Infatti, basta usare la *disuguaglianza di Hardy-Littlewood* (vedi il paragrafo successivo):
$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \exists A > 0 \;\; t.c. \;\; |\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}| \le \frac{A}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx, \quad \forall \alpha > 0,$$
e la scelta di $g = g_\epsilon$ come nel Passo 4.
Quindi, per ogni $\alpha > 0$, abbiamo $|E_\alpha| \le \epsilon(1+A)/\alpha$, per ogni $\epsilon > 0$. Quindi, $|E_\alpha| = 0$ per ogni $\alpha > 0$, e abbiamo finito. □

1.3.6. Osservazione: *Nella dimostrazione del Teorema di Differenziazione di Lebesgue data sopra, abbiamo ridotto tutto alla validità della disuguaglianza di Hardy-Littlewood.*

Questa disuguaglianza sarà il soggetto del prossimo paragrafo, dove studiamo la funzione massimale e le sue proprietà.

1.4 La funzione massimale di Hardy-Littlewood

In questo paragrafo, vogliamo esaminare la funzione massimale e le sue proprietà in preparazione per la dimostrazione della disuguaglianza di Hardy-Littlewood che abbiamo citato nella dimostrazione del Teorema di Differenziazione di Lebesgue.

1.4.1. Definizione: *Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. La funzione massimale di Hardy-Littlewood associata ad f è definita da*

$$f^*(x) := \sup_{\{B:\ x \in B\}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy, \tag{1.4.1}$$

dove $B \in \mathcal{B}$, la famiglia di palle aperte per cui $x \in B$.

Si nota che f^* dà una misura sulla grandezza delle medie di $|f|$ attorno ad x. Vogliamo avere una stima che dice che la misure dei sopra-livelli di f^* sono ben controllate dalla norma in $\mathcal{L}^1$. Per cominciare, enunciamo qualche proprietà semplice.

1.4.2. Proposizione: *Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

- **(a)** $0 \leq f^*(x) \leq +\infty$
- **(b)** $(f+g)^*(x) \leq f^*(x) + g^*(x), \quad \forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
- **(c)** $(cf)^*(x) = |c| f^*(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- **(d)** $f^*(x_0) > \alpha \Longrightarrow f^*(x) > \alpha, \quad \forall x$ vicino ad x_0

Dimostrazione: Le affermazioni **(a), (b), (c)** sono facili, e lasciamo la loro verifica per esercizio. Per la **(d)**, notiamo che: $f^*(x_0) > \alpha \Longrightarrow \exists B$ con $x_0 \in B$ t.c. $|B|^{-1} \int_B |f(y)|\, dy > \alpha$. Ma, per ogni x vicino ad x_0 abbiamo anche $x \in B$, e, quindi $f^*(x) > \alpha$. □

N.B. La proprietà **(d)** segue direttamente dalla Definizione 1.4.1 in cui abbiamo usato le palle B che contengono x. Invece, usando la definizione di Wheeden-Zygmund in cui si usa cubi con centro in x, la verifica della **(d)** non è immediata. Si sfrutta la continuità in senso assoluto dell'integrale indefinito (Teorema 1.2.9).

1.4.3. Teorema (disuguaglianza di Hardy-Littlewood) *Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

- **(a)** *f^* è misurabile*
- **(b)** *$f^*(x) < +\infty$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$*
- **(c)** *$\forall \alpha > 0$ si ha*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n :\ f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{3^n}{\alpha} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{1.4.2}$$

Dimostrazione:

1. Per la **(a)**, notiamo che la proprietà **(d)** della Proposizione 1.4.2 implica che $(f^*)^{-1}(\alpha, +\infty]$ è un insieme aperto, e, quindi f^* è semicontinua inferiormente. Quindi, f^* è misurabile perchè gli insiemi aperti sono misurabile secondo Lebesgue; cioè è una misura di Borel (vedi. Cor. 4.16 di [11] per considerazioni sulle funzioni semicontinue e Capitolo 2 di [8] per la teoria di misure di Borel).

2. Abbiamo che **(c)** $\Longrightarrow$ **(b)**. Infatti, per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ f^*(x) = +\infty\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \ f^*(x) > \alpha\}$$

e, quindi, se vale la **(c)**, abbiamo per ogni $\alpha > 0$:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ f^*(x) = +\infty\}| \leq \frac{3^n}{\alpha}||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Si ottiene la **(b)** mandando $\alpha \to +\infty$.

3. Per la **(c)**, poniamo $E^*_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n : \ f^*(x) > \alpha\}$ e vogliamo $|E^*_\alpha| \leq 3^n \alpha^{-1}||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Per ogni $x \in E^*_\alpha$ esiste una palla B_x t.c. $x \in B_x$ e

$$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha, \quad \text{ovvero,} \quad |B_x| < \frac{1}{\alpha}\int_{B_x} |f(y)|\, dy. \tag{1.4.3}$$

Ricordiamo che E^*_α è aperto, quindi, possiamo calcolare la sua misura di Lebesgue via

$$|E^*_\alpha| = \sup\{|K| : \ K \subset E^*_\alpha, \ K \text{ compatto}\}.$$

Questa proprietà è la *regolarità interna* che ha ogni misura di Borel (vedi Capotolo 2 di [8] oppure paragrafo 1.2 di [6]). Fissiamo $K \subset E^*_\alpha$ compatto ma arbitrario. Quindi, K è ricoperto da una collezione finita $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$ di palle che contengono qualche $x_j \in E^*_\alpha$ e soddisfano (1.4.3). Adesso abbiamo bisogno di un argomento di ricoprimento approssimativo, ovvero, il seguente lemma che dice che possiamo ricoprire una frazione fissa (dell'insieme coperto da $\mathcal{B}$) usando palle disgiunte in $\mathcal{B}$.

1.4.4. Lemma (di ricoprimento di Vitali - versione finita) *Sia $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$ una collezione finita di palle aperte in $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una sottocollezione $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}\}$ di palle disgiunte t.c.*

$$\left|\bigcup_{i=1}^N B_i\right| \leq 3^n \sum_{l=1}^k |B_{i_l}| \tag{1.4.4}$$

Assumendo questo lemma, da $\mathcal{B}$, scegliamo $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}\}$ per cui valgono (1.4.3) per ogni B_{i_l} e (1.4.4). Si ha

$$\begin{aligned} |K| &\leq \left|\bigcup_{i=1}^N B_i\right| \leq 3^n \sum_{l=1}^k |B_{i_l}| \leq \frac{3^n}{\alpha}\int_{\bigcup B_{i_l}} |f(y)|\, dy \\ &\leq \frac{3^n}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

Quindi, per ogni compatto $K \subset E^*_\alpha$ abbiamo $|K| \leq 3^n\alpha^{-1}||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, un maggiorante uniforme rispetto a K arbitrario. Quindi, si ha

$$|E^*_\alpha| \leq \frac{3^n}{\alpha}||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

e, quindi, la **(c)**, modulo la dimostrazione del Lemma 1.4.4.

□

Dimostrazione: (del Lemma 1.4.4)
Si basa sostanzialmente sulla seguente osservazione geometrica: *Siano $B, \tilde{B}$ due palle aperte t.c. $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$ con la relazione $r(B) \geq r(\tilde{B})$ fra i loro raggi. Allora $\tilde{B} \subset 3B$ dove $3B$ è la palla con lo stesso centro ma il raggio $3r(B)$.* Infatti, se $B = B_r(x)$ e $\tilde{B} = B_{\tilde{r}}(\tilde{x})$, si ha

$$\sup_{y \in \tilde{B}} d(x, y) \leq 2\tilde{r} + r \leq 3r.$$

L'algoritmo per scegliere la sottocollezione è il seguente:

1. Scegliamo B_{i_1} la palla in $\mathcal{B}$ di raggio massimale. Togliamo da $\mathcal{B}$ tutte le palle con intersezione non vuoto con B_{i_1}. Tutte queste palle sono contenute in $3B_{i_1}$ per l'osservazione sopra. Chiamiamo $\mathcal{B}_1$ la nuova ridotta collezione.

2. Ripetiamo passo 1, eliminando da $\mathcal{B}_1$ la sua palla di raggio massimale B_{i_2} e tutte quelle con intersezione non vuoto con B_{i_2}

   Dopo al più N passi, abbiamo la nostra collezione $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}\}$, con $k \leq N$.

3. Ogni $B \in \mathcal{B}$ ha intersezione con qualche B_{i_j} e si ha $r(B) \leq r(B_{i_j})$. Quindi, per l'osservazione geometrica, $B \subset 3B_{i_j}$, e, quindi

$$\left| \bigcup_{i=1}^{N} B_i \right| \leq \left| \bigcup_{j=1}^{k} \left(3B_{i_j}\right) \right| \leq \sum_{l=1}^{k} |3B_{i_l}| \leq 3^n \sum_{l=1}^{k} |B_{i_l}|\,.$$

   Quindi, abbiamo Lemma 1.4.4 (Lemma di Vitali), e, quindi Teorema 1.4.3 (disuguaglianza di Hardy-Littlewood, e, quindi Teorema 1.3.3 (di differenziazione di Lebesgue).

□

1.4.5. Domande: *Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Relazioni tra f e f^*?*

2. *Esempi di f^*?*

3. *Interpretazione della disuguaglianza di Hardy-Littlewood?*

1.4.6. Osservazione: *Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$f^*(x) \geq |f(x)| \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, applicando il TDL a $|f| \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\lim_{\substack{|B| \to 0 \\ x \in B}} \Phi(B) = \lim_{\substack{|B| \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy = |f(x)| \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}^n,$$

dove abbiamo chiamato $\Phi(B)$ la media di $|f|$ su B. Quindi, si ha: per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \limsup_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \Phi(B) = \inf_{\delta>0} \sup_{\{B:\ |B|<\delta, x\in B\}} \Phi(B) \\
&\leq \sup_{\{B:\ |B|<\delta, x\in B\}} \Phi(B), \quad \forall \delta > 0 \\
&\leq \sup_{\{B:\ x\in B\}} \Phi(B) := f^*(x).
\end{aligned}$$

N.B. Non è detto che $f^*(x) \geq |f(x)|$ per ogni x; per esempio,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

è una funzione su $\mathbb{R}$ con $f = 0$ q.o., e, quindi, tutte le sue medie sono nulle. Quindi, $f^* \equiv 0$, ma $f(0) = 1 > f^*(0)$.

1.4.7. Osservazione: *Confrontando la disuguaglianza di Hardy-Littlewood:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n :\ f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx, \quad \alpha > 0$$

con la disuguaglianza di Tchebychev per $|f|$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| > \alpha\}| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx, \quad \alpha > 0,$$

si può dire che "f^* non è molto più grande di $|f|$" nel senso della misura dei loro sopralivelli.

D'altre parte, nel senso dei loro integrali, f^* è molto più grande di f.

1.4.8. Proposizione: *Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

$$f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow f = 0 \ \text{ q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, abbiamo già visto l'implicazione $\Longleftarrow$. Per l'implicazione $\Longrightarrow$, sarà lasciato per un esercizio guidato (vedi Esercizi 1.4.11 - 1.4.14), che comincia con un esempio.

1.4.9. Esempio: Trovare f^* per $f(x) = \chi_I(x)$, la funzione caratteristica di $I = (-1, 2) \subset \mathbb{R}$. Verificare che $f^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

- Si ha $f^*(x) = \chi_I^*(x) = \sup\{|I \cap B|/|B| :\ \ x \in B\}$. Per ogni $B \subset I$, si ha $|I \cap B|/|B| = 1$. D'altre parte, se $B \setminus I \neq \emptyset$, allora $I \cap B \subset B$, e, quindi $|I \cap B|/|B| \leq 1$.
- Adesso, se $x \in I$ si ha $f^*(x) = 1$ (la media locale massimale è uno).
- Se $x < -1$, si vede che la media locale è più grande quando B copre tutto I, cioè, il limite per $\epsilon \to 0$ di $B_\epsilon = (x - \epsilon, 2 + \epsilon)$, e, quindi $f^*(x) = 3/(2 - x)$.
- Se $x > 2$, si trova, in modo analogo, $f^*(x) = 3/(x + 1)$.
- Con la formula esplicita, è chiaro che $f^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

1.4.10. Osservazione: *Abbiamo visto allora:*

(a) *$Mf(x) := f^*(x)$ definisce un operatore l'operatore massimale di Hardy-Littlewood t.c.*

$$M : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \text{mis}^+(\mathbb{R}^n),$$

dove $\text{mis}^+(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio di funzioni misurabili, non-negative, finite q.o.

(b) *Si ha $Mf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f = 0$ q.o.. Quindi, M non è un operatore da $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

(c) *Invece, vale la stima:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{3^n}{\alpha}||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.4.5}$$

ovvero, una stima debole-L^1.

Cioè, si può dire che f^* è una funzione *debole-L^1*, dove g è debole-L^1 se esiste $C > 0$ t.c.

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha}. \tag{1.4.6}$$

La disuguaglianza di Tchebychev mostra che $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ è debole-L^1, ma non vale il contrario. Quindi, il decadimento $\sim \alpha^{-1}$ (della misura dei sopralivelli a quota α) è una condizione necessaria, ma non sufficiente, per avere $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, questa condizione necessaria non può essere indebolita, cioè, esistono funzioni g per cui

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha^{1-\epsilon}}, \quad \epsilon > 0$$

ma $g \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Queste considerazioni spiegano la terminologia.

Per concludere il paragrafo, proponiamo qualche esercizio legato alla Proposizione 1.4.8.

1.4.11 Esercizio: Sia f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione massimale di Hardy-Littlewood f^* associata ad f (vedi Def. 1.4.1).

(b) Verificare che $f^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$.

1.4.12. Esercizio: Sia f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1/\left[|x|\log^2(1/|x|)\right] & \text{se } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$.

b) Verificare che esiste $c > 0$ t.c.

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|\log(1/|x|)}, \quad |x| \leq 1/2$$

e quindi $f^* \notin \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$.

1.4.13. Esercizio: Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

a) Considerare $g(x) = [\tau_{x_0} f](x) := f(x - x_0)$ la <u>*traslata di f per $x_0 \in \mathbb{R}^n$*</u>. Verificare che l'operatore massimale commuta con le traslazioni; cioè

$$g^*(x) = [\tau_{x_0} f]^*(x) = [\tau_{x_0} f^*](x).$$

b) Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ <u>*radiale*</u>; cioè $f(x) = g(|x|)$ per qualche g. Mostrare che anche f^* è radiale.

1.4.14. Esercizio: Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e χ_E la funzione caratteristica di E.

a) Con $E = B_r(0)$, mostrare che esistono costanti $c_1, c_2 > 0, R > 0$ tali che

$$c_1 \frac{|E|}{|x|^n} \leq \chi_E^*(x) \leq c_2 \frac{|E|}{|x|^n}, \quad |x| > R$$

e quindi $\chi_E^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

b) Generalizzare il risultato della parte **a)** a qualsiasi E misurabile e limitato

c) Concludere che

$$f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(x) = 0 \quad q.o.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

1.5 Generalizzazioni ed applicazioni del TDL

In questo paragrafo vogliamo fornire qualche generalizzazione e qualche applicazione del Teorema di Differenziazione di Lebesgue. La prima generalizzazione riguarda l'ipotesi sulla funzione f. È chiaro che l'integrabilità è necessaria solo in senso locale.

1.5.1. Teorema (TDL per funzioni localmente integrabili): *Sia $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

$$\lim_{\substack{|B| \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\, dy = f(x), \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione: Sia $R > 0$ fisso, ma arbitrario. Poniamo

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq R \\ 0 & |x| > R \end{cases}$$

Si ha $f_R \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e, quindi, vale il TDL per f_R, ovvero,

$$\lim_{\substack{|B| \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{|B|} \int_B f_R(y)\, dy = f_R(x), \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Adesso, per $x \in B_R(0)$, $f = f_R$ e, quindi, abbiamo la tesi per q.o. $x \in B_R(0)$, ma R è arbitrario. $\square$.

Da questa versione, segue una descrizione della natura degli insiemi misurabili; in particolare, se $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ allora $\chi_E \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, e, quindi,

$$\chi_E(x) = \lim_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B \chi_E(y)\,dy = \lim_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \frac{|E\cap B|}{|B|}, \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5.1}$$

Si distingue i punti x per cui il limite in (5.1) vale 1 e 0.

1.5.2. Definizione: *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Si chiama $x \in E$ un punto di densità (secondo Lebesgue) per E se*

$$\lim_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \frac{|E\cap B|}{|B|} = 1.$$

Se, invece, il limite vale 0 si chiama x un punto di dispersione (secondo Lebesgue) per E.

N.B. Possiamo affermare le seguenti cose.

1. Se x è un punto di densità per E, allora ogni palla aperta e piccola attorno ad x è quasi coperta da E. Infatti, per ogni $\alpha < 1$, ma vicino ad 1, esiste B con raggio piccolo, attorno ad x, t.c. $|B \cap E| \geq \alpha|B|$; cioè "$E$ copre una frazione α di B".

2. Non c'è, a priori, un legame fra $x \in E$ e x è punto di densità di E. Per esempio,
   - Se $E = B \setminus \{\bar{x}\}$, allora $\bar{x}$ è un punto di densità fuori di E
   - Se $E = B_1(0) \cup \{\bar{x}\}$ con $|\bar{x}| > 1$, allora $\bar{x}$ è un punto di E che non è un punto di densità per E.

3. Usando l'identità $|B| = |B \cap E| \cup |B \cap E^c|$, si verifica
   - x è un punto di densità per $E \iff x$ è un punto di dispersione per E^c
   - x è un punto di dispersione per $E \iff x$ è un punto di densità per E^c

4. I punti di densità sono "l'interno di E" nel senso della misura (di Lebesgue) e i punti di dispersione sono "l'esterno di E" nel senso della misura.

Dal Teorema 1.5.1, segue il seguente descrizione degli insiemi misurabili.

1.5.3. Corollario (punti di densità): *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora q.o. $x \in E$ è un punto di densità per E e q.o. $x \in E^c$ è un punto di dispersione per E.*

Il risultato dice che quasi ogni punto di un insieme misurabile sta nell'interno nel senso della misura. Inoltre, il TDL fornisce anche uno "sostituto" per il concetto della continuità puntuale per le funzioni localmente integrabili. Infatti, per $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, abbiamo che

$$\lim_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B (f(y) - f(x))\,dy = 0, \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Il concetto che ci serve è più forte di questa proprietà.

1.5.4. Definizione: *Sia $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Si chiama $\bar{x}$ un punto di Lebesgue per f se*

(i) $f(\bar{x})$ è finito

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{|B|\to 0 \\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f(\bar{x})|\,dy = 0$.

La collezione di tutti i punti di Lebesgue per f si chiama l'insieme di Lebesgue per f

N.B. Dalla definizione, segue che:

1. $\bar{x}$ è un punto di Lebesgue $\Longrightarrow$ vale la tesi del TDL nel punto $\bar{x}$.

2. Se f è continua in $\bar{x}$, allora $\bar{x}$ è un punto di Lebesgue per f.

1.5.5. Corollario (punti di Lebesgue) *Sia $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora quasi ogni punto è un punto di Lebesgue per f; cioè, si ha*

$$\lim_{\substack{|B|\to 0\\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f(\bar{x})|\, dy = 0.$$

Dimostrazione: L'idea è di applicare il TDL alla famiglia di funzioni $g(x) := |f(x)-r| \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con $r \in \mathbb{Q}$. Infatti.

1. Per ogni $r > 0$, il TDL garantisce che esiste $E_r \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $|E_r| = 0$ e

$$|f(x)-r| = \lim_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-r|\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E_r. \tag{1.5.2}$$

   Poniamo $E = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r$, e abbiamo $|E| = 0$.

2. Supponiamo $\bar{x} \notin E$, ovvero, $\bar{x} \notin E_r$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$. Supponiamo inoltre che $f(\bar{x})$ sia finito. Essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, dato $\epsilon > 0$, esiste $\bar{r} = \bar{r}(\epsilon)$ t.c. $|f(\bar{x}) - \bar{r}| < \epsilon$. Quindi, abbiamo

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f(\bar{x})|\, dy \le \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-\bar{r}|\, dy + |f(\bar{x})-\bar{r}| \le \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-\bar{r}|\, dy + \epsilon. \tag{1.5.3}$$

3. Sfruttando (1.5.2), con $x = \bar{x} \notin E_{\bar{r}}$ e $r = \bar{r}$, la (1.5.3) diventa

$$\lim_{\substack{|B|\to 0\\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f(\bar{x})|\, dy \le |f(\bar{x})-\bar{r}| + \epsilon < 2\epsilon,$$

   ma, $\epsilon > 0$ è arbitrario e quindi

$$\lim_{\substack{|B|\to 0\\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f(\bar{x})|\, dy = 0$$

   per ogni $\bar{x} \notin E$ per cui $f(\bar{x})$ è finita. Ma f localmente integrabile implica che è finita q.o., e, quindi, la tesi.

□

Finalmente, vogliamo chiedere se è possibile sostituire le palle aperte con altri insiemi del TDL. La risposta è ovviamente sì, e si base sulla seguente definizione.

1.5.6. Definizione: *Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Una famiglia di insiemi $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è detta restringersi regolarmente ad $\bar{x}$, oppure, di avere eccentricità limitata in $\bar{x}$ se*

(i) *U_λ è misurabile per ogni $\lambda \in \Lambda$*

(ii) $\inf_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{diam}(U_\lambda) = 0$

(iii) *Esiste* $C = C(\bar{x}) > 0$ *t.c. per ogni* $U = U_\lambda$ *esiste una palla aperta* $B = B_{r(\lambda)}$ *t.c.*

$$\bar{x} \in B, \quad U \subset B, \quad |U| \geq C|B|.$$

Raccogliamo qualche osservazione in preparazione per il risultato finale.

1. Negli esempi, spesso $\Lambda = (0, +\infty)$.
2. La condizione **(ii)** implica che la famiglia ha insiemi di diametro piccolo a piacere.
3. La condizione $|U| \geq C|B| > 0$ implica che gli insiemi $U \in \mathcal{U}$ hanno misura positiva. Spesso negli esempi, $U^\circ \neq \emptyset$.
4. Per ogni successione $\{U_k\}$ minimizzante per il diametro, abbiamo $\mathrm{diam}(U_k) \to 0$ per $k \to +\infty$, si ha $|U_k| \to 0$, e, quindi, $|B_{r(k)}| \leq C^{-1}|U_k| \to 0$, ma $\bar{x} \in B_{r(k)}$ per ogni k. Quindi, $B_{r(k)} \to \{\bar{x}\}$, da cui segue $U_k \to \{\bar{x}\}$.
5. Siano $\Phi : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di insiemi e $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \quad \lambda \in \Lambda\}$ una famiglia di insiemi di eccentricità limitata in $\bar{x}$, possiamo definire

$$\lim_{U \searrow \bar{x}} \Phi(U) = \bar{\Phi} \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \quad |U| < \delta \Longrightarrow |\Phi(U) - \bar{\Phi}| < \epsilon.$$

1.5.7. Teorema (di Differenziazione di Lebesgue - Versione Generale) *Sia* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. *Allora, quasi ogni* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *è un elemento dell'insieme di Lebesgue. In particolare, per q.o.* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

(a) $\displaystyle\lim_{U\searrow\bar{x}} \frac{1}{|U|} \int_U |f(y) - f(\bar{x})| \, dy = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{U\searrow\bar{x}} \frac{1}{|U|} \int_U f(y) \, dy = f(\bar{x})$

dove $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \quad \lambda \in \Lambda\}$ *è qualsiasi famiglia di insiemi con eccentricità limitata in* $\bar{x}$.

Dimostrazione: L'implicazione **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** è già stata notata. Invece, per l'affermazione **(a)** notiamo: per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste B con $\bar{x} \in B, U \subset B$, e $|U| \geq C|B|$, dove $C = C(\bar{x}) > 0$. Quindi, si ha

$$\frac{1}{|U|} \int_U |f(y) - f(\bar{x})| \, dy \leq \frac{1}{C|B|} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| \, dy. \tag{1.5.4}$$

Se $|U| \to 0$, allora $|B| \leq C^{-1}|U| \to 0$, e, quindi, per il Corollario 1.5.5, il membro destro di (1.5.4) va a zero. $\square$.

1.5.8. Esempio (cubi): Siano $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{Q} = \{Q$ cubo aperto (lati paralleli alle asse) con $\bar{x} \in Q\}$. Allora, $\mathcal{Q}$ ha eccentricità limitata in $\bar{x}$. Infatti

- Ogni Q è determinato dai suoi vertici. Chi è Λ?
- Dato Q_t con lato $t > 0$ t.c. $\bar{x} \in Q_t$, abbiamo $\mathrm{diam}(Q_t) = \sqrt{n}t$, e, quindi $Q_t \subset B_{\sqrt{n}t/2}$ (la palla più piccola possibile).

- Quindi, vogliamo trovare $C > 0$ t.c.

$$|Q_t| = t^n \geq C \left|B_{\sqrt{n}t/2}\right| = C\alpha_n(\sqrt{n}t/2)^n$$

dove $\alpha_n = |B_1(0)|$.

- Basta scegliere $C \leq \dfrac{2^n}{\alpha_n n^{n/2}}$

N.B. Ovviamente, va bene anche la sottofamiglia di $\mathcal{Q}$ formata dai cubi che hanno centro in $\bar{x}$. Questa è la scelta di Wheeden-Zygmund [11]. Invece, è essenziale che i lati sono paragonabili, come si vede dal seguente esempio.

1.5.9. Esempio (rettangoli): Siano $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R} = \{R_{a,b}$ rettangolo aperto con $\bar{x} \in R_{a,b}\}_{a,b>0}$. Allora, $\mathcal{R}$ <u>non</u> ha eccentricità limitata in $\bar{x}$. Infatti

- $\operatorname{diam}(R_{a,b}) = \sqrt{a^2+b^2}$, e, quindi $R_{a,b} \subset B_{\sqrt{a^2+b^2}/2}$ (la palla più piccola possibile).
- Per assurdo, assumiamo che esista $C > 0$ t.c.

$$|R_{a,b}| = ab \geq C \left|B_{\sqrt{a^2+b^2}/2}\right| = C\pi(a^2+b^2)/4$$

- Ma, con $b = \bar{b}$ fisso, mandiamo $a \to 0$ e troviamo un assurdo.

Ovviamente, è facile generalizzare Esempio 1.5.9 a dimensione n qualsiasi. Infine, notiamo che è possible avere $\mathcal{U}$ con eccentricità limitata in $\bar{x}$, ma $\bar{x} \notin U$ per ogni $U \in \mathcal{U}$.

1.5.10 Esercizio (corone circolari):

a) Mostrare che $\{U_r = B_r(x) \setminus \overline{B}_{r/2}(x) : \ r > 0\}$ ha eccentricità limitata in $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Mostrare che $\{U_{R,r} = B_R(x) \setminus \overline{B}_r(x) : \ 0 < r < R\}$ **non** ha eccentricità limitata in $x \in \mathbb{R}^n$.

1.6 Intermezzo

In questo breve paragrafo, vogliamo dare un riassunto rispetto alle nostre domande di partenza.

1.6.1. Osservazione (Problema delle medie): *Abbiamo visto che:*

$$\frac{1}{|U|}\int_U f(y)\,dy \to f(\bar{x}), \quad q.o.\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

<u>SE</u> $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $U \searrow \bar{x}$ regolarmente.

1.6.2. Osservazione (Differenziabilità dell'integrale indefinito): *Abbiamo visto: se definiamo $F(E) := \int_E f(y)\,dy$, allora*

$$\frac{F(U)}{|U|} \to f(\bar{x}), \quad q.o.\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

<u>SE</u> $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $U \searrow \bar{x}$ regolarmente.

Si può dire che $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ è condizione sufficiente affinchè f ammetta una primitiva quasi ovunque. Si nota anche, nel caso unidimensionale, scegliendo $E = (x, x+h)$ per $h > 0$ oppure $E = (x+h, x)$ per $h < 0$, si ha

$$F'(x) = \lim h \to 0 \int_x^{x+h} f(y)\, dy = f(x) \quad q.o.\ x \in \mathbb{R}.$$

1.6.3. Domanda: *Possiamo trovare delle condizioni per cui $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ risulta differenziabile quasi ovunque, con derivata $F' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, e*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\, dx \ ?$$

Cioè, possiamo avere una generalizzazione del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale in questo senso? La risposta a questa domanda ci porterà ad incontrare:

1. Un altro *Lemma di Ricoprimento di Vitali*
2. Il problema della *differenziabilità di funzioni monotone.*
3. Spazi nuovi di funzioni $BV([a,b])$ e $AC([a,b])$, le funzioni di *variazione limitata* e le funzioni *assolutamente continue.*

Più in generale, uno può cominciare a pensare come si può generalizzare il Teorema della Divergenza per un campo vettoriale F per cui $\mathrm{div} F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, per esempio.

1.7 Il Lemma di ricoprimento di Vitali

Il nostro primo obiettivo è di mostrare che le funzioni monotone sono differenziabili quasi ovunque. Per farlo, abbiamo bisogno di un altro Lemma di Vitali per una buona collezione (non necessariamente finita) di intervalli.

1.7.1. Definizione: *Sia $\mathcal{I} = \{I\}$ una collezione di intervalli. Si dice che $\mathcal{I}$ ricopre $E \subseteq \mathbb{R}$ nel senso di Vitali se*

$$\forall\ \epsilon > 0, \forall\ x \in E \quad \exists I \in \mathcal{I} : \quad x \in I \ \wedge\ |I| < \epsilon.$$

Cioè, $\mathcal{I}$ è un ricoprimento "fine" di E nel senso che attorno ogni punto x ci sono intervalli piccoli a piacere.

1.7.2. Teorema (Lemma di Ricoprimento di Vitali) *Sia $E \subset \mathbb{R}$ con $|E|_e < +\infty$, dove si ricorda che*

$$|E|_e := \inf\{\sum_{j=1}^{+\infty} |I_j| : \quad E \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j\}$$

è la misura esterna (secondo Lebesgue) di E. Sia $\mathcal{I}$ un ricoprimento di E nel senso di Vitali. Allora, per ogni $\epsilon > 0$, esistono $N = N(\epsilon)$ ed una collezione finita $\{I_1, \ldots, I_N\} \subset \mathcal{I}$ t.c.

(i) *Gli intervalli I_j con $j = 1, \ldots, N$ sono disgiunti*

(ii) $\left| E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j \right|_e < \epsilon.$

Cioè, con un numero finito di intervalli disgiunti, si riesce a quasi coprire tutto E.

Dimostrazione: Si articola in quattro passi.

Passo 1: Basta mostrare il Teorema nel caso I chiuso per ogni $I \in \mathcal{I}$.

Infatti, assumendo il Teorema per questo caso, dato $\mathcal{I}$ qualsiasi ricoprimento di E nel senso di Vitali , si definisce la collezione $\overline{\mathcal{I}} := \{\overline{I} : \quad I \in \mathcal{I}\}$. Si verifica che $\overline{\mathcal{I}}$ è anche un ricoprimento di E nel senso di Vitali di E. Poi, per ogni $\epsilon > 0$, esistono $N = N(\epsilon)$ e $\{\overline{I}_1, \ldots, \overline{I}_N\}$ disgiunti t.c.

$$\left| E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \overline{I}_j \right|_e < \epsilon$$

Ma, $\{I_1, \ldots, I_N\}$ ha solo, eventualmente, qualche punto estremo in meno, e, quindi

$$\left| E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j \right|_e \leq \left| \left[E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j \right] \cup \{a_j, b_j\}_{j=1}^{N} \right|_e < \epsilon$$

Passo 2: Possiamo assumere: esiste U aperto t.c. $|U| < +\infty$ e $I \subset U$ per ogni $I \in \mathcal{I}$.

Infatti, $|E|_e < +\infty \Longrightarrow \exists U$ aperto t.c. $U \supset E$ e $|U| < +\infty$. Essendo $\mathcal{I}$ un ricoprimento nel senso di Vitali di E, per ogni $x \in E$ esiste $I \in \mathcal{I}$ t.c. $x \in I$ e $|I|$ è piccolo a piacere. Quindi possiamo eliminare da $\mathcal{I}$ tutti I per cui $I \not\subset U$, e la collezione così ridotta è ancora un ricoprimento nel senso di Vitali di E.

Allora: Dai Passi 1 e 2, basta mostrare il Teorema con $\mathcal{I}$ un ricoprimento nel senso di Vitali di E con le proprietà aggiuntive: ogni I è chiuso e contenuto in U, un insieme aperto con misura finita.

Passo 3: Il processo di selezione per $\{I_1, \ldots, I_N\}$.

1. Sia I_1 arbitrario
2. Se $E \subset I_1$, abbiamo finito. Altrimenti, esiste $I \in \mathcal{I}$ t.c. $I \cap I_1 = \emptyset$. Infatti, esiste $x \in E \setminus I_1$ e quindi per ogni I abbastanza piccolo, con $x \in I$, si ha $I_1 \cap I = \emptyset$. Poniamo $k_1 := \sup\{|I| : \quad I \cap I_1 = \emptyset\}$, e abbiamo $0 < k_1 < +\infty$. Infatti, $k_1 > 0$ perchè esiste I con $I \cap I_1 = \emptyset$ e $k_1 < +\infty$ perchè $|I| \leq |U| < +\infty$ per ogni $I \in \mathcal{I}$. Prendiamo:
$$I_2 \in \mathcal{I} \text{ t.c. } I_2 \cap I_1 = \emptyset \text{ e } |I_2| \geq \frac{1}{2} k_1.$$
3. Ripetiamo, con questo algoritmo. Se, dopo un numero finito di passi, abbiamo $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, abbiamo finito. Altrimenti, esiste $I_{n+1} \in \mathcal{I}$ t.c.
$$I_{n+1} \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j \right) = \emptyset \text{ e } |I_{n+1}| \geq \frac{1}{2} k_n := \frac{1}{2} \sup \left\{ |I| : \quad I \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j \right) = \emptyset \right\}.$$
Così, abbiamo una successione infinita di insiemi $\{I_j\}_{j=1}^{+\infty}$ con queste proprietà.
4. Essendo che $\bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j \subset U$, abbiamo $\sum_{j=1}^{+\infty} |I_j| < +\infty$. Quindi, esiste $N = N(\epsilon)$ t.c. $\sum_{j=N+1}^{+\infty} |I_j| < \epsilon/5$. La nostra collezione è $\{I_1, \ldots, I_N\}$ con questo $N = N(\epsilon)$.

Passo 4: Poniamo $R := E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ *e mostriamo* $|R|_e < \epsilon$.
Basta trovare degli intervalli $\{J_k\}_{k=1}^{+\infty}$ t.c.

$$R \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k \quad \text{e} \quad \left|\bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k\right| < \epsilon.$$

1. Sia $x \in R$ arbitrario. Esiste $I = I(x) \in \mathcal{I}$ t.c. $x \in I$ e $I \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right) = \emptyset$ (di nuovo usando il fatto che $\mathcal{I}$ ricopre E, e, quindi, R, nel senso di Vitali).

2. Affermiamo: esiste $n = n(x) > N$ t.c. $I \cap I_n \neq \emptyset$. Se no, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $I \cap I_j = \emptyset$ per ogni $j \leq n$. Quindi, per la costruzione di Passo 3, si ha

$$|I| \leq k_n \leq 2|I_{n+1}|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

   ma, $|I_{n+1}| \to 0$, che è assurdo.

3. Sia $n = n(x)$ il più piccolo n t.c. $I \cap I_n \neq \emptyset$. Abbiamo $n > N$ e $|I| \leq k_{n-1} \leq 2|I_n|$. Quindi,

$$d(x, \mathrm{midpt}(I_n)) \leq |I| + \frac{1}{2}|I_n| \leq \frac{5}{2}|I_n|$$

   dove $\mathrm{midpt}(I_n)$ è il punto medio di I_n.

4. Quindi, $x \in J_n = J_{n(x)}$ dove $J_n = \frac{5}{2} I_n$; cioè, l'intervallo con lo stesso punto medio ma con il raggio 5/2 volte più grande. Quindi, per ogni $x \in R$, si ha $x \in J_{n(x)}$ con $n(x) > N$, ovvero, $x \in \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} J_n$ e

$$|R| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |J_n| = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} |I_n| < 5(\epsilon/5) = \epsilon.$$

□

1.8 Differenziazione di funzioni monotone

In questo paragrafo, esaminiamo il problema della differenziabilità delle funzioni monotone e la relazione fra l'integrale definito della derivata e l'incremento della funzione. Per organizzare lo studio, è utile il seguente concetto.

1.8.1. Definizione (I numeri di Dini): *Sia f definita e finita in un intorno di $x \in \mathbb{R}$. Denotiamo con*

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0, \text{ piccolo}, \tag{1.8.1}$$

il rapporto incrementale di f. Definiamo i numeri di Dini

$$D^{\pm} f(x) := \limsup_{h \to 0^{\pm}} \Delta_h f(x) \tag{1.8.2}$$

$$D_{\pm} f(x) := \liminf_{h \to 0^{\pm}} \Delta_h f(x) \tag{1.8.3}$$

N.B. Dalla definizione possiamo osservare:

1. È ovvio che

$$D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \quad e \quad D_- f(x) \leq D^- f(x). \tag{1.8.4}$$

2. f è differenziabile in $x \iff$ tutti i numeri di Dini sono finiti ed uguali.

In realtà, sfruttando il punto 1 sopra, il punto 2 si semplifica nel modo seguente

1.8.2. Osservazione: *f è differenziabile in x se:*

(i) $D^+f(x) < +\infty$

(ii) $D^+f(x) \leq D_-f(x)$

(iii) $D^-f(x) \leq D_+f(x)$

Infatti, in tal caso, si ha

$$D^+f \leq D_-f \leq D^-f \leq D_+f \leq D^+f < +\infty.$$

Il risultato principale è il seguente.

1.8.3. Teorema: *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ crescente e limitata. Allora:*

(a) *f è differenziabile per q.o. $x \in (a, b)$.*

(b) *La derivata f' è misurabile, ovvero, è ben definita q.o. ed ogni suo prolungamento g a tutto (a, b) è misurabile.*

(c) *$f' \geq 0$ q.o. in (a, b).*

(d) *f' è integrabile e si ha:*

$$0 \leq \int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b^-) - f(a^+), \tag{1.8.5}$$

dove ricordiamo $f(x_0^\pm) := \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$.

N.B.

1. C'è una disuguaglianza in (1.8.5) anzichè uguaglianza; per esempio, una funzione crescente a scala avra $<$ (stretta). Inoltre, la funzione di *Cantor-Lebesgue*, spesso chiamata *"la scala del diavolo"*, è una funzione continua e crescente per cui risulta $f' = 0$ q.o., ma $f(1) - f(0) = 1$ (vedi paragrafo 1 di Capitolo 3 di Wheeden-Zygmund [11] per la sua definizione, oppure vedi paragrafo 1.10).

2. Vale, ovviamente, una versione del Teorema per f decrescente. Nella formula (1.8.5) si ha $\geq$ anzichè $\leq$.

L'idea della lunga dimostrazione è di mostrare:

1. I numeri di Dini sono uguali quasi ovunque. Si usa il Lemma di Vitali per stimare gli eventuali insiemi dove due numeri di Dini differiscono.

2. Il limite g del rapporto incrementale (che esiste q.o., ma è eventualmente infinita), è misurabile e non-negativa. Inoltre g è integrabile su $[a, b]$ e vale (1.8.5) con g al posto di f'.

3. Dalla integrabilità di g, segue che g è finita quasi ovunque. Quindi, f è differenziabile q.o. con derivata g e vale (1.8.5).

Dimostrazione: Si articola in quattro passi.

Passo 1: Riduzione al caso (a,b) un intervallo finito.

Cioè, se vale il Teorema per ogni (α,β) finito, allora nel caso di (a,b) infinito, si prende una successione di intervalli finiti $(\alpha_k,\beta_k)\to(a,b)$ e si passa al limite (vedi Esercizio 1.8.5).

Passo 2: Per q.o. $x\in(a,b)$ finito, esiste $g(x)=\lim_{h\to 0}\Delta_h f(x)$ con eventualmente $g(x)=+\infty$; cioè i numeri di Dini sono uguali q.o., ma eventualmente infiniti.

1. Basta mostrare: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ crescente su (a,b) qualsiasi intervallo finito implica
$$\left|\{x\in(a,b):\quad D_-f(x)<D^+f(x)\}\right|=0. \tag{1.8.6}$$
Infatti, ponendo, $-y=x$ e usando $\tilde f(y):=-f(-y)$, abbiamo $\tilde f:(-b,-a)\to\mathbb{R}$ crescente, e, quindi (1.8.6) applicata a $\tilde f$ implica
$$\left|\{y\in(-b,-a):\quad D_-\tilde f(y)<D^+\tilde f(y)\}\right|=0. \tag{1.8.7}$$
Ma, si verifica facilmente che $D_-\tilde f(y)=D_+f(-y)=D_+f(x)$ e $D^+\tilde f(y)=D^-f(-y)=D^-f(x)$, e, quindi, dalla (1.8.7) segue
$$\left|\{x\in(a,b):\quad D_+f(x)<D^-f(x)\}\right|=0. \tag{1.8.8}$$
Quindi, combinando (1.8.6) e (1.8.8) con le proprietà (1.8.4), si trova: per quasi ogni $x\in(a,b)$:
$$D^+f(x)\le D_-f(x)\le D^-\le D_+f\le D^+f.$$
2. Poniamo $E:=\{x\in(a,b):\quad D_-f(x)<D^+f(x)\}$ e
$$E_{r,s}:=\{x\in(a,b):\quad D_-f(x)<s<r<D^+f(x)\},$$
con $r,s\in\mathbb{Q}^+$. Notiamo che f crescente implica che tutti i numeri di Dini $D^\pm f(x), D_\pm f(x)$ sono non-negativi. Vogliamo mostrare $|E|=0$, e, quindi, basta mostrare
$$\left|E_{r,s}\right|_e=0,\quad\forall\ r,s\in\mathbb{Q}^+.$$
3. Per assurdo, supponiamo che esista $m>0$ per cui $\left|E_{r,s}\right|_e=m>0$ per qualche $r,s,\in\mathbb{Q}^+$.
   - Allora, $\forall\ \epsilon>0$, esiste $U=U(\epsilon)$ aperto t.c. $E_{r,s}\subset U=\bigcup_{j=1}^{+\infty}(a_j,b_j)$ e $|U|\le m+\epsilon$.
   - Per ogni $x\in E_{r,s}$, si ha $D_-f(x)<s$, quindi, esiste $h^*=h^*(x)>0$ t.c.
   $$\forall\ h\in(0,h^*),\quad \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}<s\quad(\Longleftrightarrow f(x)-f(x-h)<sh)\,.$$
   Scegliendo h^* ancora più piccola (se è necessario), possiamo assumere $[x-h^*,x]\subset U$.
   - Abbiamo così un ricoprimento $\mathcal{I}=\{I=[x-h,x]:\quad 0<h<h^*(x)\}$ nel senso di Vitali di $E_{r,s}$ dove ogni $I=[x-h,x]\subset U$.
   - Dato $\epsilon>0$, per il Lemma di Vitali (Teorema 1.7.2), esiste una collezione finita $\{I_j=[x_j-h_j,x_j]\}_{j=1}^N$ con $N=N(\epsilon)$ t.c.

(i) I_j disgiunti per $j = 1, \dots, N$.
(ii) $\left| E_{r,s} \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j \right|_e < \epsilon \quad \left(\Longleftrightarrow \left| E_{r,s} \cap \left[\bigcup_{j=1}^N I_j \right] \right|_e > m - \epsilon \right)$
(iii) $[x_j - h_j, x_j] \subset U, \ \forall \ j = 1, \dots, N$ (per costruzione).
(iv) $f(x_j) - f(x_j - h_j) < sh_j, \ \forall \ j = 1, \dots, N$ (per costruzione).

- Sommando la **(iv)**, si trova

$$\sum_{j=1}^N [f(x_j) - f(x_j - h_j)] < s \sum_{j=1}^N h_j < s|U| < s(m + \epsilon) \tag{1.8.9}$$

4. Sia $A := E_{r,s} \cap \left[\bigcup_{j=1}^N I_j \right]$ (la parte di $E_{r,s}$ coperta dagli I_j).

- Per ogni $y \in A$ che **non** è un estremo di qualche I_j, si ha

$$D^+ f(y) > r \left(\Longleftrightarrow \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > r \right),$$

e, quindi, esiste $k^* = k^*(y) > 0$ t.c. $[y, y + k^*] \subset [x - j - h_j, x_j]$ per qualche j e anche

$$\forall k \in (0, k^*) : \quad f(y + k) - f(y) > rk.$$

- Quindi, abbiamo $\mathcal{J} = \{J = [y, y + k] : \quad 0 < k < k^*(y)\}$ un ricoprimento nel senso di Vitali di $A = E_{r,s} \cap \left[\bigcup_{j=1}^N I_j \right]$.
- Dato $\epsilon > 0$, applicando di nuovo il Lemma di Vitali, esiste una collezione finita $\{J_i = [y_i, y_i + k_i]\}_{i=1}^M$ con $M = M(\epsilon)$ t.c.

(v) J_i disgiunti per $i = 1, \dots, M$.
(vi) $\left| A \setminus \bigcup_{i=1}^M J_i \right|_e < \epsilon \quad \left(\Longleftrightarrow \left| E_{r,s} \cap \left[\bigcup_{j=1}^N I_j \right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^M J_i \right] \right|_e > m - 2\epsilon \right)$
(vii) $\forall \ i = 1, \dots, M, \exists j = j(i)$ t.c. $[y_i, y_i + k_i] \subset [x_j - h_j, x_j]$ (per costruzione).
(viii) $f(y_i + k_i) - f(y_i) > rk_i, \ \forall \ i = 1, \dots, M,$ (per costruzione).

- Sommando la **(viii)**, si trova

$$\sum_{i=1}^M [f(y_i + k_i) - f(y_i)] > r \sum_{i=1}^M k_i > r(m - 2\epsilon) \tag{1.8.10}$$

5. Usando il fatto che f è crescente, insieme con la **(vii)** $[y_i, y_i + k_i] \subset [x_j - h_j, x_j]$, si trova

$$r(m - 2\epsilon) < \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^M [f(y_i + k_i) - f(y_i)] \leq \sum_{j=1}^N [f(x_j) - f(x_j - h_j)] < s(m + \epsilon).$$

Cioè, $r(m - 2\epsilon) < s(m + \epsilon)$ dove $\epsilon > 0$ è arbitrario, e, mandano $\epsilon \to 0^+$, si trova $rm \leq sm$, ma, $r < s$ implica $m = 0$, assurdo.

Quindi: Esiste $g(x) = \lim_{h \to 0} \Delta_h f(x)$ per q.o. $x \in (a, b)$, dove il limite non è ancora garantito ad essere finito, ma f ‘e differenziabile in ogni x per cui $g(x)$ esiste ed è finito.

<u>*Passo 3:*</u> *La funzione $g(x) = \lim_{h \to 0} \Delta_h f(x)$, definita q.o., è misurabile e non-negativa, ovvero, è uguale q.o. ad una funzione misurabile e non-negativa su (a, b).*

Infatti, essendo $f(b^-) = \sup_{(a,b)} f < +\infty$, si prolunga f all'intervallo $(a, +\infty)$, ponendo $f(x) = f(b^-)$ per ogni ogni $x \geq b$. Poi, si definisce

$$g_n(x) := n[f(x + 1/n) - f(x)] \quad \left(= \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n} \right). \tag{1.8.11}$$

Abbiamo g_n è misurabile, non-negativa su $(a, +\infty)$. Inoltre, per Passo 2, abbiamo $g_n(x) \to g(x)$ per q.o. $x \in (a, b)$, e, quindi, g è quasi ovunque un limite puntuale di una successione di funzioni misurabili e non-negative.

<u>*Passo 4:*</u> *La funzione g è integrabile su (a, b) e si ha*

$$\int_a^b g(x)\, dx = f(b-) - f(a+). \tag{1.8.12}$$

Il ragionamento è il seguente.

- La successione $\{g_n\}$ di funzioni misurabili e non-negativi, e, quindi, possiamo usare il *Lemma di Fatou* (vedi Teorema 5.17 di [11]). Abbiamo

  $$\int_a^b \liminf_{n \to +\infty} g_n(x)\, dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx.$$

  Ma $g_n \to g$ q.o. su (a, b), e, quindi

  $$\begin{aligned} \int_a^b g(x)\, dx &\leq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b n[f(x + 1/n) - f(x)]\, dx \\ &= \liminf_{n \to +\infty} \left[n \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\, dx - n \int_a^b f(x)\, dx \right] \\ &= \liminf_{n \to +\infty} \left[n \int_b^{b+1/n} f(x)\, dx - n \int_a^{a+1/n} f(x)\, dx \right] \end{aligned}$$

- Poi, essendo f (prolungato come nel Passo 3) continua per $x \geq b$, abbiamo

  $$\int_a^b g(x)\, dx \leq f(b-) - \liminf_{n \to +\infty} \left[n \int_a^{a+1/n} f(x) \right]. \tag{1.8.13}$$

- Adesso, usando f crescente, abbiamo anche

  $$f(a^+) \leq n \int_a^{a+1/n} f(x)\, dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ abbastanza grande},$$

  e, quindi,

  $$f(a^+) \leq \liminf_{n \to +\infty} \left[n \int_a^{a+1/n} f(x)\, dx \right] \tag{1.8.14}$$

- Combinando (1.8.13) e (1.8.14), abbiamo

  $$\int_a^b g(x)\, dx \leq f(b-) - f(a^+),$$

  che è finito perchè $-\infty < f(a^+)$.

Conclusione: Abbiamo g integrabile, e, quindi, g è finita quasi ovunque. Quindi, f è differenziabile q.o. con derivata g e vale (1.8.5). □

1.8.4. Esercizio: Completare Passo 1 della dimostrazione del teorema sulla differenziabilità delle funzioni monotone (Teorema 1.8.3); cioè abbiamo mostrato il teorema nel caso (a, b) un intervallo finito. Mostrare che il caso generale segue di quello che abbiamo mostrato.

Concludiamo questo paragrafo con qualche corollario del Teorema 1.8.3.

1.8.5. Corollario: *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescente. Allora valgono le conclusioni del Teorema 1.8.3. con $[a, b]$ al posto di (a, b). Inoltre, vale il risultato analogo per $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ decrescente.*

Dimostrazione: Basta considerare la restrizione di f a (a, b), che è crescente e limitata. □

1.8.6. Corollario: *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ crescente (non necessariamente limitata). Allora f è differenziabile q.o. con $f'(x) \geq 0$ per ogni x in cui esiste la derivata.*

Dimostrazione: Basta scrivere (a, b) come un unione numerabile di intervalli compatti crescenti $I_k = [a_k, b_k]$. Dal Corollario 1.8.5, abbiamo f differenziabile su $I_k \setminus E_k$ dove $|E_k| = 0$. Quindi f è differenziabile su $(a, b) \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$, ovvero, quasi ovunque. Essendo f crescente, la derivata è non-negativa in ogni punto di esistenza. □

1.9 Funzioni di variazione limitata: lo spazio $BV([a, b])$

L'idea di questo paragrafo è di generalizzare Corollario 1.8.5 ad una classe più ampia di funzioni. Cominciamo con la definizione di tale classe.

1.9.1. Definizione: *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita in un intervallo compatto. Si dice che <u>f ha variazione limitata in $[a, b]$</u> se esiste ed è finito*

$$V[f; a, b] := \sup_{\Gamma} V_\Gamma[f; a, b], \tag{1.9.1}$$

dove

$$V_\Gamma[f; a, b] := \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \tag{1.9.2}$$

ed il sup è preso rispetto alle partizioni $\Gamma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ di $[a, b]$. In tal caso, si scrive $f \in BV([a, b])$.

N.B.

1. La quantità $V[f; a, b]$ si chiama *variazione totale di f in* $[a, b]$. Per semplicità, spesso scriviamo solo V e V_Γ anzichè $V[f; a, b]$ e $V_\Gamma[f; a, b]$.
2. Il concetto somiglie quello della *rettificabilità* di una curva in $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo da Analisi III, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua si chiama rettificabile se esiste finito $L(\varphi) := \sup_\Gamma \sum_{i=1}^{m} ||\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})||$. Questo concetto sta anche alle base dell'integrale di Riemann-Stieltjes (vedi Cap. 2 di Wheeden-Zygund [11]).

1.9.2. Esempio: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona $\Longrightarrow f \in BV([a, b])$.

Infatti, per ogni partizione Γ,

$$V_\Gamma = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \pm \sum_{i=1}^{m} ((f(x_i) - f(x_{i-1})) = \pm (f(b) - f(a)),$$

e, quindi $V[f;a,b] = |f(b) - f(a)| < +\infty$.

1.9.3. Esercizio: Mostrare che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monotona a tratti*, cioè, esiste una partizione $\{a = a_0 < \cdots < a_N = b\}$ t.c. $f_{|[a_{i-i},a_i]}$ è monotona, implica che $f \in BV([a,b])$.

1.9.4. Esempio: $f \in \mathrm{Lip}([a,b]) \Longrightarrow f \in BV([a,b])$. Ricordiamo che $f \in \mathrm{Lip}([a,b]) \Longleftrightarrow \exists\, L > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, per ogni $x, y \in [a,b]$.

Infatti, per ogni partizione Γ,

$$V_\Gamma = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_{i-1}| = L(b-a),$$

e, quindi $V[f;a,b] \leq L(b-a) < +\infty$.

1.9.5. Esercizio: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la *funzione di Dirichlet*, cioè,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

non è un elemento di $BV([a,b])$.

Alle fine del paragrafo, saranno proposti altri esercizi. Adesso cominciamo di esaminare alcune prime proprietà delle funzioni $f \in BV([a,b])$ e della variazione totale V.

1.9.6. Proposizione (Proprietà elementari):

(a) *$f \in BV([a,b]) \Longrightarrow f$ limitata su $[a,b]$.*

(b) *$BV([a,b])$ è uno spazio vettoriale.*

(c) *Siano $f, g, \in BV([a,b])$. Allora $fg \in BV([a,b])$ e $f/g \in BV([a,b])$ se esiste c t.c. $|g(x)| \geq c > 0$ per ogni $x \in [a,b]$.*

(d) *Se $[a',b'] \subset [a,b]$, allora $V[f;a',b'] \leq V[f;a,b]$.*

(e) *Se $c \in (a,b)$, allora $V[f;a,b] = V[f;a,c] + V[f;c,b]$.*

Lasciamo la dimostrazione per esercizio (vedi Teorema 2.1 e 2.2 di [11]), ma notiamo che proprietà analoghe a **(d), (e)** sono stati discusse in Analisi III, nel contesto della rettificabilità.

1.9.7. Domanda: *Esiste una semplice caratterizzazione delle funzioni di variazione limitata su un intervallo compatto?*

La risposta è sì. Sono differenze di funzioni monotone, e, quindi, sono differenziabili quasi ovunque. Per mostrare questo, è utile spezzare la variazione totale in due parti.

1.9.10. Definizione: *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si chiama variazione positiva di f su $[a,b]$ la quantità*

$$P = P[f;a,b] := \sup_\Gamma P_\Gamma[f;a,b] = \sup_\Gamma \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ \tag{1.9.3}$$

e la variazione negativa di f su $[a,b]$ la quantità

$$N = N[f;a,b] := \sup_\Gamma N_\Gamma[f;a,b] = \sup_\Gamma \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \tag{1.9.4}$$

Abbiamo usato nella definizione la *parte positiva/negativa* degli incrementi $[f(x_i) - f(x_{i-1})]^{\pm}$, dove ricordiamo per ogni $x \in R$:

$$x^+ := \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad x^- := \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & -x \leq 0 \end{cases},$$

o, in modo equivalente, $x^+ := \max\{x, 0\}$ e $x^- := \max\{-x, 0\}$. Si ricorda

$$x^+, x^- \geq 0, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x = x^+ - x^-.$$

Da queste proprietà seguono banalmente

$$0 \leq P_\Gamma, N_\Gamma, \quad \forall \Gamma \text{ partizione} \tag{1.9.5}$$

$$P_\Gamma + N_\Gamma = V_\Gamma, \quad \forall \Gamma \text{ partizione} \tag{1.9.6}$$

$$P_\Gamma - N_\Gamma = f(b) - f(a), \quad \forall \Gamma \text{ partizione} \tag{1.9.7}$$

e, quindi, si ha $0 \leq P, N \leq +\infty$. C'è una relazione sorprendente, a prima vista, tra la finitezza delle quantità V, P, e N.

1.9.11. Lemma: *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se uno delle variazioni V, P, o N è finita, allora lo sono le altre e vale*

$$P + N = V \quad \text{e} \quad P - N = f(b) - f(a), \tag{1.9.8}$$

ovvero,

$$P = \frac{1}{2}[V + f(b) - f(a)] \quad \text{e} \quad N = \frac{1}{2}[V - f(b) + f(a)] \tag{1.9.9}$$

Dimostrazione: Infatti

1. Se $V < +\infty$, da (1.9.6) abbiamo

$$P_\Gamma + N_\Gamma = V_\Gamma \leq V, \quad \forall \Gamma,$$

ma, da (1.9.5) segue che $P_\Gamma, N_\Gamma \leq V < +\infty$ per ogni Γ, e, quindi

$$P, N \leq V < +\infty$$

2. Se $P < +\infty$, si applica (1.9.6) e (1.9.7) per trovare

$$\begin{aligned} V_\Gamma &\leq P + N_\Gamma, \quad \forall\, \Gamma \\ &= P + P_\Gamma - f(b) + f(a) \quad \forall \Gamma \\ &\leq 2P - f(b) + f(a) < +\infty, \end{aligned}$$

e, quindi, $V \leq 2P - f(b) + f(a) < +\infty$. Allora, da Passo 1, segue che anche $N < +\infty$.

3. In modo analogo, $N < +\infty \implies V < +\infty$ $(\implies P < +\infty)$ dove $V \leq 2N + f(b) - f(a)$. Quindi, abbiamo la prima parte del Lemma.

4. Per la seconda parte, dai Passi 2 e 3, abbiamo $V \leq P + N$. D'altre parte, se scegliamo una successione $\{\Gamma_k\}$ t.c. $P_{\Gamma_k} \to P$, la (1.9.7) implica $N_{\Gamma_k} = P_{\Gamma_k} - f(b) + f(a) \to P - f(b) + f(a) = N$, e, si ha $P - N = f(b) - f(a)$. Inoltre, dal Passo 1, $V \geq P_{\Gamma_k} + N_{\Gamma_k} \to P + N$, e, quindi, $V = P + N$.

□

Adesso, siamo pronti per i risultati principali.

1.9.12. Teorema (di Jordan) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Allora:*

$$f \in BV([a,b]) \Leftrightarrow f = f_1 - f_2, \quad \textit{con } f_j \textit{ limitata, crescente.}$$

Dimostrazione: L'implicazione ($\Longleftarrow$) è banale dato che $f_j \in BV([a,b])$ e $BV([a,b])$ è uno spazio vettoriale. Per l'implicazione ($\Longrightarrow$), basta identificare f_1, f_2. Si parte osservando

$$f \in BV([a,b]) \Longrightarrow f \in BV([a,x]) \;\text{ per ogni } x \in [a,b],$$

ed, in particolare sono ben definiti le funzioni

$$P(x) := P[f;a,x] \;\text{ e }\; N(x) := N[f;a,x], \quad x \in [a,b].$$

Inoltre, è chiaro che $P(x), N(x)$ sono crescenti in x e limitate da $P[f;a,b], N[f;a,b] < +\infty$. Applicando il Lemma 1.9.11 su ogni intervallo $[a,x]$ fornisce

$$P(x) - N(x) = f(x) - f(a),$$

e, quindi si pone $f_1(x) := P(x) + f(a)$ e $f_2(x) := N(x)$. □.

Da questo Teorema insieme ai risultati sulle funzioni monotone, abbiamo due corollari facili, ma importanti.

1.9.13. Corollario: *Sia* $f \in BV([a,b])$. *Allora*

(a) $f'(x)$ *esiste per q.o.* $x \in [a,b]$.

(b) $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$.

Dimostrazione: Basta applicare Teorema 1.9.12 e Corollario 1.8.5. □

Usando il fatto $\mathrm{Lip}([a,b]) \subset BV([a,b])$, abbiamo anche il seguente risultato.

1.9.14. Corollario (Teorema di Rademacher) *Sia* $f \in \mathrm{Lip}([a,b])$. *Allora*

(a) $f'(x)$ *esiste per q.o.* $x \in [a,b]$.

(b) $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$.

Concludiamo questo paragrafo con qualche osservazione e qualche esercizio. La prima osservazione è che il Teorema di Rademacher si generalizza a $\mathbb{R}^n$ nel modo seguente: *Sia* $f \in \mathrm{Lip})_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Allora* f *è differenziabile per q.o.* $x \in \mathbb{R}^n$ (vedi Cap. 3 di Evans-Gareipy [2], per esempio). La seconda osservazione è che si generalizza il concetto di funzioni di variazione limitata anche in $\mathbb{R}^n$ (vedi Cap. 5 di Evans-Gareipy [2], per esempio). In particolare, per ogni $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, si dice che $f \in \mathcal{L}^1(U)$ *ha variazione limitata in* U se esiste finito

$$\sup\left\{\int_U f \operatorname{div}\varphi\, dx : \quad \varphi \in C_0^1(U;\mathbb{R}^n), |\varphi| \le 1\right\} < +\infty.$$

Nel caso unidimensionale, uno può dire che $f \in \mathcal{L}^1((a,b))$ è $BV((a,b))$ se

$$\sup\left\{\int_a^b f\varphi'\,dx: \quad \varphi\in C_0^1((a,b);\mathbb{R}), |\varphi|\le 1\right\}<+\infty.$$

Usando un linguaggio fuori dal scopo di questo corso, si può dire che $f\in\mathcal{L}^1((a,b))$ e la sua *derivata in senso debole (nel senso delle distribuzioni)* è un funzionale lineare e continua su $C_0^1((a,b))$. Più precisamente, f' è una *misura di variazione finita*.

1.9.15. Esercizio: Siano $p,q>0$ e

$$f(x)=\begin{cases} x^p\sin(x^{-q}) & \text{se } 0<x\le 1\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Mostrare che $f\in BV([0,1])$ se e solo se $p>q$.

1.10 Funzioni assolutamente continua: lo spazio $AC([a,b])$

L'obiettivo principale di questo paragrafo è di trovare ipotesi necessarie e sufficienti su $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ affinchè abbiamo il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

$$\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a),$$

dove l'integrale è l'integrale di Lebesgue. Abbiamo visto che anche se entrambi membri della formula sono ben definiti, possiamo avere una disuguaglianza stretta. In particolare, questo può capitare anche se f è continua e monotona (oppure BV). Il controesempio prototipo abbiamo già nominato, cioè la funzione di Cantor-Lebesgue. Per completezza, facciamo un breve ricordo di come si costruisce la funzione.

1.10.1 Controesempio (La funzione di Cantor-Lebesgue):

<u>Passo 1:</u> *Costruzione dell'insieme di Cantor $\mathcal{C}$*

1. Sia $I=[0,1]$. Si divide I in tre pezzi uguali $I=[0,1/3]\cup[1/3,2/3]\cup[2/3]$ e si elimina l'interno del terzo in mezzo, ponendo $\mathcal{C}_1:=I\setminus(1/3,2,3)=[0,1/3]\cup[2/3,1]$.
2. Si ripete la costruzione di eliminazione degli interni dei terzi in mezzo dal passo precedente. Al passo k, uno ha un insieme chiuso $\mathcal{C}_k$ formato da 2^k intervalli, chiusi, disgiunti, di misura 3^{-k}, ed equidistribuiti.
3. Si definisce $\mathcal{C}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_k$.

L'insieme $\mathcal{C}$ è chiuso, perfetto (consiste in soli punti limite), è misurabile con misura nulla ($|\mathcal{C}_k|=2^k/3^k$).

<u>Passo 2:</u> *Costruzione della "scala del diavolo" f.*

1. Sia
$$D_k=I\setminus\mathcal{C}_k=\bigcup_{j=1}^{2^k-1}I_j^k$$
gli 2^k-1 intervalli aperti eliminati dai primi k passi. Si ordina gli intervalli con l'indice j da sinistra a destra.

2. Si definisce una successione di funzioni $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ come il prolungamento continuo e lineare a tratti della funzione definita così su $D_k \cup \{0,1\}$:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ j2^{-k} & x \in I_j^k \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Si ha che ogni f_k è continua, crescente, e $f_{k+1} = f_k$ su D_k. Inoltre, si ha la stima

$$|f_k(x) - f_{k-1}(x)| \leq 2^{-k}, \quad \forall\, x \in [0,1], \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Quindi, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|$ converge uniformemente su $[0,1]$, e, di conseguenza la successione f_k converge uniformemente ad una funzione (continua) f. La funzione limite soddisfa:

(i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, crescente

(ii) $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$

(iii) f è costante su $I \setminus \mathcal{C}$, un insieme di misura piena.

Quindi: La funzione di Cantor-Lebesgue è continua, monotona, e quindi differenziabile q.o., con derivata nulla q.o., ma, con incremento totale $f(1) - f(0) = 1$.

Adesso, introduciamo lo spazio idoneo per nostra discussione.

1.10.2. Definizione: *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dice* f è assolutamente continua su $[a,b]$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\epsilon)$ t.c. per ogni collezione al più numerabile $\{[a_i, b_i] : (a_i, b_i) \text{ disgiunti}\}$ si ha

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \Longrightarrow \sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

In tal caso, si scrive $f \in AC([a,b])$.

N.B. $f \in AC([a,b]) \Longrightarrow f \in UC([a,b])$ (uniformemente continua su $[a,b]$). Infatti, basta prendere un intervallo nella definizione.

1.10.3. Esempio: $f \in \mathrm{Lip}([a,b]) \Longrightarrow f \in AC([a,b])$

Infatti, $\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_i L(b_i - a_i) < L\delta < \epsilon$, se $\delta < \epsilon/L$.

1.10.4. Esempio (integrali indefiniti): Sia $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Allora $F \in AC([a,b])$ dove $F(x) := \int_a^x f(y)\, dy$.

Infatti, si ha

$$F(b_i) - F(a_i) = \int_{a_i}^{b_i} f(y)\, dy,$$

e, quindi

$$\sum_i |F(b_i) - F(a_i)| \leq \sum_i \int_{a_i}^{b_i} |f(y)|\, dy = \int_{E := \bigcup_i (a_i, b_i)} |f(y)|\, dy.$$

Adesso, usiamo il fatto che F è assolutamente continua come una funzione di insiemi (Teorema 1.2.9); cioè se $|E| \to 0$ allora $F(E) \to 0$.

Questo esempio dice che gli integrali indefiniti sono assolutamente continue. il risultato principale è che vale il contrario. Prima, ci serve qualche risultato preliminare.

1.10.5. Proposizione: $AC([a,b]) \subset BV([a,b])$

Dimostrazione: Sia $f \in AC([a,b])$.

1. Sia $\delta = \delta(1)$ nella Definizione 1.10.2; cioè, $\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < 1$ per ogni collezione al più numerabile di intervalli con interni disgiunti t.c. $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$.

2. Per ogni $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ t.c. $\beta - \alpha < \delta$ abbiamo $V[f; \alpha, \beta] < 1$. Infatti, per ogni partizione $\Gamma\{\alpha = \alpha_0 < \cdots \alpha_n = \beta\}$ abbiamo
$$V_\Gamma[f; \alpha, \beta] = \sum_{k=1}^{N} |f(\alpha_k) - f(\alpha_{k-1})| < 1$$

3. Dividiamo $[a,b]$ in $M = M(\delta)$ intervalli $\{I_j\}_{j=1}^M$ di ampiezza minore di δ, e abbiamo $V[f; a, b] = \sum_{j=1}^M V[f; I_j] < M$.

$\square$

N.B. È essenziale $[a,b]$ limitato; per esempio, $f(x) = x$ definisce una funzione in $AC([a, +\infty)]$, ma $f \notin BV([a, +\infty))$.

1.10.6. Proposizione: *Sia $f \in AC([a,b])$ t.c. $f' = 0$ quasi ovunque. Allora f è costante.*

N.B. Prima di fare la dimostrazione, vogliamo notare:

1. $f \in AC([a,b]) \subset BV([a,b]) \Longrightarrow f'$ esiste quasi ovunque
2. Se, invece, $f \in BV([a,b]) \cap C^0([a,b])$, la tesi è falsa in generale (Esempio 1.10.1).

Dimostrazione: Di nuovo, usiamo il Lemma di Vitali. Più precisamente:

1. Basta mostrare che $f(a) = f(b)$. Infatti, se f ha valori uguali agli estremi, essendo che la restrizione di f ad ogni $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ è $AC([\alpha, \beta]$, si trova $f(\alpha) = f(\beta)$ per ogni $\alpha < \beta \in [a,b]$.

2. Sia $E = \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\}$, e abbiamo $|E| = b - a$. Fissati $\epsilon > 0, x \in E$ esiste $h^* = h^*(\epsilon, x)$ t.c. per ogni $h \leq h^*$:

   (i) $[x, x+h] \subset (a,b)$
   (ii) $|f(x+h) - f(x)| < \epsilon h$.

   Sia $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ nella definizione di f assolutamente continua; cioè $|\bigcup_i (a_i, b_i)| < \delta \Longrightarrow \sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$.

3. Abbiamo così un ricoprimento nel senso di Vitali di E con intervalli $I = [x, x+h]$ per cui valgono **(i)** e **(ii)**. Per il Lemma di Vitali, associato a $\delta = \delta(\epsilon)$, esiste una collezione $\{[x_j, x_j + h_j]\}_{j=1}^N$ di intervalli disguinti t.c.

   (iii) $|f(x_j + h_j) - f(x_j)| < \epsilon h_j$
   (iv) $\sum_{j=1}^N |I_j| = \sum_{j=1}^N h_j > |E|_e - \delta = (b-a) - \delta$.

   Sommando la **(ii)**, si trova
$$\sum_{j=1}^{N} |f(x_j + h_j) - f(x_j)| < \epsilon \sum_{j=1}^{N} h_j \leq \epsilon(b-a).$$

4. Per il complemento $R := (a, b) \setminus \left[\bigcup_{j=1}^N I_j\right]$, abbiamo $|R| < \delta$, e $R = \bigcup_{i=1}^M J_i = \bigcup_{i=1}^M (\alpha_i, \beta_i)$. Quindi, abbiamo $\sum_{i=1}^M |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon$, e, di conseguenza
$$\sum_{i=1}^M |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| + \sum_{j=1}^N |f(x_j + h_j) - f(x_j)| < \epsilon + \epsilon(b - a).$$
Quindi, $|f(b) - f(a)| < \epsilon(1 + b - a)$, con $\epsilon > 0$ arbitrario.

□

Adesso, siamo pronti per il risultato principale del paragrafo: il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per L'integrale di Lebesgue.

1.10.7. Teorema: *Sia $F[a, b] \to \mathbb{R}$. Allora $F \in AC([a, b])$ se e solo se valgono:*

(i) *Esiste $F'(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$.*

(ii) $F' \in \mathcal{L}^1([a, b])$.

(iii) $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)\, dy$ *per ogni* $x \in [a, b]$.

Cioè, F è assolutamente continua in $[a, b]$ se e solo se F è una funzione integrale associato ad una funzione $f = F' \in \mathcal{L}^1([a, b])$.

Dimostrazione: L'implicazione ($\Longleftarrow$) è già fatta; cioè $G(x) := \int_a^x F'(y)\, dy \in AC([a, b])$, e, quindi $F(x) = F(a) + G(x) \in AC([a, b])$. Per l'altra implicazione ($\Longrightarrow$):

1. $F \in AC([a, b]) \Longrightarrow F \in BV([a, b])$, e, quindi, $F'(x)$ esiste per quasi ogni $x \in [a, b]$ con $F' \in \mathcal{L}^1([a, b])$; cioè valgono **(i)** e **(ii)**.

2. La funzione $G(x) := \int_a^x F'(y)\, dy \in AC([a, b])$ con $F' \in \mathcal{L}^1([a, b])$. Quindi, per il Teorema di Differenziazione di Lebesgue, esiste $G'(x) = F'(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$. Allora, $H(x) := F(x) - G(x)$ è assolutamente continua con derivata nulla quasi ovunque, e, quindi, per Proposizione 1.10.6, H è costante dove $H(a) = F(a)$.

□

Concludiamo con qualche esercizio.

1.10.8. Esercizio: Usando la definizione, mostrare che la funzione di Cantor-Lebesgue definita in Controesempio 1.10.1 **non** è assolutamente continua.

1.10.9. Esercizio Siano $F, G \in AC([a, b])$.

(a) Mostrare che $FG \in AC([a, b])$ e vale la seguente formula di *integrazione per parti*
$$\int_a^b F'(x)G(x)\, dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b G'(x)F(x)\, dx$$

(b) Dedurre che per $f \in \mathcal{L}([a, b])$ si ha
$$\int_a^b f(x)G(x)\, dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b G'(x)F(x)\, dx$$
dove F è una qualsiasi primitiva di f.

1.11 Funzioni convesse su $\mathbb{R}$ e la disuguaglianza di Jensen

In questo paragrafo, vogliamo dare qualche applicazione della teoria sviluppata nei paragrafi precedenti al problema della regolarità delle funzioni convesse. Inoltre, vogliamo esaminare una famiglia di disuguaglianze che sarà molto utile nello studio degli spazi L^p del prossimo capitolo. Cominciamo con un ricordo sulla definizione di base.

1.11.1. Definizione: *Una funzione $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ si chiama convessa se per ogni $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ si ha*

$$\varphi(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1 - t)\varphi(x_2), \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{1.11.1}$$

Cioè, φ è convessa se e solo se il segmento $[P_1, P_2] = [(x_1, \varphi(x_1)), (x_2, \varphi(x_2))]$ è al di sopra il grafico di φ su ogni sotto-intervallo $[x_1, x_2]$.

N.B.

1. φ si chiama *strettamente convessa* se c'è $<$ al posto di $\leq$ per ogni $t \in (0, 1)$.
2. φ è *concava* se $-\varphi$ è convessa
3. φ è convessa $\iff$ $\forall\ a < x_1 < x_2 < b$, $\forall\ t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 + t_2 > 0$

$$\varphi\left(\frac{t_1x_1 + t_2x_2}{t_1 + t_2}\right) \leq \frac{t_1\varphi(x_1) + t_2\varphi(x_2)}{t_1 + t_2} \tag{1.11.2}$$

Infatti, ponendo $t := t_1/(t_1 + t_2)$, si ha $(1 - t) = t_2/(t_1 + t_2)$ e (1.11.2) diventa (1.11.1).

1.11.3. Teorema (Disuguaglianza di Jensen - Versione Discreta) *Sia $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa. Siano $\{x_j\}_{j=1}^N$ e $\{t_j\}_{j=1}^N$ t.c.*

$$x_j \in (a, b), \quad t_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N t_j > 0.$$

Allora:

$$\varphi\left(\frac{\sum_{j=1}^N t_jx_j}{\sum_{j=1}^N t_t}\right) \leq \frac{\sum_{j=1}^N t_j\varphi(x_j)}{\sum_{j=1}^N t_j}, \qquad \text{dove} \quad \frac{\sum_{j=1}^N t_jx_j}{\sum_{j=1}^N t_j} \in (a, b). \tag{1.11.3}$$

Si nota che (1.11.3) è la generalizzazione di (1.11.2) ad $N \geq 2$. Infatti, la dimostrazione è per induzione in $N \geq 2$. La lasciamo per esercizio. (I dettagli si possono trovare in Fusco-Marcellini-Sbordone [5] - Paragrafo 39).

1.11.4. Esempi:

(a) Nel caso $t_j = 1/N$ per $j = 1, \dots, N$, abbiamo $\bar{x} = \left(\sum_{j=1}^N x_j\right)/N \in (a, b)$, la *media aritmetica* dei x_j, e la Disuguaglianza di Jensen dice

$$\varphi(\bar{x}) \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \varphi(x_j),$$

ovvero, φ della media aritmetica dei x_j è minore o uguale della media aritmetica dei $\varphi(x_j)$.

(b) Nel caso $t_j \geq 0$ con $\sum_{j=1}^{N} t_i = 1$, abbiamo una *combinazione lineare convessa* $\sum_{j=1}^{N} t_j x_j \in (a,b)$ e

$$\varphi(\sum_{j=1}^{N} t_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{N} t_j \varphi(x_j),$$

ovvero, φ di una combinazione lineare convessa di x_j è minore o uguale della combinazione lineare convessa dei valori di φ.

1.11.5. Esercizio: Mostrare che l'insieme delle funzioni convesse su (a,b) è un cono convesso chiuso. Cioè:

(a) φ_1, φ_2 convesse implica $t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2$ è convessa dove $t_k \geq 0, t_1 + t_2 = 1$.

(b) φ convessa e $\alpha > 0$ implica $\alpha\varphi$ convessa.

(c) $\{\varphi_k\}$ convesse, $\varphi_k \to \varphi$ implica φ è convessa.

1.11.6. Osservazione: *Come abbiamo visto in Analisi III, tutto funziona anche per* $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se* A *è un* insieme convesso*; cioè,*

$$\forall\ x_1, x_2 \in A \quad [x_1, x_2] \subset A,$$

usando esattamente la formula (1.11.1) *per definire* φ *convessa.*

1.11.7. Osservazione (Test di convessità): *Da Analisi I, sappiamo che* $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ *è convessa se vale una delle seguenti proprietà:*

1. $\exists\ \varphi' : (a,b) \to \mathbb{R}$ *con* φ' *crescente.*
2. $\exists\ \varphi'' : (a,b) \to \mathbb{R}$ *con* $\varphi'' \geq 0$.

Ci sono delle generalizzazioni al caso $A \subset \mathbb{R}^n$ *(Analisi III).*

Sulle base di questi criteri si verifica facilmente che le funzioni definite da x^p con $p \geq 1$, $e^{\alpha x}$ con $\alpha \geq 0$, $\ln(1/x) = -\ln x$ sono convesse sul loro domini. Adesso, cominciamo a studiare la questione della regolarità delle funzioni convesse, nel caso unidimensionale.

1.11.8. Proposizione: *Sia* $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ *convessa. Allora:*

(a) $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ *è continua su* (a,b).

(b) *Esistono finite* $D^{\pm}\varphi(x)$ *le derivate destra/sinsista per ogni* $x \in (a,b)$.

(c) *Esiste finita* $\varphi'(x)$ *per ogni* $x \in (a,b) \setminus E$*, dove* E *è al più numerabile.*

(d) $\varphi'(x)$ *è crescente sul suo dominio.*

N.B. Abbiamo usato gli stessi simboli $D^{\pm}$ che abbiamo usato per i numeri di Dini (Definizione 1.8.1). Qui, D^+ esiste vuol dire che esistono e sono uguali due dei numeri di Dini (D^+ e D_+), ad esempio. Forse, sarebbe stato meglio usare $\varphi'(x^{\pm})$ qui.

Dimostrazione:

1. Si nota che il rapporto incrementale $\Delta_h\varphi(x)$è una funzione decrescente in h per $h \downarrow 0$; cioè
$$0 < h_1 \leq h_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\varphi(x+h_1)-\varphi(x)}{h_1} \leq \frac{\varphi(x+h_2)-\varphi(x)}{h_2}.$$
Infatti, moltiplicando questa disuguaglianza per h_1h_2, si vede che è la (1.11.1) per $t := h_1/h_2$ e $(1-t) = (h_2-h_1)/h_2$.

2. Allora, per ogni $x \in (a,b)$, per la monotonia esistono
$$D^+\varphi(x) = \lim_{h\to 0^+} \Delta_h\varphi(x) = \inf_{h>0} \Delta_h\varphi(x) < +\infty$$
$$D^-\varphi(x) = \lim_{h\to 0^+} \Delta_{-h}\varphi(x) = \sup_{h>0} \Delta_{-h}\varphi(x) > -\infty.$$

3. Abbiamo
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h} \leq \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \quad \text{per ogni } x \in (a,b),\ h > 0,$$
e quindi calcolando il limite per $h \downarrow 0$ abbiamo $-\infty < D^-\varphi(x) \leq D^+\varphi(x) < +\infty$, ovvero, esistono finiti $D^\pm\varphi(x)$ per ogni $x \in (a,b)$; cioè abbiamo la parte **(b)**.

4. Abbiamo anche $\varphi(x \pm h) \to \varphi(x)$ per $h \downarrow 0$; cioè la parte **(a)**.

5. Affermiamo che: $D^+\varphi(y) \leq D^-\varphi(x)$ se $a < y < x < b$. Infatti
$$D^+\varphi(y) := \inf_{x>y} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq \sup_{y<x} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} := D^-\varphi(x).$$

6. Quindi, $D^\pm\varphi(x)$ sono crescente, perchè, ad esempio, per ogni $y < x$, $D^+\varphi(y) \leq D^-\varphi(x) \leq D^+\varphi(x)$ per il passo 5 e il passo 3. Il caso di $D^- \nearrow$ è analogo.

7. Essendo $D^\pm\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ monotone, hanno al più un numero numerabile di discontinuità (di tipo salto). Ad ogni punto $x \in (a,b)$ di continuità di $D^+\varphi$ abbiamo, usando passo 6
$$D^+\varphi(x) = \lim_{y\uparrow x} D^+\varphi(y) \leq D^-\varphi(x) \leq D^+\varphi(x),$$
e, quindi, φ è differenziabile sull'insieme di punti di continuità di $D^+\varphi$. Questa implica la **(c)** e, quindi, anche la **(c)** per $D^+\varphi$. L'argomento per D^- è analogo.

1.11.9. Proposizione: *Sia* $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ *convessa. Allora, per ogni* $[x_1,x_2] \subset (a,b)$*, si ha* $\varphi_{|\,[x_1,x_2]} \in \mathrm{Lip}([x_1,x_2])$ *e vale*
$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(y)\,dy. \tag{1.11.4}$$

Dimostrazione: Sia $[x_1,x_2] \subset (a,b)$. Allora, per $x_1 \leq y < x \leq x_2$ abbiamo visto che:
$$D^+\varphi(y) \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq D^-\varphi(x).$$
Ma, $D^\pm$ sono crescenti, e, quindi,
$$D^+\varphi(x_1) \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq D^-\varphi(x_2).$$

Combinando queste due disuguaglianze, si trova $\varphi_{|\,[x_1,x_2]} \in \mathrm{Lip}([x_1,x_2])$; infatti

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \max\{D^+\varphi(x_1), D^-\varphi(x_2)\}(x-y) := L(x-y).$$

Segue la formula (1.11.4), essendo φ Lipschitz, e, quindi, assolutamente continua, su $[x_1,x_2]$.

L'ultimo obiettivo di questo paragrafo è una versione integrale della disuguaglianza di Jensen. Prima, ci serve due ultime considerazioni.

1.11.10. Definizione: *Sia $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ convessa. Si chiama linea di supporto per φ in x_0 una retta che passa per $(x_0,\varphi(x_0))$ che sta sempre sotto il grafico di φ.*

Notiamo che basta prendere $l(x)=\varphi(x_0)+m(x-x_0)$ per ogni m t.c.

$$D^-\varphi(x_0)\leq m\leq D^+\varphi(x_0).$$

In particolare, $m=\varphi'(x_0)$ nel caso φ differenziabile in x_0.
Come ultima premessa, ricordiamo (da Analisi IV) che se $A\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $g\in\mathcal{L}^1(A)$ con $g\geq 0$ allora possiamo definire una *misura* su $\mathcal{M}(A)$ tramite

$$\mu(E) := \int_E g(x)\,dx := \int_E d\mu, \quad E\in\mathcal{M}(A). \tag{1.11.5}$$

1.11.11. Teorema (Disuguaglianza di Jensen - Versione Integrale) *Siano $f,g:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ con $A\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ t.c.*

(i) *f,g misurabili*

(ii) *$fg, g\in\mathcal{L}^1(A)$*

(iii) *$g\geq 0, \int_A g(x)\,dx>0$*

Se $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ convessa con $f(A)\subset(a,b)$, allora:

$$\varphi\left(\frac{\int_A fg(x)\,dx}{\int_A g(x)\,dx}\right) \leq \frac{\int_A(\varphi\circ f)(x)g(x)\,dx}{\int_A g(x)\,dx}. \tag{1.11.6}$$

N.B. Prima della dimostrazione, è utile fare qualche commento:

1. Scrivendo $d\mu = g(x)\,dx$ e usando (1.11.5), la tesi prende la forma:

$$\varphi\left(\frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)}\right) \leq \frac{\int_A(\varphi\circ f)(x)\,d\mu}{\mu(A)}, \tag{1.11.7}$$

   cioè φ della media integrale di f rispetto alla misura μ è dominata dalla media integrale rispetto alla misura μ di $\varphi\circ f$. L'ipotesi $g\in\mathcal{L}^1(A)$ significa $\mu(A)<+\infty$ e l'ipotesi $fg\in\mathcal{L}^1(A)$ significa $f\in\mathcal{L}^1(A,d\mu)$. Quindi, si può dire enunciare il Teorema così: *Sia $f\in\mathcal{L}^1(A,d\mu)$ con $0<\mu(A)<+\infty$. Per ogni φ convessa su $(a,b)\supset f(A)$ vale* (1.11.7).

2. In particolare, nel caso $g\equiv 1$ e $0<|A|<+\infty$ si ha:

$$\varphi\left(\frac{\int_A f\,dx}{|A|}\right) \leq \frac{\int_A(\varphi\circ f)(x)\,dx}{|A|}, \tag{1.11.8}$$

   per ogni $f\in\mathcal{L}^1(A)$ e φ convessa su $(a,b)\supset f(A)$

Dimostrazione del Teorema 1.11.11: Abbiamo $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ con $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ convessa e $a < f(x) < b$ per ogni $x \in A$. Poniamo

$$\gamma := \frac{\int_A f\, d\mu}{\mu(A)}.$$

Allora, abbiamo $a < \gamma < b$ perchè

$$a\mu(A) < \int_A f\, d\mu < b\mu(A).$$

Chiamando m la pendenza di una linea di supporto per la funzione convessa φ nel punto $\gamma \in (a,b)$, si ha

$$\varphi(\gamma) + m(t-\gamma) \leq \varphi(t), \quad a < t < b.$$

Quindi, per ogni $x \in A$ abbiamo

$$\varphi(\gamma) + m(f(x) - \gamma) \leq \varphi(f(x)).$$

Si può integrare questa disuguaglianza su A perchè f è misurabile e quindi anche la composizione $\varphi \circ f$ lo è (φ è continua per Proposizione 1.11.8). Quindi, si trova

$$\varphi(\gamma)\mu(A) + m\left[\int_A f\, d\mu - \gamma\mu(A)\right] \leq \int_A (\varphi \circ f)\, d\mu,$$

ma, l'espressione $\int_A f\, d\mu - \gamma\mu(A)$ è nulla per la definizione di γ. $\square$

Capitolo 2

Spazi L^p.

In questo Capitolo, vogliamo studiare una classe importante di spazi funzionali, gli spazi L^p. Questi spazi sono caratterizzati da proprietà di sommabilità o limitatezza e quindi sono legato ai modi più naturali per misurare la grandezza di una funzione data. Tali spazi anche forniscono un modo naturale di parlare della vicinanza di funzioni; cioè generano diverse topologie in spazi di funzioni. La presenza degli spazi L^p è omnipresente nell'analisi superiore. Il caso particolare di $p = 1$ è stato brevemente introdotto in Analisi IV e certi aspetti astratti di spazi funzionali sarà il punto principale di Analisi Funzionale I. Il nostro obiettivo è di fornire, in modo sistematico, le definizioni e proprietà di base di tali spazi, sfruttando la loro rappresentazione concreta. Lavoriamo esclusivamente nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, ma una grande parte della teoria si estende al contesto di spazi di misura qualsiasi (vedi le referenze nella bibliografia) o di varietà con un minimo di regolarità (vedi il libro di Taylor [10]).

2.1 Gli spazi $\mathcal{L}^p(E)$.

Cominciamo subito di identificare i protagonisti del nostro studio. Nel seguito, denotiamo con

$$\text{mis}(E, \mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R};\quad f \text{ misurabile}\}, \tag{2.1.1}$$

per $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

2.1.1. Definizione: *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $p \in (0, +\infty)$. Lo spazio delle funzioni p-sommabili su E è*

$$\mathcal{L}^p(E) := \{f \in \text{mis}(E, \mathbb{R}) : \quad \int_E |f|^p\, dx < +\infty\} \tag{2.1.2}$$

Denotiamo anche

$$||f||_p := ||f||_{p,E} := \left(\int_E |f|^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{2.1.3}$$

N.B. Sulla definizione, si può notare:

1. Il caso $|E| = 0$ è banale. Infatti, in tal caso, si ha $\mathcal{L}^p(E) = \text{mis}(E, \mathbb{R})$ e $||f||_p = 0$ per ogni f. Quindi, da adesso in poi, intendiamo sempre $|E| > 0$.

2. Ha senso definire anche $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{C}) := \{f \in \text{mis}(E, \mathbb{C}) : \quad ||f||_p < +\infty\}$. Usando la rappresentazione $f = f_1 + if_2$, si sa $|f|^2 = f_1^2 + f_2^2$, e, quindi

   $$|f_j| \leq |f| \leq |f_j|, \quad j = 1, 2.$$

   Quindi, $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{C}) \iff f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{R})$.

3. Dato qualsiasi *spazio di misura* $(X, \mu, \mathcal{M})$, ha senso definire anche $\mathcal{L}^p(E, d\mu)$ per $E \in \mathcal{M}(X)$.

2.1.2. Esercizio: Sia $f(x) = ||x||^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$. Trovare α per cui $f \in \mathcal{L}^p(E)$ nei casi

(a) $E = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$

(b) $E = \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$

Abbiamo bisogno anche del "caso limite" $p = \infty$ che è legato alla proprietà di limitatezza. Più precisamente, ci serve un concetto di limitatezza compatibile con il bisogno (e la necessità) di trascurare gli insiemi di misura nulla.

2.1.3. Definizione: *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$. Si chiama estremo superiore essenziale di f il numero*

$$\operatorname{ess\,sup}_E f := \inf \{\alpha \in \mathbb{R} : \ |\{x \in E : \ f(x) > \alpha\}| = 0\} \tag{2.1.4}$$

Diciamo che f è essenzialmente limitata superiormente se e solo se $_E f < +\infty$.

N.B. Si vede facilmente:

1. $\operatorname{ess\,sup}_E f = +\infty \iff \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $|\{x \in E : \ f(x) > \alpha\}| > 0$.
2. Il caso di $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| = 0$ è di nuovo banale; tutte le funzioni misurabili f sono essenzialmente limitate superiormente su E con misura nulla e, in tal caso, $\operatorname{ess\,sup}_E f = -\infty$.
3. C'è una definizione analoga per $\operatorname{ess\,sup}_E f$, *l'estremo inferiore essenziale di f su E.*

Per cominciare di capire cosa significa questa definizione, notiamo che abbiamo ampliato lo spazio di funzioni limitate superiormente a quelli limitati superiormente fuori di un insieme di misura nulla.

2.1.4. Esempio: La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} n & x = 1/n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è essenzialmente limitata con $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} f = 0$, ma f non è limitata ($\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$).

Più precisamente, si ha la seguente caratterizzazione del estremo superiore essenziale.

2.1.5. Proposizione: *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

(a) *Per ogni $f \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$, si ha*

$$\operatorname{ess\,sup}_E f = \min \{M \in [-\infty, \infty] : \ f(x) \leq M, \text{ per } q.o.\ x \in E\}, \tag{2.1.5}$$

(b) *f è essenzialmente limitata superiormente $\iff$ esistono $M < +\infty$, e $Z \subset E$ con $|Z| = 0$ t.c. $f(x) \leq M$ per ogni $x \in E \setminus Z$.*

2.1.6. Esercizio: Mostrare Proposizione 2.1.5.

Adesso siamo pronti per il caso limite $p = \infty$.

2.1.7. Definizione: *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio delle funzioni* <u>*essenzialmente limitate*</u> *su E è*

$$\mathcal{L}^\infty(E) := \{f \in \text{mis}(E, \mathbb{R}) : \ \text{ess}\sup_E |f|\, dx < +\infty\} \tag{2.1.6}$$

Denotiamo anche

$$||f||_\infty := ||f||_{\infty,E} := \text{ess}\sup_E |f|. \tag{2.1.7}$$

N.B. Esattamente come nella Proposizione 2.1.5, si può affermare:

1. $||f||_\infty = \min\{M \in [0, +\infty] : \ |f(x)| \leq M \text{ q.o. in } E\}$
2. $f \in \mathcal{L}^\infty(E) \iff$ esistono $M < +\infty$, $Z \subset E$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in E \setminus Z$.

2.1.8. Esercizio: Mostrare le seguente affermazioni di uso comune:

$$||f||_{\infty,E} = \text{ess}\sup_E |f| \leq \sup_E |f|; \tag{2.1.8}$$

$$f \in \mathcal{L}^\infty(E) \Longrightarrow f(x) \leq ||f||_\infty \ \text{ per q.o. } x \in E. \tag{2.1.9}$$

Adesso, chiediamo quali sono le relazioni fra gli spazi $\mathcal{L}^p(E)$ e fra le "norme" $||\cdot||_p$ per le varie valori di p? La prima risposta dà un senso alla nostra affermazione che $\mathcal{L}^\infty(E)$ è un caso limite di $\mathcal{L}^p(E)$.

2.1.9. Proposizione: *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $0 < |E| < +\infty$. Allora*

$$||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p, \quad \forall\ f \in \text{mis}(E, \mathbb{R}).$$

Dimostrazione: Sia $M = ||f||_\infty \in [0, +\infty]$.

1. Il caso $M = 0$ è banale; se $f = 0$ quasi-ovunque, $||f||_p = 0$ per ogni $p \in (0, \infty]$. Quindi, possiamo assumere $M \in (0, +\infty]$.
2. Per ogni M' t.c. $0 < M' < M$ definiamo $A := \{x \in E : \ |f(x)| > M'\}$. Abbiamo $|A| > 0$ per la definizione di $||f||_\infty$ e $|A| \leq |E| < +\infty$ per ipotesi. Quindi, per ogni $p \in (0, \infty)$, abbiamo
$$||f||_p \geq \left(\int_A |f|^p\, dx\right)^{1/p} \geq M'|A|^{1/p} \to M', \quad \text{per} \quad p \to \infty.$$
Quindi,
$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq M', \quad \forall\ 0 < M' < M.$$
Quindi, si ha $\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq M$, e abbiamo il risultato nel caso $M = +\infty$
3. D'altra parte, se $M < +\infty$, usando $0 < |E| < +\infty$, abbiamo
$$||f||_p := \left(\int_E |f|^p\, dx\right)^{1/p} \leq M|E|^{1/p} \to M, \quad \text{per} \quad p \to \infty.$$
Quindi, si ha $\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq M$. Combinano le disuguaglianze sul limsup e liminf abbiamo il risultato nel caso $0 < M < +\infty$.

□

N.B. L'ipotesi $|E| < +\infty$ è essenziale. Per esempio, una funzione costante $f \equiv c$ su E di misura infinita avrà $||f||_\infty = c < +\infty = ||f||_p$ per ogni $p \in (0, \infty)$. Il risultato è falso se $|E| = 0$, perchè?

2.1.10. Proposizione: *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $0 < |E| < +\infty$. Allora*

$$0 < p_1 < p_2 \leq \infty \Longrightarrow \mathcal{L}^{p_2}(E) \subset \mathcal{L}^{p_1}(E).$$

Dimostrazione:

1. Per prima cosa, facciamo una decomposizione utile di $E = E_1 \cup E_2$ definendo
$$E_1 = \{x \in E : \ |f(x)| \leq 1\} \ \text{ e } \ E_2 = \{x \in E : \ |f(x)| > 1\}.$$
Per ogni $p \in (0, \infty)$ abbiamo
$$\int_E |f|^p \, dx \leq |E_1| + \int_{E_2} |f|^p \, dx,$$
dove l'integrale su E_2 è crescente in p.

2. Nel caso $p_1 < p_2 < +\infty$, abbiamo
$$\int_E |f|^{p_1} \, dx \leq |E_1| + \int_{E_2} |f|^{p_1} \, dx \leq |E_1| + \int_{E_2} |f|^{p_2} \, dx,$$
usando la monotonia in p. Quindi, abbiamo il risultato in questo caso.

3. Nel caso $p_1 < p_2 = \infty$, usiamo la stima $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ per q.o. $x \in E$. Quindi,
$$\int_E |f|^{p_1} \, dx \leq |E| \, ||f||_\infty^{p_1},$$
e, abbiamo il risultato anche in questo caso.

□

N.B. Si vede facilmente:

1. L'ipotesi $|E| < +\infty$ è essenziale; per esempio, ci sono controesempi del tipo:
   (a) $x^{-1/p_1} \in \mathcal{L}^{p_2}(1, +\infty)$ per ogni $p_2 > p_1$, ma non appartiene a $\mathcal{L}^{p_1}(1, +\infty)$.
   (b) $c \in \mathcal{L}^\infty(E) \setminus \mathcal{L}^p(E)$ per ogni $p \in (0, \infty)$ se $|E| = +\infty$ e la costante $c \neq 0$

2. Essendo $|E| > 0$, le inclusioni sono strette; cioè esistono $f \in \mathcal{L}^{p_1}(E)$ per ogni $p_1 < p_2$, ma $f \notin \mathcal{L}^{p_2}(E)$. Per esempio, sull'intervallo $E = (0, 1)$
   (a) $f(x) = x^{-1/p_2}$ con $p_2 < \infty$
   (b) $f(x) = \ln(1/x)$ con $p_2 = +\infty$

2.1.11. Esercizio: Via la disuguaglianza di Jensen mostrare: per ogni $p \in (1, \infty)$ e per ogni $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| < +\infty$, si ha

$$||f||_1 \leq |E|^{1-1/p} ||f||_p$$

e, quindi, $\mathcal{L}^p(E) \subset \mathcal{L}^1(E)$ di nuovo.

2.1.12. Proposizione: *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $p \in (0, \infty)$, lo spazio $\mathcal{L}^p(E)$ è uno spazio vettoriale; cioè*

(a) $cf \in \mathcal{L}^p(E)$ per ogni $f \in \mathcal{L}^p(E), c \in \mathbb{R}$

(b) $f + g \in \mathcal{L}^p(E)$ per ogni $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$.

Lasciamo la dimostrazione per esercizio, però con qualche aiuto.

1. I casi $p = 1, \infty$ sono facili. Si usa solo la definizione di $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_\infty$ e la disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$. L'argomento sarà fatto successivamente (Teorema 2.2.6).

2. Il caso $1 < p < \infty$ quando $|E| < +\infty$ può essere fatto integrando la versione discreta della disuguaglianza di Jensen (Teorema 1.11.3), partendo da
$$|f(x) + g(x)|^p = \left|\frac{1}{2}2f(x) + \frac{1}{2}2g(x)\right|^p \leq \dots.$$
Poi, si deve passare al caso generale per E misurabile. Sarà presentato, invece, un altro argomento che funzione direttamente su $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ qualsiasi (vedi Teorema 2.2.6).

3. Il caso $p \in (0, 1)$ si base sulla disuguaglianza: se $0 < p < 1$, allora $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ per ogni $a, b \geq 0$ (vedi Teorema 2.3.9).

2.2 Le disuguaglianze di Hölder e Minkowski

L'idea di questo paragrafo è di cercare di controllare $||fg||_p, ||f+g||_p$ per $f \in \mathcal{L}^{p_1}(E), g \in \mathcal{L}^{p_2}(E)$. In particolare, quali sono le relazioni fra p, p_1, p_2 che garantiscono $||fg||_p, ||f + g||_p < +\infty$?

2.2.1. Definizione: *Siano $p, q \in (0, \infty)$ Diciamo che p e q sono esponenti coniugati se $p+q = pq$, ovvero se*
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2.2.1}$$

N.B.

1. $1/p, 1/q > 0$ e hanno somma 1. Quindi, $1/p, 1/q < 1$, ovvero $p, q > 1$.

2. Ci sono i "casi limite", ovvero, $(p, q) = (1, \infty)$ e $(p, q) = (\infty, 1)$. Queste copie sono chiamate anche esponenti coniugati.

3. Spesso si denota
$$p' = q(p) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{p-1} \tag{2.2.2}$$
e si parla del *coniugato di Young di* $p \in [1, \infty]$.

2.2.2. Teorema (Disuguaglianza di Young): *Sia $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua e strettamente crescente t.c. $\varphi(0) = 0$. Sia $\psi = \varphi^{-1}$ la sua funzione inversa (essa anche continua e strettamente crescente). Allora, per ogni $a, b \geq 0$ si ha*
$$ab \leq \int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_0^b \psi(y)\,dy, \tag{2.2.3}$$
con uguaglianza in (2.2.3) *se e solo se $b = \varphi(a)$.*

Dimostrazione: Si fa "per disegno", interpretando gli integrali di φ, ψ come area sotto il loro grafico.

2.2.3. Corollario: *Sia* $p \in (1, \infty)$ *e* $q = p' = p/(p-1) \in (1, \infty)$. *Allora*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall\, a, b \geq 0. \tag{2.2.4}$$

Dimostrazione: Si applica Teorema 2.2.2 con $\varphi(x) = x^\alpha$ e α opportuno. Si trova che la scelta $\alpha + 1 = p$ è quella giusta.

Adesso siamo pronti per i risultati principali di questo paragrafo. Nel seguito, anche se non viene specificato, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un insieme misurabile con $|E| > 0$.

2.2.4. Teorema (Disuguaglianza di Hölder) *Siano* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $q = p' = p/(p-1)$. *Allora per ogni* $f, g \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$ *si ha*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p\, ||g||_q, \tag{2.2.5}$$

N.B. Ci dice qualcosa solo nel caso $f \in \mathcal{L}^p(E)$ e $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$, e la conclusione in tal caso è $fg \in \mathcal{L}^1(E)$ con la disuguaglianza (2.2.5).

Dimostrazione: Ci sono tre casi:

<u>*Caso 1:*</u> Se $p = 1$, vogliamo mostrare

$$\int_E |fg|\, dx \leq \left[\int_E |f|\, dx\right] \operatorname{ess\,sup}_E |g| \tag{2.2.6}$$

ma questo è ovvio perchè se $|g(x)| \leq M = \operatorname{ess\,sup}|g|$ per ogni $x \in E \setminus Z$ con $|Z| = 0$, abbiamo

$$\int_E |fg|\, dx \leq M \int_{E\setminus Z} |f|\, dx \leq M \int_E |f|\, dx.$$

<u>*Caso 2:*</u> Se $p = \infty$, vogliamo mostrare

$$\int_E |fg|\, dx \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f| \left[\int_E |g|\, dx\right], \tag{2.2.7}$$

ma questo è caso 1, scambiando f per g.

<u>*Caso 3:*</u> Se $1 < p < \infty$, vogliamo mostrare

$$\int_E |fg|\, dx \leq \left[\int_E |f|^p\, dx\right]^{1/p} \left[\int_E |g|^{p'}\, dx\right]^{1/p'}, \tag{2.2.8}$$

integrando la disuguaglianza di Young (Corollario 2.2.3). In particolare:

1. Basta mostrare il caso $||f||_p = 1 = ||g||_{p'}$. Infatti, se $||f||_p = 0$ (oppure $||g||_{p'} = 0$), allora $f = 0$ q.o. in E (oppure $g = 0$ q.o. in E). Quindi, abbiamo (2.2.8) nella forma banale $0 \leq 0$. Se $||f||_p = +\infty$ (oppure $||g||_{p'} = \infty$), abbiamo (2.2.8) nella forma banale $||fg|| \leq +\infty$. Quindi, possiamo assumere che

   $$0 < ||f||_p, ||g||_{p'} < +\infty,$$

   e consideriamo i riscalamenti $\tilde{f} = f/||f||_p$ e $\tilde{g} = g/||g||_{p'}$. Se mostriamo

   $$||\tilde{f}\tilde{g}|| \leq ||\tilde{f}||_p\, ||\tilde{g}||_{p'} = 1,$$

   allora abbiamo la (2.2.8).

2. Con $a = |f|, b = |g|$ dove $||f||_p = 1 = ||g||_{p'}$, si integra (2.2.4) su E, trovando

$$\int_E |fg|\,dx = \int_E |f|\,|g|\,dx \le \int_E \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'}\right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

□

Nel caso "autoduale" di $p = q = 2$, abbiamo il seguente corollario di uso frequente.

2.2.5. Corollario (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Per ogni* $f, g \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$, *si ha*

$$\int_E |fg|\,dx \le \left[\int_E |f|^2\,dx\right]^{1/2} \left[\int_E |g|^2\,dx\right]^{1/2}. \tag{2.2.9}$$

Adesso esaminiamo la norma di una somma.

2.2.6. Teorema (Disuguaglianza di Minkowski) *Sia* $1 \le p \le \infty$. *Allora, per ogni* $f, g \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$, *si ha*

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p. \tag{2.2.10}$$

N.B. Di nuovo, ci dice qualcosa solo nel caso $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$, e , in tal caso, $f+g \in \mathcal{L}^p(E)$ con la disuguaglianza (2.2.10), che è la *disuguaglianza triangolare in* $\mathcal{L}^p(E)$.

Dimostrazione: Di nuovo, ci sono tre casi.

Caso 1: Se $p = 1$, vogliamo mostrare

$$\int_E |f+g|\,dx \le \int_E |f|\,dx + \int_E |g|\,dx, \tag{2.2.11}$$

ma questo è ovvio integrando la disuguaglianza triangolare $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ per ogni $x \in E$.

Caso 2: Se $p = \infty$, vogliamo mostrare

$$\operatorname{ess\,sup}_E|f+g| \le \operatorname{ess\,sup}_E|f| + \operatorname{ess\,sup}_E|g|, \tag{2.2.12}$$

ma questo è facile nel caso non banale di $||f||_\infty, ||g||_\infty < \infty$. Infatti, si ha

$$|f(x)| \le ||f||_\infty, \quad x \in E \setminus Z_1, \quad \text{con} \quad |Z_1| = 0,$$

$$|g(x)| \le ||g||_\infty, \quad x \in E \setminus Z_2, \quad \text{con} \quad |Z_2| = 0,$$

quindi, $|f(x) + g(x)| \le ||f||_\infty + ||g||_\infty$ per $x \in E \setminus Z$, dove $|Z| = |Z_1 \cup Z_2| = 0$.

Caso 3: Se $1 < p < \infty$, vogliamo mostrare

$$\left[\int_E |f+g|^p\,dx\right]^{1/p} \le \left[\int_E |f|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_E |g|^p\,dx\right]^{1/p}. \tag{2.2.13}$$

Si sfrutta la disuguaglianza di Hölder nel modo seguente

$$\begin{aligned} ||f+g||_p^p &= \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1}\, |f(x)+g(x)|\, dx \\ &\leq \int_E |f(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1}\, dx + \int_E |g(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1}\, dx \\ &\leq ||f||_p\, |||f+g|^{p-1}||_{p'} + ||g||_p\, |||f+g|^{p-1}||_{p'}, \end{aligned}$$

ma $p' = p/(p-1)$ e, quindi, $(p-1)p' = p$, perciò

$$||f+g||_p^p \leq ||f||_p\, ||f+g||_p^{p-1} + ||g||_p\, ||f+g||_p^{p-1}. \tag{2.2.14}$$

Se $||f+g||_p \neq 0$, cancelliamo il fattore di $||f+g||_p^{p-1}$ nella (2.2.14) per trovare (2.2.13). Se invece $||f+g||_p = 0$, la (2.2.13) è banale.

□

2.2.7. Osservazione (sui valori di p): *Nelle disuguaglianze di Hólder e Minkowski, si ha $1 \leq p \leq \infty$; in particolare:*

(a) Hölder *Ci serve $p \in [1, \infty]$ per definire l'esponente coniugato p'.*

(b) Minkowski *ci serve $p \in [1, \infty]$ per avere la convessità necessaria. Il risultato è falso, in generale, per $p \in (0, 1)$.*

2.2.8. Esempio: Siano $E = (0,1)$, $f = \chi_{(0,1/2)}$, e $g = \chi_{(1/2,1)}$. Allora, si vede $||f+g||_p = 1$ per ogni $p > 0$, ma $||f||_p = (1/2)^{1/p} = ||g||_p$ per $p \in (0, \infty)$. Quindi,

$$||f||_p + ||g||_p = 2^{1-1/p} < 1 = ||f+g||_p, \quad \text{se} \quad p \in (0,1).$$

Una conseguenza importante della disuguaglianza di Minkowski è il seguente corollario.

2.2.9. Corollario: *Siano $1 \leq p \leq \infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora $(\mathcal{L}^p(E), ||\cdot||_p)$ è uno spazio vettoriale semi-normato; cioè:*

(a) $||\cdot||_p : \mathcal{L}^p(E) \to [0, +\infty)$;

(b) $||cf||_p = c||f||_p, \quad \forall\, c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^p(E)$;

(c) $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p, \quad \forall\, f, g \in \mathcal{L}^p(E)$.

Ovviamente, manchiamo per poco la struttura di uno spazio normato perchè $||f||_p = 0$ implica solo $f = 0$ q.o. in E, non che f è identicamente nulla. Questo "difetto" dello spazio $\mathcal{L}^p(E)$ può essere rimediato passando a classe di equivalenza rispetto alla relazione di equivalenza naturale in questo contesto. Questo è uno dei punti principali del prossimo paragrafo. Proponiamo, in fine, esercizi su possibili generalizzazioni delle disuguaglianze di Hölder e Minkowski.

2.2.10. Esercizio (Disuguaglianza di Hölder generalizzata): *Siano $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Mostrare che, per ogni $f, g \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$, si ha*

$$||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Quindi, il prodotto definisce una mappa bilineare e continua da $\mathcal{L}^p(E) \times \mathcal{L}^q(E) \to \mathcal{L}^r(E)$.

2.2.11. Esercizio (Disuguaglianza di Minkowski - versione integrale) *Sia $1 \leq p < \infty$. Mostrare che, per ogni $f \in \mathrm{mis}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ t.c. $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_x)$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^m$, si ha*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^m} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\right|^p dy\right]^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p\, dy\right]^{1/p} dx$$

Quindi, se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n_x, \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m_y))$, allora F definita quasi ovunque da $F(y) = ||f(\cdot, y)||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ sta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m_y)$.

2.3 Gli spazi $L^p(E)$

Il punto di questo paragrafo è di mostrare che uno può fornire la struttura di uno spazio di Banach agli spazi $L^p(E)$ che sono le proiezioni degli spazi $\mathcal{L}^p(E)$ rispetto ad una opportuna relazione di equivalenza. Così, si può usare i vari bazooka dell'analisi funzionale associate a tali spazi.

2.3.1. Definizione: *Siano $f, g \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$. Diciamo che f è equivalente a g in $L^p(E)$, e scriviamo $f \sim g$, se $f = g$ q.o. in E; cioè se*

$$\exists Z \subset E: \quad |Z| = 0, \quad \text{e} \quad f(x) = g(x), \quad \forall\, x \in E \setminus Z.$$

2.3.2. Osservazione: *La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza su $\mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$; cioè:*

- **(i)** $f \sim f$;
- **(ii)** $f \sim g \Longrightarrow g \sim f$;
- **(iii)** $f \sim g, g \sim h \Longrightarrow f \sim h$.

Infatti, le proprietà (i)-(ii) seguono direttamente dalla definizione, e la (iii) segue facilmente ($Z_{f,h} \subset Z_{f,g} \cup Z_{g,h}$).

N.B. La restrizione di $\sim$ agli spazi $\mathcal{L}^p(E)$ è anche una relazione di equivalenza.

2.3.3. Definizione: *Siano $0 < p \leq \infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| > 0$. Si definisce*

$$L^p(E) := \mathcal{L}^p(E)/\sim \;:= \{F: \; F = [f] \;\text{ con }\; f \in \mathcal{L}^p(E)\}, \tag{2.3.1}$$

dove

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^p(E): \quad g \sim f\} = \{f + R: \quad R = 0 \;\text{ q.o. in } E\} \tag{2.3.2}$$

N.B. Spesso, si scrive lo stesso simbolo f sia per un elemento in $\mathcal{L}^P(E)$ sia per la classe di equivalenza $F = [f] \in L^p(E)$ determinata da f. Questo abuso di notazione è molto comodo. In realtà, quello che si fa, in pratica, è di fare un'identificazione:

$$L^p(E) \longleftrightarrow \begin{cases} \text{lo spazio dei rappresentanti } \mathcal{L}^p(E) \\ \text{la definizione di uguaglianza } f = g \text{ in } L^p(E) \Longleftrightarrow f \sim g \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Anche se in tanti libri, e nell'uso comune, non ci si sofferma molto su quest'identificazione, guardiamo una volta per tutte che cosa succede se si lavora esplicitamente al livello delle classe di equivalenza. Poi, dopo, usiamo anche noi l'identificazione (2.3.3), cercando di avere una buona miscela di flessibilità e rigore.

2.3.4. Proposizione: *Sullo spazio $L^p(E)$ sono ben definiti:*

(a) $||\cdot||_p :\quad ||F||_p := ||f||_p$ per ogni $f \in F$;

(b) $+ :\quad F + G := [f + g]$ per ogni $f \in F, g \in G$;

(c) $m_c :\quad cF := [cf],\quad c \in \mathbb{R}$, per ogni $f \in F$.

Dimostrazione: Per la **(a)**, dobbiamo verificare solo che $f \sim g \Longrightarrow ||f||_p = ||g||_p$, che è ovvio sia nel caso $p = \infty$ via la definzione di $\operatorname{ess\,sup}_E|f| = ||f||_{\infty,E}$ sia nel caso $p \in (0, \infty)$ usando le semi-norme integrali.
Per la **(b)**, notiamo inanzi tutto che $f, g \in \mathcal{L}^p(E) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{L}^p(E)$; per $p \in [1, \infty]$, questa è una conseguenza della disuguaglianza di Minkowski (Corollario 2.2.9), e, per $p \in (0, 1)$ sarà trattato nella dimostrazione del Teorema 2.3.9. Poi, si verifica facilmente che $f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2 \Longrightarrow f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$, ovvero, che la classe di equivalenza della somma è la somma delle classi di equivalenza. La proprietà **(c)** si mostra in modo analogo. □

2.3.5. Teorema: *Siano $1 \leq p \leq \infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora $(L^p(E), ||\cdot||_p)$ è uno spazio lineare normato.*

Dimostrazione: Nella dimostrazione di Proposizione 2.3.4, abbiamo già visto che $L^p(E)$ è uno spazio lineare. Inoltre, le proprietà delle norme si verificano facilmente.

1. Se $||F||_p = 0$ e $f \in F$, allora $||f||_p = 0$, e, quindi, $f \sim 0$, perciò $F = [f] = [0]$.
2. Per la disuguaglianza triangolare, abbiamo, grazie alla disuguaglianza di Minkowski sullo spazio delle rappresentati: se $f \in F, g \in G$
$$||F + G||_p := ||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p := ||F||_p + ||G||_p.$$
3. Finalmente, se $f \in F$, $||cF||_p := ||cf||_p = |c|\,||f||_p := |c|\,||F||_p$.

□

Adesso vogliamo parlare della convergenza di successioni. Per prima cosa, cosa si intende per una successione in $L^p(E)$? Data una successione di classi di equivalenza, $\{F_j\} \subset L^p(E)$, scegliamo un rappresentante, diciamo $f_j \in F_j$. Quindi, abbiamo $F_j = [f_j]$; cioè la j-esima classe è la classe del rappresentante j-esimo, e l'idea sarà di lavorare su una successione di rappresentanti, controllando che la convergenza non dipenda dai rappresentati scelti. Le definizioni, al livello delle classi in $L^p(E)$, sono esattamente quello che ci si aspetta dato il fatto che $L^p(E)$ è uno spazio normato.

2.3.6. Definizione: *Siano $\{F_j\}$ una successione in $L^p(E)$ e F una classe in $L^p(E)$.*

(a) *Diciamo che <u>F_j converge a F in $L^P(E)$</u> se $||F_j - F||_p \to 0$, per $j \to +\infty$.*

(b) *Diciamo che <u>$\{F_j\}$ è una successione di Cauchy in $L^p(E)$</u> se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $||F_j - F_k||_p < \epsilon$ per $j, k > N$.*

Adesso, guardiamo cosa succede in queste definizioni se scegliamo dei rappresentanti. Per le successioni di Cauchy, consideriamo una successione di rappresentanti $f_j \in F_j, j \in \mathbb{N}$. Allora, abbiamo
$$||F_j - F_k||_p = ||[f_j] - [f_k]||_p := ||[f_j - f_k]||_p := ||f_j - f_k||_p,$$
e si vede che $\{f_j\}$ è una successione di funzioni in $\mathcal{L}^p(E)$ che è una successione di Cauchy rispetto alla norma $||\cdot||_p$ in $L^p(E)$.

In modo analogo, se $F_j \to F$ in $L^p(E)$, e scegliendo dei rappresentanti $f_j, f \in \mathcal{L}^p(E)$, abbiamo

$$||F_j - F||_p := ||[f_j - f]||_p := ||f_j - f||_p,$$

e, quindi, la successione di rappresentanti per F_j converge al rappresentante di F rispetto alla norma $||\cdot||_p$ in $L^p(E)$. Quindi, convergenza di elementi in $L^p(E)$ vuol dire convergenza di ogni successione di rappresentanti.

2.3.7. Teorema: *Siano $1 \le p \le \infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| > 0$. Allora $(L^p(E), ||\cdot||_p)$ è uno spazio di Banach. In particolare, se $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^p(E)$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma $||\cdot||_p$ in $L^p(E)$, esiste $f \in \mathcal{L}^p(E)$ t.c. $||f_j - f||_p \to 0$ per $j \to +\infty$.*

Dimostrazione: Ci sono due casi.

Caso 1: $(p = \infty)$ Sia $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^\infty(E)$ una successione di Cauchy.

1. Esiste Z di misura nulla t.c.

$$|f_j(x) - f_k(x)| \le ||f_j - f_k||_\infty, \quad \forall\ x \in E \setminus Z. \tag{2.3.4}$$

   Infatti, dato che $f_j, f_k \in \mathcal{L}^\infty(E)$, abbiamo $f_j - f_k \in \mathcal{L}^\infty(E)$ e quindi esiste $Z_{j,k}$ di misura nulla t.c.

$$|f_j(x) - f_k(x)| \le ||f_j - f_k||_\infty, \quad \forall\ x \in E \setminus Z_{j,k}.$$

   Quindi, si ha (2.3.4) per $Z = \bigcup_{j,k\in\mathbb{N}} Z_{j,k}$, dove Z ha misura nulla.

2. Per ogni $x \in E \setminus Z$, esiste finito il limite $\lim f_j(x) := f(x)$. Infatti, $\{f_j\}$ è Cauchy in norma, e, quindi, per la stima di passo 1, $\{f_j(x)\}$ è Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $x \in E \setminus Z$, cioè: per ogni $\epsilon > 0$, esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_j(x) - f_k(x)| \le ||f_j - f_k||_\infty < \epsilon, \quad \forall\ x \in E \setminus Z, \forall\ j, k > N. \tag{2.3.5}$$

3. La convergenza di $f_j(x) \to f(x)$ è quasi-uniforme; cioè, è uniforme su $E \setminus Z$ con $|Z| = 0$. Quindi, si può affermare

   (i) $||f_j - f||_\infty \to 0$, per $j \to +\infty$
   (ii) f_j è limitata su $E \setminus Z$, e quindi $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$.

   Infatti, dalla formula (2.3.5), possiamo mandare $j \to \infty$ usando la convergenza puntuale su $E \setminus Z$ per trovare

$$|f(x) - f_k(x)| \le \epsilon, \quad \forall\ x \in E \setminus Z, \forall\ k > N,$$

   e, quindi

$$\lim_{k\to+\infty} \left[\sup_{E\setminus Z} |f(x) - f_k(x)| \right] = 0.$$

   Allora, abbiamo $||f_k - f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f_k - f| \le \sup_{E\setminus Z} |f_k - f| \to 0$, e, quindi la (i). Poi, usando

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \\ &\le \epsilon + ||f_k||_\infty < +\infty, \quad \forall\ k > N(\epsilon),\ \forall x \in E \setminus Z, \end{aligned}$$

   abbiamo la (ii).

<u>*Caso 2:* $(1 \le p < \infty)$</u> Sia $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^p(E)$ una successione di Cauchy. La dimostrazione in questo caso richiede un po' di strumenti. Brevemente, usiamo una versione L^p della disuguaglianza di Tchebychev per affermare la convergenza in misura di $\{f_j\}$. Poi, da questa successione, possiamo estrarre una sottosuccessione che converge q.o. ad un limite misurabile. Infine, mostriamo che la sottosuccesione converge anche in norma $||\cdot||_p$, con limite in $\mathcal{L}^p(E)$. Infatti:

1. **Lemma 1: (Disuguaglianza di Tchebychev - versione L^p)** *Siano* $f \in \text{mis}(E, \mathbb{R})$ *e* $\alpha > 0$. *Allora:*
$$|\{x \in E : \ |f(x)| > \alpha\}| \le \frac{1}{\alpha^p} \int_E |f(x)|^p \, dx. \tag{2.3.6}$$
Infatti, abbiamo le stime facili:
$$\int_{|f|>\alpha} |f|^p \, dx \ge \int_{|f|>\alpha} \alpha^p \, dx = \alpha^p \, |\{x \in E : \ |f(x)| > \alpha\}| \, ,$$
quindi, dividendo per $\alpha^p > 0$, si trova una disuguaglianza più forte di (2.3.6).

2. Applicando (2.3.6) alla successione $\{f_j\}$, abbiamo per ogni $\alpha > 0$
$$|\{x \in E : \ |f_j(x) - f_k(x)| > \alpha\}| \le \frac{1}{\alpha^p} \int_E |f_j(x) - f_k(x)|^p \, dx. \tag{2.3.7}$$
dove $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^P(E)$ è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza in norma $L^p(E)$. Con $\alpha > 0$ fisso, abbiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\alpha, \epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $||f_j - f_k||_p^p < \alpha^p \epsilon$ se $j, k > N$. Combinando questo con (2.3.7) abbiamo: per ogni $\alpha > 0, \epsilon > 0$ esiste $N = N(\alpha, \epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.
$$|\{x \in E : \ |f_j(x) - f_k(x)| > \alpha\}| \le \epsilon, \quad \forall \ j, k > N,$$
ovvero, $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^P(E)$ è una successione di Cauchy rispetto alla *convergenza in misura su* E; cioè
$$\forall \ \alpha > 0 : \quad \lim_{j,k \to +\infty} |\{x \in E : \ |f_j(x) - f_k(x)| > \alpha\}| = 0. \tag{2.3.8}$$
Parliamo di questa convergenza (ed altre) nel paragrafo successivo.

3. **Lemma 2:** *Sia* $\{f_j\} \subset \text{mis}(E, \mathbb{R})$. *Allora esiste* $f \in \text{mis}(E, \mathbb{R})$ *t.c.* f_j *converge in misura su* E*; cioè,*
$$\forall \ \alpha > 0 : \quad \lim_{j \to +\infty} |\{x \in E : \ |f_j(x) - f(x)| > \alpha\}| = 0 \tag{2.3.9}$$
se e solo se $\{f_j\}$ *soddisfa* (2.3.8). Questo risultato è Teorema 4.23 di [11]. Quindi, esiste una funzione misurabile f che è il limite rispetto la convergenza in misura della successione $\{f_j\}$.

4. **Lemma 3:** *Se* f_j *converge ad* f *in misura su* E*, allora esiste una sottosuccessione* $\{f_{j_m}\}$ *che converge ad* f *q.o. su* E. Questo risultato è Teorema 4.22 di [11], che sarà mostrato nel paragrafo successivo. Quindi, abbiamo una sottosuccessione che converge ad un limite misurabile q.o. su E.

5. Possiamo affermare

   (i) $||f_j - f||_p \to 0$ per $j \to +\infty$;

   (ii) $f \in \mathcal{L}^p(E)$.

Infatti, abbiamo per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left[\int_E |f_{j_m} - f_j|\, dx\right]^{1/p} = ||f_{j_m} - f_j||_p < \epsilon, \quad \forall\ j_m, j > N(\epsilon),$$

quindi, mandiamo $j_m \to +\infty$ usando il fatto che $f_{j_m} \to f$ q.o. su E. Per il Lemma di Fatou, abbiamo

$$\int_E \liminf_{j_m \to +\infty} |f_{j_m} - f_j|^p\, dx \leq \liminf_{j_m \to +\infty} \int_E |f_{j_m} - f_j|^p\, dx,$$

ovvero,

$$\int_E |f - f_j|^p\, dx \leq \liminf_{j_m \to +\infty} ||f_{j_m} - f_j||_p^p < \epsilon^p, \quad \forall\ j > N(\epsilon).$$

Quindi, vale la affermazione (i). Inoltre, $||f||_p \leq ||f - f_j||_p + ||f_j||_p < \epsilon + ||f_j||_p < +\infty$ per ogni $j > N(\epsilon)$, e, quindi vale la affermazione (ii).

□.

Abbiamo visto che $L^p(E)$ è uno spazio di Banach (lineare, normato, completo) per $1 \leq p \leq +\infty$. D'altre parte, gli spazi $L^p(E)$ con $p \in (0,1)$ sono spazi lineari **non** normati. Cosa possiamo dire sulla completezza? C'e' comunque qualche struttura geometrica nel caso $p \in (0,1)$? Le risposte sono sì.

2.3.8. Definizione: *Sia* $0 < p \leq +\infty$. *La metrica $L^p(E)$ è definita da:*

$$d_p(f,g) = \begin{cases} ||f-g||_p & 1 \leq p \leq \infty \\ \\ ||f-g||_p^p & 0 < p < 1 \end{cases}, \quad f, g \in \mathcal{L}^p(E). \tag{2.3.10}$$

È chiaro che $d_p : \mathcal{L}^p(E) \times \mathcal{L}^p(E) \to [0,+\infty)$ è ben definita per ogni $p \in (0,\infty]$ e soddisfa $f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2 \Longrightarrow d_p(f_1,g_1) = d_p(f_2,g_2)$, quindi, proietta su una funzione $d_p : L^p(E) \times L^p(E) \to [0,+\infty)$. Vale molto di più.

2.3.9. Teorema: *Siano* $0 < p \leq \infty$ *e* $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *con* $|E| > 0$. *Allora* $(L^p(E), d_p)$ *è uno spazio metrico completo; cioe, valgono:*

(i) $d_p(f,g) \geq 0$ per ogni $f, g \in L^p(E)$, e $d_p(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$ in $L^p(E)$;

(ii) $d_p(f,g) = d_p(g,f)$ per ogni $f, g \in L^p(E)$;

(iii) $d_p(f,g) \leq d_p(f,h) + d_p(h,g)$ per ogni $f, g, h \in L^p(E)$;

iv) *Se* $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^p(E)$ *soddisfa* $d_p(f_j, f_k) \to 0$ *per* $j, k \to 0$, *allora esiste* $f \in \mathcal{L}^p(E)$ *t.c.* $d_p(f_j, f) \to 0$ *per* $j \to +\infty$.

Dimostrazione: Il caso $p \in [1,+\infty]$ segue direttamente dal Teorema 2.3.6, dove la metrica è compatibile con la norma. Nel caso $p \in (0,1)$, ci sono tre passi significativi.

1. Si mostra la disuguaglianza

$$0 < p < 1 \Longrightarrow \quad (a+b)^p \leq a^p + b^p, \quad \forall\ a, b \geq 0 \tag{2.3.11}$$

Infatti, per $a = b = 0$, è ovvio. Se $a \neq 0$, si pone $t := b/a$, e la (2.3.11) diventa

$$g(t) := (1+t)^p \leq 1 + t^p := h(t), \quad \forall\ t > 0.$$

Ma, $g(0) = 1 = h(0)$ e si mostra facilmente che $g'(t) < h'(t)$ per ogni $t > 0$ se $p \in (0,1)$.

2. Sfruttando (2.3.11), si verifica facilmente le proprietà geometriche **(i)**, **(ii)**, **(iii)**.

3. Per la proprietà topologica **(iv)**, si usa un argomento simile a quello fatto nel caso 2 ($p \in [1, \infty)$) del Teorema 2.3.7.

$\square$.

L'ultima proprietà generale che ci interessa è quella dell'esistenza di una base numerabile per gli spazi.

2.3.10. Definizione: *Uno spazio metrico $(\mathcal{F}, d)$ si chiama separabile se esiste un sottoinsieme numerabile e denso; cioè esiste $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ t.c. per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per $\epsilon > 0$, esiste f_k con $k = k(f, \epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $d(f, f_k) < \epsilon$.*

2.3.11. Teorema: *Siano $0 < p < \infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| > 0$. Allora $(L^p(E), d_p)$ è uno spazio metrico separabile.*

N.B. In generale, il risultato è falso per $L^\infty(E)$. Ad esempio, in $L^\infty(0, 1)$ consideriamo la famiglia non numerabile di funzioni

$$f_t(x) = \chi_{(0,t)}(x), \quad 0 < t < 1.$$

È facile vedere che per ogni $s \neq t$, $||f_t - f_s||_\infty = 1$.

L'idea della dimostrazione: È stata discussa in Analisi IV il caso $p = 1$. Qui, l'idea è identica. I passi principali sono:

1. Considerare una famiglia numerabile di rettangoli:

$$\mathcal{R} := \left\{ R = \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k) : \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q}, \ R \subset E \right\}.$$

2. Considerare una famiglia numerabile di funzioni a scala:

$$\mathcal{E} := \left\{ f = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \chi_{R_j} : \quad \alpha_j \in \mathbb{Q}, \ R_j \in \mathcal{R}, M \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Per ogni $f \in \mathcal{L}^p(E)$ e per ogni $\epsilon > 0$, esiste $f_1 \in C_0^0(E)$ t.c. $||f - f_1||_p < \epsilon$. Questo è un risultato di densità che abbiamo già nominato da Analisi IV nel caso $p = 1$ (vedi Lemma 1 nella dimostrazione del Teorema 1.3.3).

4. Sia $U \subset E$ aperto, limitato t.c. $\text{supp} f_1 \subset U \subset E$. Allora esiste $f_2 \in \mathcal{E}$ t.c.

$$\text{supp} f_2 \subset U \quad \text{e} \quad |f_2(x) - f_1(x)| < \frac{\epsilon}{|U|^{1/p}}, \quad \text{q.o. su } U.$$

   Per questo, basta controllare l'oscillazione di f_1 (che è uniformemente continua).

Quindi, abbiamo

$$\int_E |f_2 - f_1|^p \, dx = \int_U |f_2 - f_1|^p \, dx \leq \frac{\epsilon^p}{|U|} |U| = \epsilon^p,$$

ovvero, $||f_2 - f_1||_p \leq \epsilon$. Si combina questa stima con quella del passo 3. $\square$.

2.4 Convergenza di funzioni misurabili

Come abbiamo visto nella dimostrazione del Teorema 2.3.7, è essenziale essere capaci di confrontare la convergenza in norma L^p con altri modi di convergenza. Quindi, in questo paragrafo, poniamo il seguente problema: data una successione di funzioni $\{f_j\} \subset \text{mis}(E, \mathbb{R})$ e data una funzione limite $f \in \text{mis}(E, \mathbb{R})$, quali sono i principali modi di convergenza e quali sono le relazioni fra loro? Cominciamo con un elenco dei tipi di convergenza.

2.4.1. Definizioni: *Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| > 0$, $\{f_j\} \subset \text{mis}(E, \mathbb{R})$ e $f \in \text{mis}(E, \mathbb{R})$. Diciamo che $f_j \to f$ rispetto alla convergenza:*

Uniforme (U) $\overset{\circ}{\iff}$ $\sup_E |f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$

Quasi-Uniforme (QU) $\overset{\circ}{\iff}$ $\forall\, \alpha > 0\, \exists\, E_\alpha$ t.c. $|E_\alpha| < \alpha$ e $\sup_{E \setminus E_\alpha} |f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$

Quasi-Ovunque (QO) $\overset{\circ}{\iff}$ $\exists\, Z$ t.c. $|Z| = 0$ e $|f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty, \ \ \forall x \in E \setminus Z$,

in Misura (M): $\overset{\circ}{\iff}$ $\forall\, \alpha > 0 \ \ |\{x \in E : \ |f_j(x) - f(x)| > \alpha\}| \to 0, \ j \to +\infty$

in Norma (L^∞) $\overset{\circ}{\iff}$ $||f_j - f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f_j - f| \to 0, \ \ j \to +\infty$

in Norma (L^p) $\overset{\circ}{\iff}$ $||f_j - f||_p = \left[\int_E |f_j - f|^p \, dx\right]^{1/p} \to 0, \ \ j \to +\infty$

2.4.2. Teorema:(Confronto fra le convergenze) *Si ha il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{uniforme} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
\text{quasi} - \text{uniforme} & & \longleftarrow & & \text{norma } L^\infty \\
\downarrow \ \Uparrow & \searrow & & \swarrow & \Downarrow \\
\text{quasi} - \text{ovunque} & \looparrowleft & \text{misura} & \overset{\leftarrow}{\Rrightarrow} & \text{norma } L^p
\end{array}$$

dove le frecce significano:

- $\to$ sempre vero
- $\Rightarrow$ vero se $|E| < +\infty$
- $\Rrightarrow$ vero, se $|E| < +\infty$ e $|f_n| \le M$ per ogni n
- $\looparrowright$ vero, passando ad una sottosuccessione

Invece di fornire una dimostrazione molto formale, facciamo qualche osservazione, dimostriamo qualche affermazione, lasciamo qualche affermazione per esercizio, e forniamo degli esempi semplici che mostrano perchè certe implicazioni non valgono.

2.4.3. Osservazioni: *Si può dire:*

1. *La catena di implicazioni "$U \to QU \to QO$" è facile, e la lasciamo per esercizio (Esercizio 2.4.6a). È anche facile l'implicazione "*norma $L^\infty \to QU$*".*

2. *L'implicazione "$QO \Rightarrow QU$" è il Teorema di Egorov di Analisi IV (vedi Teorema 4.17 di [11]).*

3. *L'implicazione "QU $\rightarrow$* misura*" più il Teorema di Egorov dà l'implicazione "QO $\Rightarrow$* misura*". Mostriamo questa prima implicazione in Proposizione 2.4.4.*

4. *L'implicazione "*misura $\not\rightarrow$ *QO" è quella che abbiamo usato nella dimostrazione della completezza di $L^p(E)$ (Teorema 2.3.7), e sarà dimostrata in Proposizione 2.4.5.*

5. *L'implicazione "*norma $L^p \rightarrow$ misura*" è la Disuguaglianza di Tchebychev (Lemma 1) che abbiamo usato nella dimostrazione del Teorema 2.3.7.*

6. *L'implicazione "*norma $L^\infty \rightarrow$ norma L^p*" è la disuguaglianza di Hölder, che abbiamo già proposto come modo di verificare l'inclusione di $L^\infty(E) \subset L^P(E)$ se $|E| < +\infty$.*

7. *La catena di implicazioni "U $\rightarrow$* norma $L^\infty \rightarrow$ misura*" è facile e la lasciamo per esercizio (Esercizio 2.4.6b).*

8. *L'implicazione "*misura $\not\Rightarrow L^p$*" è un buon esercizio (Esercizio 2.4.6c).*

2.4.4. Proposizione: *Sia $\{f_j\} \subset \text{mis}(E,\mathbb{R})$ t.c. $f_j \rightarrow f \in \text{mis}(E,\mathbb{R})$ quasi-uniformemente. Allora, $f_j \rightarrow f$ anche in misura.*

Dimostrazione: Dobbiamo mostrare che per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\alpha,\epsilon)$ t.c.
$$|\{x \in E: \ |f_j(x) - f(x)| > \alpha\}| < \epsilon, \quad \forall\, j > N(\alpha,\epsilon).$$
Sappiamo, invece, che per ogni $\mu > 0$ esiste E_μ con $|E_\mu| < \mu$ e
$$\lim_{j\rightarrow+\infty}\left[\sup_{E\setminus E_\mu} |f_j(x) - f(x)|\right] = 0,$$
ovvero, per ogni $\delta > 0$ esiste $M = M(\mu,\delta)$ t.c.
$$|f_j(x) - f(x)| < \delta, \quad \forall\, j > M(\mu,\delta),\ \forall x \in E \setminus E_\mu.$$
Quindi, abbiamo
$$|\{x \in E: \ |f_j(x) - f(x) \geq \delta\}| \leq |E_\mu| < \mu, \quad \text{se} \ \ j > M(\mu,\delta),$$
quindi,
$$|\{x \in E: \ |f_j(x) - f(x)| > \delta\}| < \mu, \quad \text{se} \ \ j > M(\mu,\delta).$$
Prendendo $\delta = \alpha$ e $\mu = \epsilon$ abbiamo il risultato. □

2.4.5. Proposizione: *Siano $\{f_j\} \subset \text{mis}(E,\mathbb{R})$ e $f \in \text{mis}(E,\mathbb{R})$ t.c. $f_j \rightarrow f$ in misura. Allora, esiste una sottosuccessione $\{f_{j_m}\}$ t.c. $f_{j_m} \rightarrow f$ quasi-ovunque.*

Dimostrazione: Infatti,

1. Sappiamo che per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\alpha,\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.
$$|\{x \in E: \ |f_j(x) - f(x)| > \alpha\}| < \epsilon, \quad \forall\, j \geq N(\alpha,\epsilon).$$
Per ogni $m \in \mathbb{N}$, consideriamo $\alpha_m = \epsilon_m = 2^{-m}$, e quindi esiste $j_m := N(2^{-m}, 2^{-m}) \in \mathbb{N}$ t.c.
$$\left|\left\{x \in E: \ |f_j(x) - f(x)| > 2^{-m}\right\}\right| < 2^{-m}, \quad \forall\, j \geq j_m.$$
Questa definisce la nostra sottosuccessione $\{f_{j_m}\}$.

2. Sia $E_m := \{x \in E : \ |f_{j_m}(x) - f(x)| > 2^{-m}\}$. Allora, $|E_m| < 2^{-m}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, definiamo $F_k := \bigcup_{m=k}^{+\infty} E_m$, e abbiamo $|F_k| \leq \sum_{m=k}^{+\infty} 2^{-m} = 2^{-k+1}$.

3. Per ogni $x \notin F_k$ (cioè $x \notin E_m$ per ogni $m \geq k$), abbiamo

$$|f_{j_\mu}(x) - f(x)| \leq 2^{-\mu}, \quad \forall \mu \geq k,$$

quindi, per ogni $x \notin F_k$, abbiamo $f_{j_\mu} \to f(x)$ per $\mu \to +\infty$. Quindi, per ogni $x \notin \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right)$, abbiamo $f_{j_\mu} \to f(x)$ per $\mu \to +\infty$. Ma,

$$\left|\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right| \leq |F_k| = 2^{-k+1}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N},$$

quindi, $\left|\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right| = 0$, e abbiamo $f_{j_\mu} \to f$ su $F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{j=m}^{+\infty} E_m\right)$ dove $|F| = 0$. $\square$

2.4.6. Esercizio. Rispetto la nostra discussione sui modi di convergenza $f_j \to f$ per $f_j, f \in$ mis$(E)\mathbb{R})$, completare il quadro enunciato, mostrando le seguente affermazioni.

(a) "$U \longrightarrow QU \longrightarrow QO$"

(b) "$U \longrightarrow L^\infty \longrightarrow M$"

(c) "$M \not\Rightarrow L^p$" $(1 \leq p < \infty)$

Adesso, vogliamo fornire un elenco di esempi utili per indicare che non si può migliore il quadro del Teorema 2.4.2 senza aggiungere ulteriore ipotesi particolari; cioè, non è vero, in generale, che si può passare da un tipo di convergenza ad un altro dove non ci sono delle frecce nel diagramma.

2.4.7. Esempi (di $f_j \to 0$ in dimensione $n = 1$) :

(i) $f_j = \frac{1}{j}\chi_{(0,j)}, \quad j \in \mathbb{N}$

(ii) $f_j = j\chi_{(0,1/j)}, \quad j \in \mathbb{N}$

(iii) $f_j = \chi_{(j,j+1)}, \quad j \in \mathbb{N}$

(iv) $f_j = j\chi_{(j,j+1/j)}, \quad j \in \mathbb{N}$

(v) $f_j = \chi_{(m/2^k,(m+1)/2^k)}, \quad j = 2^k + m \in \mathbb{N},\ 0 \leq m \leq 2^k - 1$

2.4.8. Osservazioni:

1. *L'esempio (i) converge ad zero in senso uniforme (U) su tutto $\mathbb{R}$ (*$\sup_{\mathbb{R}} |f_j| = 1/j$*), e, quindi converge anche nei sensi $(QU), (QO), (M), L^\infty$. Invece, $E = \mathbb{R}$ ha misura infinita e il supporto di f_j è $(0, j)$ tende ad un insieme di misura infinita. Quindi, non possiamo aspettarci che valga convergenza in norma L^p, in generale. Infatti, questa successione* **non** *converge a zero in $L^1(\mathbb{R})$ perchè $||f_j||_1 = 1$ per ogni j. D'altre parte, $||f_j||_p = j^{1/p-1} \to 0$ se $p > 1$. Non è difficile aggiustare questo esempio per avere esempi che non convergono negli altri L^p.*

2. *L'esempio (ii) converge a zero in senso quasi-uniforme* (QU) *su* $\mathbb{R}$ *perchè la convergenza è uniforme su* $E_\alpha = \mathbb{R} \setminus (0, \alpha)$ *per ogni* $\alpha > 0$. *Invece, la convergenza* **non** *è* (U). *Dalla convergenza* (QU) *abbiamo anche la convergenza* $(QO), (M)$. *Inoltre,* **non** *c'è convergenza* L^∞ *nè convergenza* L^p *ad zero (il limite dovrebbe essere zero perchè la successione converge a 0 in misura). Infatti, ricordando*

$$||f_j||_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |f_j| := \inf \{\alpha : \ |\{x \in \mathbb{R} : \ |f_j| > \alpha\}| = 0\},$$

abbiamo $||f_j||_\infty = j \to +\infty$ *perchè* f_j *assume il valore* j *su un insieme di misura positiva. Abbiamo anche* $||f_j||_p = j^{1-1/p} \not\to 0$ *perchè* $1 - 1/p \geq 0$ *per ogni* $p \geq 1$. *In fine, notiamo che abbiamo anche un esempio di convergenza in misura senza convergenza in* L^p.

3. *L'esempio (iii) converge* **solamente** *in senso quasi-ovunque* (QO) *a zero. La convergenza* **non** *è* (QU) *a zero (e quindi* **non** *è* (U)*) perchè* $|f_j(x)| = 1$ *su un insieme di misura* 1 *per ogni* j. *Notiamo che non si può applicare il Teorema di Egorov perchè i supporti di* f_j *non sono contenuti in un insieme di misura finita. Inoltre, abbiamo*

$$||f_j||_\infty = 1 = ||f_j||_p, \quad p \geq 1,$$

e, quindi, **non** *ci sono convergenze* L^∞, L^p. *In fine,* **non** *c'è convergenza in misura* (M) *perchè per ogni* $\alpha > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R} : \ |f_j(x)| > \alpha\}| = 1 \not\to 0, \ j \to +\infty.$$

4. *L'esempio (iv) converge* **solamente** *nei sensi quasi-ovunque* (QO) *ed in misura* (M) *a zero. Chiaramente, per ogni* $\beta > 0$, *abbiamo* $f_j \equiv 0$ *su* $(-\infty, \beta)$ *per ogni* $j > \beta$ *e la convergenza è ovunque a zero. Inoltre, per ogni* $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R} : \ |f_j(x)| > \alpha\}| \leq |(j, j + 1/j)| = 1/j \to 0, \ j \to +\infty,$$

e abbiamo la convergenza (M). *La convergenza* **non** *è* (QU) *a zero (e quindi, neanche* (U)*) perchè per ogni* $\beta > 0$ *la convergenza non è uniforme su* $(\beta, +\infty)$. *In fine, abbiamo*

$$||f_j||_\infty = j \ \text{ e } \ ||f_j||_p = j^{1-1/p}, \quad \text{dove} \ \ 1 - 1/p \geq 0,$$

e **non** *ci sono le convergenze* L^∞, L^p.

5. *L'esempio (v) converge a zero* **solamente** *nei sensi* $(M), L^p$ *con* $1 \leq p < +\infty$. *Infatti, per ogni* $\alpha > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R} : \ |f_j(x)| > \alpha\}| = 2^{-k} \to 0, \ j + \infty, \quad (j := 2^k + m, \ 0 \leq m \leq 2^k - 1),$$

quindi, la convergenza in misura. La convergenza L^p *segue in generale perchè abbiamo convergenza in misura di una successione uniformemente limitata su un insieme di misura finita. La convergenza ad zero* **non** *è* (QO) *perchè per ogni* $x \in [0, 1]$ *ci sono infiniti* j *t.c.* $f_j(x) = 1$. *Quindi,* **non** *ci sono neanche le convergenze* $(QU), (U)$. *Notiamo in fine che dalla convergenza in misura, esiste una sottosuccessione che converge quasi-ovunque ad zero; infatti, ci sono tante, ad esempio, la sottosuccessione determinata dalla successione di intervalli* $[0, 1], [0, 1/2], [0, 1/4], \ldots$.

Finiamo questo paragrafo, con un'osservazione importante. Questi esempi rappresentano anche un problema di compatezza negli spazi $L^p(E)$.

2.4.8. Osservazione: *Negli esempi (i), (ii), (iv) con $p = 1$, (iii) con $1 \leq p \leq \infty$], e (v) con $p = \infty$ abbiamo delle successioni limitate in $L^p(\mathbb{R})$ per cui non esiste una sottosuccessione convergente in norma $L^p(\mathbb{R})$. Questo è un problema di compatezza in questi spazi normati infinito dimensionale.*

Per rimediare questo difetto negli spazi $L^p(E)$, ci serve un altro modo di convergenza, la *convergenza debole* (vedi paragrafo 2.6), che si appoggia sul concetto dello spazio *duale* di $L^p(E)$, ovvero, lo spazio di tutti i funzionali lineari continui su $L^p(E)$ (vedi paragrafo 2.5). Sarà mostrato che da una successione limitata in $L^p(E)$ si può estrarre una sottosuccessione che converge debolmente. Questo fatto è uno dei strumenti più usati nella costruzione di soluzioni nel campo delle equazioni alle derivate parziali e nel calcolo delle variazioni.

2.5 Dualità in $L^p(E)$

Come abbiamo notato alle fine del paragrafo precedente, vogliamo ricuperare una proprietà di compatezza negli spazi $L^p(E)$. Ci serve la convergenza debole che si definisce tramite lo spazio duale di $L^p(E)$. Discutiamo lo spazio duale in questo paragrafo e poi la convergenza debole in quello successivo.

2.5.1. Definizione: *Sia $(\mathcal{F}, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato. Si chiama funzionale lineare limitato un'applicazione $l : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ t.c.*

- **(i)** $l(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha l(f_1) + \beta l(f_2), \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{F}$;
- **(ii)** esiste $C \geq 0$ t.c. $|l(f)| \leq C||f||, \quad \forall f \in \mathcal{F}$.

N.B. Un funzionale lineare limitato è limitato nel senso che manda insiemi in $\mathcal{F}$ limitati in norma ad insiemi in $\mathbb{R}$ limitati in valor assoluto. **Non** sono, in generale, limitati nel senso che $|l(f)| \leq M$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

2.5.2. Osservazione: *Un funzionale lineare limitato è* continuo rispetto alla topologia di convergenza in norma delle successioni in $\mathcal{F}$; cioè,

$$||f_j - f|| \to 0 \Longrightarrow |l(f_j) - l(f)| \to 0.$$

Infatti, $|l(f_j) - l(f)| = |l(f_j - f)| \leq C||f_j - f|| \to 0$.

N.B. Si può mostrare che per funzionali lineari le due proprietà (continuità e limitatezza) sono equivalenti.

2.5.3. Definizione: *Sia $(\mathcal{F}, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato. Si chiama spazio duale di $\mathcal{F}$ lo spazio*

$$\mathcal{F}' := \{l : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \ \text{ lineare, continuo (limitato)}\}.$$

2.5.4. Osservazione: *Su $\mathcal{F}'$ possiamo fornire la struttura di spazio vettoriale normato; cioè, si può definire:*

- **(i)** $+ : \quad (l_1 + l_2)(f) := l_1(f) + l_2(f), \quad l_1, l_2 \in \mathcal{F}', f \in \mathcal{F}$;
- **(ii)** $m_c : \quad (cl)(f) := c(l(f)), \quad c \in \mathbb{R}, l \in \mathcal{F}', f \in \mathcal{F}$;
- **(iii)** $||\cdot||_{\mathcal{F}'} : \quad ||l||_{\mathcal{F}'} := \sup\{|l(f)| : \ f \in \mathcal{F}, ||f|| \leq 1\}$.

2.5.5. Esercizio: Verificare che $(\mathcal{F}', +, m_c)$ è uno spazio vettoriale e che $||\cdot||_{\mathcal{F}'}$ è una norma.

2.5.6. Teorema: *Se $(\mathcal{F}, ||\cdot||)$ è uno spazio normato, allora $(\mathcal{F}', ||\cdot||_{\mathcal{F}'})$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione: Sfruttando l'Esercizio 2.5.5, rimane solo verificare che il duale è completo.

1. Sia $\{l_n\}$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $||\cdot||_{\mathcal{F}'}$; cioè, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.
$$||l_n - l_m||_{\mathcal{F}'} < \epsilon, \quad \forall\, n, m \geq N.$$
Sfruttando la definizione della norma duale e linearità, abbiamo per ogni $f \neq 0$ in $\mathcal{F}$
$$\begin{aligned} |l_n(f) - l_m(f)| &= \left| ||f||\, l_n\!\left(\frac{1}{||f||} f\right) - ||f||\, l_m\!\left(\frac{1}{||f||} f\right) \right| \\ &= ||f|| \left| (l_n - l_m)\left(\frac{1}{||f||} f\right) \right| \leq ||f||\, ||l_n - l_m||_{\mathcal{F}'}. \end{aligned}$$
Quindi, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.c.
$$|l_n - l_m| < \epsilon ||f||, \quad \forall\, n, m \geq N, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{2.5.1}$$
Quindi, per ogni f fisso, la successione $\{l_n(f)\}$ è Cauchy in $\mathbb{R}$ completo ed è convergente ad un numero reale $l(f)$. Usiamo questi limiti per definire il funzionale limite $l : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Dobbiamo ancora mostrare che l è lineare e limitato e che $||l_n - l||_{\mathcal{F}'} \to 0$.

2. Abbiamo l lineare. Infatti, per ogni $f_1, f_2 \in \mathcal{F}'$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo
$$l(\alpha f_1 + \beta f_2) := \lim_{n\to+\infty} l_n(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \lim_{n\to+\infty} l_n(f_1) + \beta \lim_{n\to+\infty} l_n(f_2) := \alpha l(f_1) + \beta l(f_2).$$

3. Abbiamo l limitato.
   - Si comincia notando che la famiglia $\{l_n\}$ è uniformemente limitata nel senso che esiste $C > 0$ tale che
   $$|l_n(f)| \leq C||f||, \quad f \in \mathcal{F}. \tag{2.5.2}$$
   Infatti, for ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per ogni $f \neq 0$ si può scrivere
   $$l_n(f) = ||f|| l_n\!\left(\frac{1}{||f||} f\right) = ||f|| \left((l_n - l_m)\left(\frac{1}{||f||} f\right) \right) + l_m\!\left(\frac{1}{||f||} f\right).$$
   Usando la limitatezza di ogni l_n e la definizione di $\{l_n\}$ Cauchy (con $\epsilon = 1$), esiste $N = N(1) \in \mathbb{N}$ per cui
   $$|l_n(f)| < ||f||(1 + C_m), \quad m, n > N(1).$$
   Fissiamo $\bar{m} > N(1)$ e abbiamo
   $$|l_n(f)| < ||f||(1 + C_{\bar{m}}), \quad n > N(1).$$
   Quindi vale (2.5.1) con $C = \max\{1 + C_{\bar{m}}, C_1, \ldots, C_{N(1)}\}$.
   - Si combina questa limitatezza con la convergenza per vedere che per ogni $f \in \mathcal{F}$
   $$|l(f)| = \left| \lim_{n\to+\infty} l_n(f) \right| \leq \lim_{n\to+\infty} |l_n(f)| \leq C||f||.$$
   Quindi abbiamo l limitato.

4. Abbiamo anche $||l_n - l||_{\mathcal{F}'} \to 0$. Infatti, possiamo prendere il limite per $m \to +\infty$ in (2.5.1) per trovare: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ per cui

$$|l_n(f) - l(f)| < \epsilon||f||, \quad \forall\ n > N(\epsilon), \quad \forall\ f \in \mathcal{F},$$

da cui la tesi.

$\square$.

Per essere in grado di operare con questi funzionali lineari continui nel caso $\mathcal{F} = L^p(E)$, sarebbe molto utile avere una caratterizzazione concreta di loro. Una prima indicazione di "chi sono" è fornita nella osservazione seguente.

2.5.7. Osservazione: *Siano* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *con* $|E| > 0$. *Per ogni* $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$ *l'applicazione*

$$l_g(f) := \int_E fg\, dx, \quad f \in \mathcal{L}^p(E), \tag{2.5.3}$$

definisce un funzionale lineare sullo spazio $\mathcal{L}^p(E)$ *che è limitato rispetto alla norma* $||\cdot||_p$.

Infatti, l_g è ben definito per la disuguaglianza di Hölder, dove abbiamo

$$|l_g(f)| \leq ||f||_p\, ||g||_{p'}, \quad \forall\ f \in \mathcal{L}^p(E)$$

Quindi, abbiamo anche una stima di limitatezza di l_g con $C = ||g||_{p'}$. È chiaro anche che l_g agisce in modo lineare su $\mathcal{L}^p(E)$.

2.5.8. Osservazione: *L'applicazione* l_g, *definita in* (2.5.1), *ha le seguente proprietà ovvie:*

(a) *L'azione passa al quoziente* $L^p(E)$; *cioè* $\tilde{f} \sim f \Longrightarrow l_g(\tilde{f}) = l_g(f)$;

(b) *Se* $g \sim \tilde{g}$, *allora i due funzionali* $l_g, l_{\tilde{g}}$ *sono uguali su* $\mathcal{L}^p(E)$.

Quindi, possiamo affermare che per ogni $g \in L^{p'}(E)$, (2.5.1) definisce un funzionale $l_g \in (L^p(E))'$. Inoltre, se usiamo l'identificazione degli spazi di classe di equivalenza $L^p, L^{p'}$ con gli spazi di rappresentati $\mathcal{L}^p, \mathcal{L}^{p'}$ possiamo anche usare la notazione di (2.5.1); cioè

$$l_g(f) := \int_E fg\, dx, \quad \text{per} \quad g \in L^{p'}(E), f \in L^p(E)$$

come un modo corto per scrivere

$$l_g(f) := l_{\dot{g}}(\dot{f}) := \int_E \dot{f}\dot{g}\, dx, \quad \forall\ \dot{f} \in f, \dot{g} \in g. \tag{2.5.4}$$

2.5.9. Teorema: *Siano* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *con* $|E| > 0$. *Allora, l'applicazione* $l : L^{p'}(E) \to (L^p(E))'$ *definita da* $g \mapsto l_g$ *è ben definita, continua, ed iniettiva.*

Dimostrazione:

1. Abbiamo già visto che l'applicazione è ben definita.

2. Per la continuità, essendo che l è un'applicazione lineare da uno spazio normato in un altro, intendiamo che esiste $C \geq 0$ t.c.

$$||l_g||_{(L^p(E))'} \leq C||g||_{L^{p'}(E)}.$$

Abbiamo, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$||l_g||_{(L^p(E))'} := \sup_{||f||_p \leq 1} |l_g(f)| \leq \sup_{||f||_p \leq 1} \left[||f||_p \, ||g||_{p'}\right] \leq ||g||_{p'},$$

e, quindi, l è continua con costante $C \leq 1$.

3. Per l'iniettività, assumiamo che esistono $g_1, g_2 \in L^{p'}(E)$ t.c. $l_{g_1} = l_{g_2}$ in $(L^p(E))'$; cioè che $l_{g_1}(f) = l_{g_2}(f)$ per ogni $f \in L^p(E)$. Scegliamo due rappresentanti $\dot{g}_1, \dot{g}_2 \in g_1, g_2$. Quindi, abbiamo
$$\int_E (\dot{g}_1 - \dot{g}_2)\, \dot{f}\, dx = 0, \quad \text{per ogni } \dot{f} \in \mathcal{L}^p(E).$$
Affermiamo che $\dot{g}_1 - \dot{g}_2 = 0$ quasi-ovunque in E (vedi Lemma 2.5.10). Quindi, $g_1 = g_2$ in $L^{p'}(E)$.

□

2.5.10. Lemma (di annullamento) *Sia $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$ t.c. $\int_E fg\, dx = 0$ per ogni $f \in \mathcal{L}^p(E)$. Allora $g = 0$ q.o. in E.*

Dimostrazione: Per ogni $\epsilon > 0$ e $x_0 \in E$, consideriamo $f(x) = |B_\epsilon(x_0)|^{-1} \chi_{B_\epsilon(x_0)} \in L^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^p(E)$. Essendo $g \in L^{p'}(E)$ con $p' \geq 1$, abbiamo $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(E)$. Quindi, per ipotesi, abbiamo

$$0 = \frac{1}{|B_\epsilon(x_0)|} \int_{B_\epsilon(x_0)} g(x)\, dx,$$

dove prolunghiamo g con zero se è necessario; cioè se $B_\epsilon(x_0) \not\subset E$. Per il Teorema di Differenziazione di Lebesgue, abbiamo

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{|B_\epsilon(x_0)|} \int_{B_\epsilon(x_0)} g(x)\, dx = g(x_0), \quad \text{q.o. } x_0 \in E.$$

□

Adesso, siamo pronti per il risultato principale del paragrafo che dà una caratterizzazione concreta dello spazio duale di $L^p(E)$ quando $p \in [1, \infty)$. Il punto è che i funzionali che abbiamo considerato nel Teorema 2.5.9 sono tutte i possibili funzionali lineari continui, ovvero, che la mappa l è anche suriettiva.

2.5.11. Teorema (di Rappresentazione di Riesz): *Siano $1 \leq p < \infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| > 0$. Allora, per ogni $l \in (L^p(E))'$ esiste un'unica $g \in L^{p'}(E)$ t.c. $l = l_g$. Inoltre, abbiamo $||l||_{(L^p(E))'} = ||g||_{p'}$; cioè la mappa l definita in Teorema 2.5.9 è un'isometria.*

N.B. La strategia della dimostrazione è di mostrare che esiste $\dot{g} \in \mathcal{L}^{p'}(E)$ t.c.

(i) fissato $f \in L^p(E)$, abbiamo $l(f) = \int_E \dot{g}\dot{f}\, dx$ per ogni $\dot{f} \in f$;

(ii) se esiste $\dot{g}_1$ con la stessa proprietà, allora $\dot{g}_1 \sim \dot{g}$; cioè, abbiamo un'unica classe $L^{p'}(E)$;

(iii) vale $||g||_{p'} = ||l||_{(L^p(E))'}$.

N.B. La nostra dimostrazione (vedi paragrafo 2.9), come quella di [11], si appoggia sul Teorema di Radon-Nikodym, quindi, è una dimostrazione via la teoria della misura. C'è almeno un'altra strada, quella dell'analisi convessa, come si può trovare nel libro di Lieb-Loss [6]. Infine, notiamo che il risultato non è vero per il caso $p = \infty$ (vedi Esempio 2.9.1).

Finiamo questo paragrafo con un semplice esercizio.

2.5.12. Esercizio: Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| < +\infty$. Considerare i seguenti funzionali l. Verificare che sono lineari e continui su $L^p(E)$ con $1 \leq p < \infty$. Poi, trovare un rappresentante per $g \in L^{p'}(E)$ per cui $l(f) = l_g(f) = \int_E fg\,dx$. **N.B.** Esempi ancora più interessante hanno bisogno di un po' di più di analisi funzionale (per esempio, il teorema di Hahn-Banach).

(a) $l(f)$ la media integrale di f.

(b) $l(f) = \int_{T^{-1}(E)} f(Tx)\,dx$ dove $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed invertibile.

2.6 Convergenza debole in $L^p(E)$

In questo paragrafo mettiamo in moto il discorso sulla dualità per definire la convergenza debole e di esaminare le sue prime proprietà. Essendo che abbiamo il Teorema di Rappresentazione di Riesz (TRR) per $p \in [1, \infty)$, si può aspettare che i risultati saranno migliore per gli p strettamente fra 1 e ∞. In tutto quello che segue $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| > 0$.

2.6.1 Definizione: *Siano $\{f_j\} \subset L^p(E), f \in L^p(E)$. Diciamo che $\underline{f_j \text{ converge debolmente ad } f \text{ in -}L^p(E)}$ se*

$$\text{per ogni } l \in (L^p(E))' : \quad l(f_j) \to l(f) \text{ in } \mathbb{R}, \quad \text{per } j \to +\infty. \tag{2.6.1}$$

In tal caso, scriviamo $f_j \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$.

N.B. Quando $1 \leq p < \infty$, via il Teorema di Rappresentazione di Riesz, possiamo dire che $f_j \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$ se e solo se

$$\text{per ogni } g \in L^{p'}(E) : \quad l_g(f_j) \to l_g(f) \quad \text{per } j \to +\infty, \tag{2.6.2}$$

ovvero,

$$\text{per ogni } g \in \mathcal{L}^{p'}(E) : \quad \int_E f_j g\,dx \to \int_E fg\,dx \quad \text{per } j \to +\infty, \tag{2.6.3}$$

dove abbiamo identificato f_j, f con uno qualsiasi dei loro rappresentanti in $\mathcal{L}^p(E)$. La formula (2.6.3) definisce anche la convergenza $f_j \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$ per $\{\{f_j\}, f\} \subset \mathcal{L}^p(E)$.

2.6.2. Osservazione: *La convergenza forte (in norma $L^p(E)$) è più forte della convergenza debole, ovvero:*

$$f_j \to f \text{ in } L^p(E) \Longrightarrow f_j \rightharpoonup f \text{ in } L^p(E).$$

Infatti, via la disuguaglianza di Hölder, abbiamo per ogni $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$:

$$\left| \int_E (f_j - f)\, g\,dx \right| \leq ||f_j - f||_p \, ||g||_{p'} \to 0.$$

N.B.: La convergenza forte è strettamente più forte della convergenza debole; cioè, esistono successioni debolmente convergenti ma non convergenti in norma.

2.6.3. Esercizio Verificare che le seguenti successioni di funzioni $\{f_j\}$ *convergono debolmente* a zero in $L^p(E)$, ma **non** convergono fortemente (in norma L^p).

(a) $f_j(x) := \varphi(x + j)$ con $0 \neq \varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Esiste una versione di questo esempio anche su $E = (0, 1)$?

(b) $f_j(x) := j^{1/p}\varphi(jx)$ con $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

(c) $f_j(x) := \sin(jx)$ per $x \in [0,1]$ e $f_j(x) := 0$ per $x \notin [0,1]$.

Adesso, cominciamo di vedere le prime proprietà della convergenza debole.

2.6.4. Teorema: *Sia $f \in L^p(E)$ con $1 \le p < \infty$. Allora:*

(a) *$l(f) = 0$ per ogni $l \in (L^p(E))' \Longrightarrow f = 0$ in $L^p(E)$;*

(b) *Il limite debole è unico se esiste.*

Dimostrazione:

1. La proprietà (a): Assumiamo, per assurdo, che $l_g(f) = 0$ per ogni $g \in L^{p'}(E)$ ma $f \neq 0$ in $L^p(E)$. Scegliendo un rappresentante per f (che chiamiamo anche f), definiamo una funzione misurabile g mediante
$$g(x) := \begin{cases} |f(x)|^{p-2}f(x) & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0 \end{cases} . \tag{2.6.4}$$
Abbiamo $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$. Infatti, ci sono due casi. Se $1 < p < \infty$, abbiamo
$$||g||_{p'}^{p'} := \int_E |g|^{p'}\,dx = \int_E \left(|f|^{p-1}\right)^{p/(p-1)}\,dx = ||f||_p^p < +\infty,$$
e, se $p = 1$, abbiamo
$$g(x) = \begin{cases} \pm 1 & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0 \end{cases} ,$$
e, quindi $||g||_\infty = 1$. Calcolando $l_g(f)$, nel primo caso:
$$0 = l_g(f) = \int_{\mathrm{supp}(f)} |f(x)|^{p-2}f^2(x)\,dx = \int_E |f(x)|^p\,dx,$$
che è assurdo se $f \neq 0$ in $L^p(E)$. Nel secondo caso,
$$0 = l_g(f) = \int_{\mathrm{supp}(f)} \frac{f(x)}{|f(x)|}f(x)\,dx = \int_E |f(x)|\,dx,$$
che è, di nuovo, assurdo.

2. La proprietà (b): Assumiamo che $f_j \rightharpoonup f$ e $f_j \rightharpoonup \tilde{f}$. Allora, per ogni $l \in (L^p(E))'$, si ha $l(f_j) \to l(f), l(\tilde{f})$ in $\mathbb{R}$, ma il limite è unico in $\mathbb{R}$, quindi $l(f) = l(\tilde{f})$ per ogni $l \in (L^p(E))'$. per la parte (a), $f = \tilde{f}$ in $L^p(E)$.

□

2.6.5. Teorema: *Sia $1 \le p < \infty$. Se $f_j \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$, allora esiste $M < +\infty$ t.c. $||f_j||_p \le M$ per ogni $j \in \mathbb{N}$; cioè successioni debolmente convergenti sono limitate in norma.*

Dimostrazione: Questo risultato vale in un contesto molto più generale ed è una conseguenza del *Teorema di Banach-Steinhaus (il principio di limitatezza uniforme)* che si mostra in Analisi Funzionale. Invece, forniamo una dimostrazione diretta nel nostro caso concreto che si trova in [6].

1. Scegliamo dei rappresentanti per f_j, f. Dal Teorema di Rappresentazione di Riesz, per ogni $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$, si ha $\int_E (f_j - f)\, g\, dx \to 0$ per $j \to +\infty$. Quindi, per ogni g, $\{l_g(f_j)\}$ è una successione convergente in $\mathbb{R}$, e, quindi
$$\forall\ g \in \mathcal{L}^{p'}(E): \quad \{l_g(f_j)\} \text{ e}' \text{ limitata in } \mathbb{R}. \tag{2.6.5}$$

2. Per assurdo, assumiamo che $\{f_j\}$ non è limitata in norma; cioè, per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $j = j(M) \in \mathbb{N}$ t.c. $||f_j||_p > M$. Passando ad una sottosuccessione (che continuiamo a chiamare f_j), possiamo assumere
$$||f_j||_p \geq 4^j, \quad \forall\ j \in \mathbb{N}. \tag{2.6.6}$$

3. Consideriamo il seguente riscalamento di $\{f_j\}$:
$$F_j := \frac{4^j}{||f_j||_p} f_j.$$
Abbiamo $||F_j||_p = 4^j$ e anche
$$|l_g(F_j)| = \frac{4^j}{||f_j||_p} |l_g(f_j)| \leq |l_g(f_j)|,$$
quindi $\{l_g(F_j)\}$ è anche limitata in $\mathbb{R}$ per ogni $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$. L'idea è di costruire una g per cui $\{l_g(F_j)\}$ non è limitata, assurdo.

4. Costruiamo g nel caso $1 < p < \infty$; il caso $p = 1$ è analogo (vedi passo 1 della dimostrazione del Teorema 2.6.4). Definiamo
$$g := \sum_{j=1}^{+\infty} 3^{-j} \sigma_j g_j$$
dove
$$g_j(x) := \frac{|F_j(x)|^{p-2}}{||F_j||_p^{p-1}} F_j(x) \quad (||F_j||_p = 4^j \neq 0),$$
e $\sigma_j = \pm 1$ è definita per induzione: $\sigma_1 = 1$ e poi avendo scelto $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, scegliamo σ_k per avere
$$\operatorname{sign}\left(3^{-k} \int_E \sigma_k g_k F_k\, dx\right) = \operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^{k-1} 3^{-j} \sigma_j \int_E g_j F_k\, dx\right). \tag{2.6.7}$$
Notiamo che $g_j \in \mathcal{L}^{p'}(E)$ e $||g_j||_{p'} = 1$. Quindi, la serie converge a $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$. Il ruolo dei fattori σ_j sarà chiaro nel passo successivo quando facciamo delle stime. Vogliamo avere controllo del segno dei singoli termini nelle somme.

5. Affermiamo che $\{l_g(F_k)\}$ è illimitata, e, quindi, abbiamo l'assurdo voluto. Infatti, abbiamo:
$$\begin{aligned} |l_g(F_k)| &= \left| \sum_{j=1}^{k} 3^{-j} \sigma_j \int_E g_j F_k\, dx + \sum_{j=k+1}^{+\infty} 3^{-j} \sigma_j \int_E g_j F_k\, dx \right| \\ &:= |A + B| \geq |A| - |B| \end{aligned}$$
Adesso, facciamo delle stime su $|B|$ dal alto e su $|A|$ dal basso. Troviamo via la disuguaglianza di Hölder:
$$|B| \leq \sum_{j=k+1}^{+\infty} 3^{-j} \sigma_j ||g_j||_{p'} ||F_k||_p = \sum_{j=k+1}^{+\infty} 3^{-j} 4^k = \frac{1}{2} \frac{1}{3^k} 4^k.$$

Poi, usando (2.6.7),

$$\begin{aligned}|A| &= \left|\sum_{j=1}^{k-1} 3^{-j}\sigma_j \int_E g_j F_k\, dx + 3^{-k}\sigma_k \int_E g_k F_k\, dx\right| \\ &\geq 3^{-k}\left|\int_E g_k F_k\, dx\right| = 3^{-k}\frac{||F_k||_p^p}{||F_k||_p^{p-1}} = 3^{-k}4^k.\end{aligned}$$

Perciò $|l_g(F_k)| \geq 2^{-1}(4/3)^k \to +\infty$, assurdo.

□

Adesso, siamo pronti per il risultato principale di questo paragrafo.

2.6.6. Teorema: *Sia $1 < p < \infty$. Se $\{f_j\} \subset L^p(E)$ è limitata in norma (cioè, esiste $M < +\infty$ t.c. $||f_j||_p \leq M$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$), allora esiste una sottosuccessione $\{f_{j_k}\}$ ed esiste $f \in L^p(E)$ t.c. $f_{j_k} \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$.*

Dimostrazione:

1. Sfruttiamo il fatto che $L^{p'}(E)$ è separabile (ha un sottoinsieme numerabile e denso) nel modo seguente. Per prima cosa, diciamo che una successione $\{f_j\}$ in $L^p(E)$ è *Cauchy per la convergenza debole* se $\{l_g(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $g \in L^{p'}(E)$. Poi abbiamo il seguente risultato:
   Lemma: *Sia $1 < p < \infty$. Una successione <u>limitata</u> $\{f_j\}$ in $L^p(E)$ è Cauchy per la convergenza debole se e solo se $\{l_{g_i}(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ dove $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è uno qualsiasi sottoinsieme numerabile e denso.*
   Infatti, l'implicazione ($\Longrightarrow$) è banale. Invece per l'implicazione ($\Longleftarrow$) usiamo la limitatezza $||f_j||_p \leq M$ ed il fatto che per ogni $g \in L^{p'}(E)$ esiste $g_i \in L^{p'}(E)$ t.c. $||g - g_i||_{p'} < 2^{-i}$ per stimare

   $$\begin{aligned}|l_g(f_j) - l_g(f_k)| &\leq |l_g(f_j) - l_{g_i}(f_j)| + |l_{g_i}(f_j) - l_{g_i}(f_k)| + |l_{g_i}(f_k) - l_g(f_k)| \\ &\leq 2M2^{-i} + |l_{g_i}(f_j - f_k)|\,.\end{aligned}$$

   Ma $\{l_{g_i}(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ per cui: dato $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon, i)$ t.c.

   $$|l_g(f_j) - l_g(f_k)| < 2^{1-i}M + \epsilon/2, \quad \forall\ j,k > N(\epsilon, i).$$

   Scegliamo $\bar{i}$ abbastanza grande per avere $2^{1-i}M < \epsilon/2$ e poi per ogni $j,k > N(\epsilon,\bar{i})$ il membro destro dalla disuguaglianza sopra è minore di ϵ.

   N.B. un argomento molto simile mostra che una successione limitata $\{f_j\}$ in $L^p(E)$ converge debolmente ad f se e solo se $l_{g_i}(f_j) \to l_{g_i}(f)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

2. Usiamo la diagonalizzazione di Cantor per costruire una sottosuccessione opportuna $\{f_{j_k}\}$ mediante la famiglia $\{g_i\}$.

   - Poniamo $\alpha_j^1 := \int_E f_j g_1\, dx$ e si ha $|\alpha_j^1| \leq ||f_j||_p\, ||g_1||_{p'} \leq M||g_1||_{p'}$. Quindi esistono $\{f_j^1\} \subset \{f_j\}, \alpha^1 \in \mathbb{R}$ t.c.

     $$\int_E f_j^1 g_1\, dx \to \alpha^1.$$

- Poniamo $\alpha_j^2 := \int_E f_j^1 g_2\, dx$ e si ha $|\alpha_j^2| \leq ||f_j^1||_p\, ||g_2||_{p'} \leq M||g_2||_{p'}$. Quindi esistono $\{f_j^2\} \subset \{f_j^1\}, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ t.c.
$$\int_E f_j^2 g_2\, dx \to \alpha^2.$$
Inoltre, dal passo precedente, abbiamo $\int_E f_j^2 g_1\, dx \to \alpha^1$ perchè $\{f_j^2\} \subset \{f_j^1\}$.
- Per induzione, esistono $\{f_j^k\} \subset \{f_j\}, \{\alpha^k\} \subset \mathbb{R}$ t.c.
$$\begin{cases} \int_E f_j^k g_k\, dx \to \alpha^k \\ \\ \int_E f_j^k g_l\, dx \to \alpha^l, \quad \forall\, l \leq k, \end{cases}$$
dove la seconda affermazione segue dal fatto che f_j^k è un elemento dalla successione $\{f_j^l\}$ per ogni $l \leq k$.

Quindi, abbiamo il nostro candidato $f_{j_k} := f_j^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

3. La nostra successione $\{F_k\} := \{f_{j_k}\}$ è Cauchy per la convergenza debole (per costruzione e grazie al Lemma di passo 1). Infatti, abbiamo
$$\lim_{k \to +\infty} \left[\int_E F_k g_i\, dx\right] = \alpha^i, \quad \forall\, i \in \mathbb{N},$$
perchè per ogni $k \geq i$, F_k è un elemento di $\{f_j^i\}$. In particolare, $\{l_{g_i}(F_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $i \in N$. Applicando il Lemma, abbiamo l'affermazione.

4. Essendo $\{l_g(F_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $g \in L^{p'}(E)$ esiste un numero $\alpha(g) \in \mathbb{R}$ per cui
$$\alpha(g) := \lim_{k \to +\infty} \left[\int_E F_k g\, dx\right].$$

5. **Affermazione:** *L'applicazione $\alpha : L^{p'}(E) \to \mathbb{R}$ così definita è un funzionale lineare, continuo.* Infatti, la linearità segue dalla linearità dell'integrale e il processo di limite in $\mathbb{R}$. Inoltre, sempre per la disuguaglianza di Hölder, abbiamo
$$\left|\int_E F_k g\, dx\right| \leq ||F_k||_p\, ||g||_{p'} \leq M||g||_{p'} \Longrightarrow |\alpha(g)| \leq M||g||_{p'}.$$

6. Quindi, per la Rappresentazione di Reisz con $p' \in (1, \infty)$, esiste $f \in \left(L^{p'}(E)\right)' = L^p(E)$ per cui
$$\forall g \in L^{p'}(E) : \quad \int_E fg\, dx = \alpha(g) := \lim_{k \to +\infty} \int_E f_{j_k} g\, dx,$$
ovvero, $f_{j_k} \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$.

□

N.B. Abbiamo usato che $\mathcal{B} = L^p(E)$ con $1 < p < \infty$ è uno spazio di Banach, separabile e *riflessivo* $((\mathcal{B})')' = \mathcal{B}$. Sotto tali ipotesi si mostra in generale il risultato sopra (Teorema di Banach-Alaoglu); cioè *$\mathcal{B}$ è sequenzialmente compatto rispetto alla convergenza debole.* Questo è un risultato basilare del corso di Analisi Funzionale.
Finiamo questo paragrafo con un ulteriore esercizio sulla convergenza debole.

2.6.7. Esercizio: Mostrare le seguente affermazioni sulla convergenza forte e debole in L^p. Siano $\{f_j\} \subset L^p(E), f \in L^p(E)$.

(a) $||f_j - f||_p \to 0 \Longrightarrow ||f_j||_p \to ||f||_p \quad (1 \le p \le \infty)$.

(b) $f_j \to f$ q.o., $||f_j||_p \to ||f||_p \Longrightarrow ||f_j - f||_p \to 0 \quad (1 \le p < \infty)$

(c) $f_j \to f$ q.o, $||f_j||_p \le M < +\infty \Longrightarrow f_j \rightharpoonup f \quad (1 < p < \infty)$.

(d) $f_j \rightharpoonup f \Longrightarrow ||f||_p \le \liminf ||f_j||_p \quad (1 < p < \infty)$

2.7 Convoluzione

In questo paragrafo, parliamo di un'operazione molto utile sugli spazi $L^p(E)$, cioè quello del prodotto di convoluzione. In parte, la nostra motivazione è di introdurre delle strategie per regolarizzare ed approssimare delle funzioni in $L^p(E)$. Inoltre, è un'operazione basilare nell'analisi di Fourier, soggetto della ultima parte di questo corso.

2.7.1. Definizione: *Siano $f, g \in \text{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Il loro prodotto di convoluzione è definito dalla formula*

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy, \tag{2.7.1}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per cui esiste l'integrale in (2.7.1.).

N.B. Esistono varie circostanze per cui $f * g$ è ben definito almeno per q.o. x; per esempio se f è limitata con supporto compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Infatti, in tal caso, ponendo

$$H(x,y) := f(x-y)g(y), \tag{2.7.2}$$

la funzione integranda in (2.7.1), abbiamo per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $H(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e quindi

$$|f * g(x)| \le \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |f|\right) ||g||_{1,\{x\}-K},$$

dove

$$\{x\} - K := \{y \in \mathbb{R}^n : \quad y = x - z, \quad z \in K\} \subset \mathbb{R}^n,$$

una traslazione di $K = \text{supp}(f)$, è compatto. Infatti, abbiamo $f(z) = 0$ per ogni $z \notin K$, quindi, con x fisso, abbiamo $f(x-y) = 0$ per ogni y per cui $x - y \notin K$, ovvero, per ogni $y \notin \{x\} - K$.

2.7.2. Teorema: *Sia $1 \le p \le \infty$. Se $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, allora:*

(a) *esiste finito $f * g(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$;*

(b) *la funzione così definita $f * g$ appartiene allo spazio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$;*

(c) *vale la stima $||f * g||_p \le ||f||_p\, ||g||_1$.*

Dimostrazione:

1. La funzione $H(x,y) := f(x-y)g(y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$. Infatti, abbiamo $G(x,y) := y, F(x,y) := x$ sono chiaramente misurabili su $\mathbb{R}^n_y, \mathbb{R}^n_x$ rispettivamente. Poi, considerando la trasformazione lineare nonsingolare $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ definita da

$$(x,y) = \Phi(\xi,\eta) := (\xi - \eta, \xi + \eta),$$

essendo Φ un diffeomorfismo globale di classe C^∞, abbiamo $\tilde{F}(x,y) := F \circ \Phi(\xi,\eta) = F(\xi - \eta, \xi + \eta)$ è misurabile su $\mathbb{R}^{2n}_{\xi,\eta}$. Ma $\tilde{F}(\xi,\eta) = f(\xi - \eta)$, e, quindi $H(x,y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^{2n}_{x,y}$.

2. Consideriamo il caso $f, g \geq 0$. Per il Teorema di Tonelli (vedi Teorema 6.10 di [11]), abbiamo per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, la funzione integrale
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)\, dy$$
è misurabile da $\mathbb{R}^n_x$ a valori in $[0, +\infty]$. Verifichiamo che $f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ nel caso $1 \leq p < \infty$, lasciando il caso $p = \infty$ per esercizio. Usando la non negatività di $f(x-y)g(y)$ e la disuguaglianza di Hölder, troviamo
$$\begin{aligned} ||f * g||_p^p &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy \right]^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y)]^{1/p'} [f(x-y)]^{1/p} g(y)\, dy \right]^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, dy \right]^{p/p'} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) [g(y)]^p\, dy \right] dx. \end{aligned}$$
Adesso, usando il cambiamento di variabili $y' = x - y$ nel primo integrale più la relazione $p/p' = p - 1$, abbiamo
$$\begin{aligned} ||f * g||_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y')\, dy' \right]^{p-1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) [g(y)]^p\, dy \right] dx \\ &= ||f||_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) [g(y)]^p\, dy \right] dx \\ &= ||f||_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) [g(y)]^p\, dx \right] dy, \end{aligned}$$
dove abbiamo scambiato l'ordine di integrazione usando il Teorema di Tonelli. Poi, facendo delle manipolazioni semplici
$$\begin{aligned} ||f * g||_p^p &\leq ||f||_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} [g(y)]^p \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x')\, dx' \right] dy \\ &= ||f||_1^p\, ||g||_p^p, \end{aligned}$$
e, quindi, $||f * g||_p \leq ||f||_1\, ||g||_p < +\infty$ e abbiamo la stima (c), l'affermazione (b), e poi l'affermazione (a) nel caso $f, g \geq 0$.

3. Finalmente, nel caso generale, abbiamo
$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \\ &= |f| * |g|(x), \end{aligned}$$
e, quindi, $||f * g||_p \leq ||\, |f|\, ||_1\, ||\, |g|\, ||_p = ||f||_1\, ||g||_p$.

N.B. Nel caso speciale $p = 1$, c'è una formula notevole (vedi la dimostrazione del Teorema 6.14 in [11]):
$$f, g \geq 0 \text{ in } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f * g\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx \right).$$

Abbiamo definito la convoluzione al livello di funzioni misurabili e abbiamo visto che una convoluzione con $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ conserva tutti gli spazi $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Ovviamente, questi fatti rimangono vero passando alle classe L^1, L^p.

2.7.3. Proposizione: *Scegliendo dei rappresentanti, il prodotto di convoluzione definisce un'operatore di convoluzione*

$$* : \; L^p(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

con le seguente proprietà:

(a) $*$ *è bilineare*;

(b) $*$ *è continuo nel senso che:*

$$(f_j, g_j) \to (f, g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f_j * g_j \to f * g \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione: È chiaro che la classe in $L^1(\mathbb{R}^n)$ di $\dot{f} * \dot{g}$ non dipende dai rappresentanti $\dot{f}, \dot{g}$. Inoltre, la linearità è altrettanto ovvio. Per la continuità, notiamo che

$$\begin{aligned} ||f_j * g_j - f * g||_p &\leq ||f_j * g - f * g||_p + ||f_j * g_j - f_j * g||_p \\ &\leq ||f_j - f||_1 \, ||g||_p + ||f_j||_1 \, ||g_j - g||_p \end{aligned}$$

che tende a zero, dove notiamo che $||f_j||_p \leq M$ per ogni j (successioni convergenti sono limitate).

Prima di presentare altre circostanza dove il prodotto di convoluzione è ben definito, notiamo qualche proprietà della convoluzione.

2.7.4. Proposizione: *Siano $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora abbiamo le seguente proprietà algebriche:*

(a) $f * g = g * f$;

(b) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Dimostrazione: Per quello che abbiamo già visto, tutte le espressioni in (a) e (b) sono ben definite, quindi, basta mostrare le identità. Per esempio, per la commutatività (a), usiamo una semplice cambiamento di variabili $y' = x - y$:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y') g(x - y') \, dy' = g * f(x),$$

Lasciamo la dimostrazione della associatività per esercizio notando solo che gli ingredienti sono il Teorema di Fubini e cambiamento di variabili. □

Adesso, torniamo al problema di stabilire altri accoppiamenti di f, g per cui è ben definita la loro convoluzione.

2.7.5. Teorema: *Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ con $q = p'$. Allora, per ogni $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ si ha:*

(a) $f * g(x)$ *esiste finito per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $f * g$ *è limitata e vale* $\sup_{\mathbb{R}^n} |f * g| \leq ||f||_p \, ||g||_q$;

(c) $f * g$ *è uniformemente continua.*

Dimostrazione:

1. Le affermazioni (a), (b) seguono dalla disuguaglianza di Hölder e il cambiamento di variabili $y' = x - y$
$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \leq ||f||_p\,||g||_q, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Per l'affermazione (c), consideriamo prima il caso $1 \leq p < \infty$. Abbiamo per ogni $h \in \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned} |f * g(x-h) - f * g(x)| &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-h-y) - f(x-y)]\,g(y)\,dy \\ &:= \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_h f - f](x-y)g(y)\,dy \\ &\leq ||\tau_h f - f||_p\,||g||_q, \end{aligned} \tag{2.7.3}$$
dove abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder e l'invarianza dell'integrale rispetto alle traslazioni in $\mathbb{R}^n$. Abbiamo anche denotato con τ_h la famiglia di operatori di traslazione in h $\tau_h f(x) := f(x-h)$. Questa famiglia è continua rispetto h nel senso seguente.
Lemma: *Sia $1 \leq p < \infty$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $h^* = h^*(\epsilon)$ t.c.*
$$|h| < |h^*| \Longrightarrow ||\tau_h f - f||_p < \epsilon.$$
Infatti:
   - Prendiamo $\tilde{f} \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, continua con supporto compatto in K, t.c.
   $$||f - \tilde{f}||_p < \epsilon/3. \tag{2.7.4}$$
   Questo possiamo fare per la densità di $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
   - Per ogni $|h| \leq 1$, per esempio, tutti i supporti delle traslazioni $\tau_h \tilde{f}$ e quello di f sono contenuto in uno stesso compatto $\tilde{K}$, e, quindi,
   $$||\tau_h \tilde{f} - \tilde{f}||_p^p \leq \sup_{x \in \tilde{K}} |\tilde{f}(x-h) - \tilde{f}(x)|^p\,|\tilde{K}|, \tag{2.7.5}$$
   che possiamo rendere piccolo a piacere per $|h|$ piccolo perchè $\tilde{f}$ è uniformemente continua. In particolare, esiste $h^* = h^*(\epsilon)$ con $|h^*| \leq 1$ per cui la radice p-esima del membro sinistro in (2.7.5) è minore di $\epsilon/3$ per $|h| < |h^*|$.
   - Allora, per ogni $\epsilon > 0$ abbiamo
   $$\begin{aligned} ||\tau_h f - f||_p &\leq ||\tau_h(f - \tilde{f})||_p + ||\tau_h \tilde{f} - \tilde{f}||_p + ||\tilde{f} - f||_p \\ &= ||f - \tilde{f}||_p + ||\tau_h \tilde{f} - \tilde{f}||_p + ||\tilde{f} - f||_p < \epsilon \end{aligned}$$
   per $|h| < |h^*|$ usando (2.7.5) e (2.7.4).

   Quindi, la continuità uniforme segue dalla stima (2.7.3) ed il Lemma.

3. Per il caso $p = \infty$, basta scambiare i ruoli di f e g nel passo 2; cioè si trasla il fattore g.

$\square$

N.B. Di nuovo, il Teorema 2.7.5 ha la sua versione al livello degli spazi L^p, L^q, dove si può affermare che esiste un rappresentante uniformemente continua nella classe $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Chiudiamo questo paragrafo con qualche generalizzazione dei Teoremi 2.7.2 e 2.7.5.

2.7.6. Teorema (di Convoluzione di Young): *Siano $1 \leq p, q, r \leq \infty$ t.c.*

(i) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$;

(ii) $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Allora, si ha:

(a) *l'operatore* $* : \ L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ *è ben definito, bilineare, continuo*;

(b) *si ha la stima* $||f * g||_r \leq ||f||_p \, ||g|_q$.

2.7.7. Esercizio: Mostrare il Teorema di Convoluzione di Young (Teorema 2.7.6).

2.7.7. Osservazione: *Esistono delle versioni locali dei Teoremi* 2.7.2, 2.7.5, 2.7.6. *Ad esempio, abbiamo*

$$* : \ \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^p_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

dove $\mathcal{L}^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n) := \{g \in \text{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \ \text{supp}(g) \text{ compatto}\}$. *Vale anche un risultato analogo a Teorema 2.7.5..*

Lasciamo la dimostrazione di questa proposizione per esercizio. Anche proponiamo il seguente esercizio di natura semplice.

2.7.8 Esercizio:

(a) Verificare la formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g|(x) \, dx = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx\right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g| \, dx\right], \quad f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

(b) Calcolare $f * g$ per le funzioni caratteristiche su $\mathbb{R}$ definite da

$$f = \chi_{[0,1]} \ \text{ e } \ g = \chi_{[a,b]}.$$

2.8 Regolarizzazione ed approssimazione

L'obiettivo di questo paragrafo è di approssimare elementi in $\mathcal{L}^p(U), \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ via funzioni regolari, ad esempio, di classe C^∞. L'idea, dovuto a K. O. Friedrichs, è di approssimare f mediante una famiglia di convoluzioni $f_\epsilon := \varphi_\epsilon * f$ con $\epsilon > 0$ e φ_ϵ opportuno e regolare. Il punto è di mostrare la convergenza di f_ϵ ad f quando $\epsilon \to 0^+$. Sono importanti risultati di convergenza in norma L^p e anche puntuale (quasi-ovunque). Per avere risultati adatti ai problemi diversi, presentiamo sia versioni globali che locali. Trattiamo prima il caso globale degli spazi $\mathcal{L}^p(U)$ con particolare attenzione al caso $U = \mathbb{R}^n$. In particolare, mostriamo la densità di $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Poi, trattiamo il caso locale degli spazi $\mathcal{L}_{\text{loc}}(U)$ che è ben adatto allo studio della regolarità per soluzioni di equazioni alle derivate parziali.

Il caso globale $\mathcal{L}^p$

Iniziamo con un risultato di regolarizzazione che ci dice grosso modo che la convoluzione di due funzioni non è meno regolare della più regolare dei fattori. Per il momento lavoriamo in tutto lo spazio $U = \mathbb{R}^n$, ma verso la fine (in Osservazione 2.8.4) facciamo qualche commento sul caso generico di U aperto. In quello che segue, usiamo la seguente notazione per gli operatori di derivazione parziale:

$$D_{x_i} := \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$$

e per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1, \ldots\}^n$ si denota

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \circ D_{x_2}^{\alpha_2} \circ \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$$

dove l'ordine di D_x^α è $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots \alpha_n$.

2.8.1. Proposizione: (Regolarizzazione) *Siano* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Se* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *allora aa convoluzione* $\varphi * f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *e si può scaricare le derivate sul fattore regolare:*

$$D_x^\alpha(\varphi * f) = (D_x^\alpha \varphi) * f, \quad \forall\ |\alpha| \leq k. \tag{2.8.1}$$

In particolare, $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *se* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione:

1. Per ogni α con $0 \leq |\alpha| \leq k$, abbiamo $D_x^\alpha \varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ e quindi $D_x^\alpha \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi, per il Teorema 2.7.2, abbiamo $f * D_x^\alpha \varphi$ ben definita come un elemento di $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. In particolare, $f * \varphi$ e le funzioni nel membro destro di (2.8.1) sono ben definiti.

2. Abbiamo anche $D_x^\alpha \varphi \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ per ogni α t.c. $0 \leq |\alpha| \leq k$ dove p' è l'esponente coniugata di p. Quindi, per il Teorema 2.7.5, abbiamo anche $D_x^\alpha \varphi * f$ è (uniformemente) continua. In particolare, $\varphi * f$ e le funzioni nel membro destro di (2.8.1) sono continui. Quindi, rimane solo di mostrare che $D_x^\alpha(\varphi * f)$ esiste per ogni α e che valga (2.8.1).

3. Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ esiste $D_{x_i}(\varphi * f)$ e vale $D_{x_i}(\varphi * f) = (D_{x_i}\varphi) * f$. Infatti, poniamo $g = \varphi * f$ e calcoliamo il limite del rapporto incrementale

   $$\Delta_i^h g(x) := \frac{1}{h}[g(x + he_i) - g(x)] = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)[\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)]\, dy$$

   per $h \to 0$ in $\mathbb{R}$. Applicando il teorema del valor medio (di Lagrange), esiste h' con $|h'| < |h|$ t.c.

   $$\Delta_i^h g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D_{x_i}\varphi(x - y + h'e_i)\, dy. \tag{2.8.2}$$

   Ma, $D_{x_i}\varphi$ è continua con supporto compatto per cui $D_{x_i}(x - y + h'e_i) \to D_{x_i}(x - y)$ uniformemente in y con x fisso per $h \to 0$. Usando questa convergenza uniforme sul dominio di integrazione possiamo passare il limite sotto il segno dell'integrale in (2.8.2) per trovare

   $$D_{x_i}(\varphi * f)(x) = D_{x_i}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D_{x_i}\varphi(x - y)\, dy = (D_{x_i}\varphi * f)(x),$$

   la nostra affermazione.

4. Abbiamo che le prime derivate parziali di $\varphi * f$ esistono e sono continue. Iterando il passo 3 rispetto all'ordine delle derivate finisce la dimostrazione.

□

Il prossimo ingrediente consiste nella capacità di approssimare $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ mediante una successione di convoluzioni di f con una famiglia "autosimile" di funzioni in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ che diventano più concentrata e più "a picco" a variare di un piccolo parametro. La famiglia di operatori di convoluzione associata si chiama *un'approssimazione della identità* perchè si riproduce f nel limite rispetto la norma L^p.

2.8.2. Proposizione: (Approssimazione della identità) *Sia $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e definiamo la famiglia di funzioni φ_ϵ per $\epsilon > 0$ tramite*

$$\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\varphi(x/\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8.3}$$

in modo di avere per ogni $\epsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx \quad \text{e} \quad ||\varphi_\epsilon||_1 = ||\varphi||_1, \tag{2.8.4}$$

e per ogni $\delta > 0$ fisso

$$\int_{|x|>\delta} |\varphi_\epsilon(x)| \, dx \to 0 \ \text{ per } \ \epsilon \to 0^+. \tag{2.8.5}$$

Se $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p < \infty$, allora la famiglia $f_\epsilon = \varphi_\epsilon * f$ soddisfa:

$$f_\epsilon \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \ \text{ con } \ ||f_\epsilon||_p \le ||\varphi||_1 \, ||f||_p; \tag{2.8.6}$$

$$||f_\epsilon - f||_p \to 0 \ \text{ per } \ \epsilon \to 0^+. \tag{2.8.7}$$

Dimostrazione:

1. Le affermazioni in (2.8.4) seguono facilmente dal cambiamento di variabili $y = x/\epsilon$; ad esempio
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n}\varphi(x/\epsilon) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \, dy.$$

2. In modo analogo, fissiamo $\delta > 0$ e scegliamo $y = x/\epsilon$ per trovare
$$\int_{|x|>\delta} |\varphi_\epsilon(x)| \, dx = \int_{|y|>\delta/\epsilon} |\varphi(y)| \, dy.$$
Essendo $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\delta/\epsilon \to +\infty$ abbiamo la affermazione (2.8.5).

3. La affermazione (2.8.6) segue immediatamente dal Teorema 2.7.2.

4. Per mostrare la convergenza in (2.8.7), sfruttiamo la prima parte di (2.8.4) per scrivere
$$f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\epsilon(y) \, dy.$$
Quindi abbiamo
$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \, \varphi_\epsilon(y) \, dy \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \, |\varphi_\epsilon(y)|^{1/p} |\varphi_\epsilon(y)|^{1/p'} \, dy \end{aligned}$$

dove $1/p' = 0$ nel caso $p = 1$. Usando la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x) - f(x)| &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, |\varphi_\epsilon(y)| \, dy\right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\epsilon(y)| \, dy\right]^{1/p'} \\ &= ||\varphi||_1^{1/p'} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, |\varphi_\epsilon(y)| \, dy\right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Integrando la potenza p di quest'ultima disuguaglianza e sfuttando il Teorema di Tonelli si trova

$$\begin{aligned} ||f_\epsilon - f||_p^p &\leq ||\varphi||_1^{p/p'} \int_{R^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, |\varphi_\epsilon(y)| \, dy\right]^{1/p} dx \\ &= ||\varphi||_1^{p/p'} \int_{R^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, |\varphi_\epsilon(y)| \, dx\right]^{1/p} dy \\ &= ||\varphi||_1^{p/p'} \int_{R^n} |\varphi_\epsilon(y)| \, ||f(\cdot - y) - f(\cdot)||_p^p \, dy \\ &:= ||\varphi||_1^{p/p'} \int_{R^n} |\varphi_\epsilon(y)| \, G(y) \, dy, \end{aligned}$$

dove $G(y) = ||f(\cdot - y) - f(\cdot)||_p^p \to 0$ per $|y| \to 0$. Quindi, dato $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $0 \leq G(y) < \eta$ per $|y| < \delta$. Usiamo questo controllo su G per spezzare l'ultimo integrale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} ||f_\epsilon - f||_p^p &\leq ||\varphi||_1^{p/p'} \left(\int_{|y|<\delta} |\varphi_\epsilon(y)| \, G(y) \, dy + \int_{|y|\geq\delta} |\varphi_\epsilon(y)| \, G(y) \, dy\right) \\ &\leq ||\varphi||_1^{p/p'} \left(\eta ||\varphi||_1 + \int_{|y|\geq\delta} |\varphi_\epsilon(y)| \, G(y) \, dy\right). \end{aligned}$$

Ma, G è anche limitata. Infatti $||f(\cdot - y) - f(\cdot)||_p^p \leq 2^p ||f||_p^p$. Quindi abbiamo

$$||f_\epsilon - f||_p^p \leq \eta ||\varphi||_1 + 2^p ||f||_p^p ||\varphi||_1 \int_{|y|\geq\delta} |\varphi_\epsilon(y)| \, dy.$$

Usando la proprietà (2.8.5), abbiamo

$$\limsup_{\epsilon \to 0} ||f_\epsilon - f||_p^p \leq \eta ||\varphi||_1,$$

con $\eta > 0$ arbitrario, da cui la tesi (2.8.7).

□

Combinando le Proposizioni 2.8.1 e 2.8.2 si vede che data $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ si può scrivere f come un limite in norma L^p di funzioni $f_\epsilon = \varphi_\epsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni scelta di una funzione $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nel linguaggio di spazi funzionali, abbiamo la densita di $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ dove va notato che $C^\infty(\mathbb{R}^n) \not\subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Aggiustando leggermente la costruzione, si può mostrare invece il seguente risultato di densità.

2.8.3. Teorema: *Sia $1 \leq p < \infty$. Allora $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione: Fissiamo una rappresentante $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ di una qualsiasi classe $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dato $\eta > 0$ possiamo scrivere $f = g + h$ dove $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con supporto di g contenuto in un compatto K e $||h||_p < \eta$. Scegliamo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto di φ in $B_1(0)$, ad esempio. Poniamo $g_\epsilon = g * \varphi_\epsilon$ e abbiamo $g_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con convergenza in norma ad g (per Proposizione 2.8.2). Inoltre, g_ϵ ha supporto compatto. Infatti,

$$g_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy = \int_K g(y)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy,$$

ma $\text{supp}(\varphi_\epsilon) \subset B_\epsilon(0)$ e, quindi, l'integrale vale 0 per ogni x fuori di un ϵ-intorno di K. Abbiamo $g_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e affermiamo che $g_\epsilon \to f$ in norma L^p. Infatti,

$$\begin{aligned} ||f - g_\epsilon||_p &= ||g + h - g_\epsilon||_p \leq ||h||_p + ||g_\epsilon - g||_p \\ &\leq \eta + ||g_\epsilon||_p < 2\eta. \end{aligned}$$

per ϵ abbastanza piccola. Ma questa è la densita cercata essendo $\eta > 0$ arbitrario.

□

2.8.4. Osservazione: *I risultati sopra sono state enunciati per il caso $U = \mathbb{R}^n$. Nel caso di U misurabile e $f \in \mathcal{L}^p(U)$, possiamo definire $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ via il prolungamento banale, $\tilde{f} = 0$, su $\mathbb{R}^n \setminus U$. Si pone*

$$f_\epsilon(x) := (\varphi_\epsilon * f)(x), \quad x \in U \tag{2.8.8}$$

per $\varphi \in \mathcal{L}^(\mathbb{R}^n)$. La convergenza in norma L^p analoga a quella di Proposizione 2.8.2 è vero per $\mathcal{L}^p(U)$. Se inoltre U è aperto (in modo di essere in grado di definire $C^k(U)$ ad esempio) allora la regolarizzazione analoga a quella di Proposizione 2.8.1 è vera con $C^k(U)$ al posto di $C^k(\mathbb{R}^n)$ e $\tilde{f}$ al posto di f in (2.8.1).

2.8.5. Esercizio: Verificare le affermazioni nella Osservazione 2.8.4.

Finiamo le considerazioni nel caso globale con la questione di convergenza puntuale di f_ϵ verso f. Scegliendo $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e combinando la convergenza in norma L^p (Proposizione 2.8.2) e la relazione fra convergenza in norma L^p e convergenza puntuale (Teorema 2.4.2), possiamo trovare una successione f_{ϵ_j} che tende ad f quasi-ovunque. Però non abbiamo ancora controllo su dove c'e' convergenza puntuale. Possiamo sfruttare il Teorema di Differenziazione di Lebesgue per mostrare il seguente risultato dove per abbiamo bisogno di $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ con qualche proprietà in più. Un'esempio di tale φ è data in Esempio 2.8.? sotto.

2.8.5. Proposizione: (Convergenza quasi-ovunque) *Siano $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ t.c. φ è non-negativa, ha supporto compatto in $B_1(0)$, e soddisfa $||\varphi||_1 = 1$. Allora per ogni x nell'insieme di Lebesgue* Leb(f)*, si ha*

$$f_\epsilon(x) = (f * \varphi_\epsilon)(x) \to f(x). \tag{2.8.9}$$

In particolare, $f_\epsilon \to f$ quasi-ovunque in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione: Usando $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy = 1$ per ogni x e $\mathrm{supp}(\varphi_\epsilon) = B_\epsilon(0)$, si ha

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy \right| \\ &= \left| \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)\,[f(y)-f(x)]\,dy \right| \\ &\le \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B_\epsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)|f(y)-f(x)|\,dy \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la positività di φ. Adesso usando la limitatezza di φ si trova

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| \le \alpha(n)\sup_{\mathbb{R}^n}|\varphi|\frac{1}{|B_\epsilon(x)|}\int_{B_\epsilon(x)} |f(y)-f(x)|\,dy. \tag{2.8.10}$$

Essendo $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, possiamo usare il Teorema di Differenziazione di Lebegue. Quindi, per ogni $x \in \mathrm{Leb}(f)$ il membro destro di (2.8.10) tende ad 0 quando $\epsilon \to 0^+$, da cui l'affermazione (2.8.9). Si ricorda che quasi ogni x è un punto di Lebesgue di f. □

Il caso locale $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$

Adesso affrontiamo il problema di regolarizzazione ed approssimazione nei spazi locali $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per mostrare, una volta per tutto, che valgono risultati analoghi a tutti quelli del caso globale, richiediamo che la funzione φ sia veramente buona.

2.8.6. Definizione: *Una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si chiama mollificatore se*

(i) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\varphi \ge 0$;

(iii) $||\varphi||_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

Si vede che un mollificatore è ammissibile per tutti i risultati enunciati nel caso globale. In particolare, definierà un'approssimazione della identità essendo un elemento di $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, avrà la properietà di regolarizzare f essendo $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e gode di tutte le proprietà usata nel risultato di convergenza quasi-ovunque. Notiamo che tali funzioni esistono.

2.8.7. Esempio: (il mollificatore canonico) La seguente funzione soddisfa le proprietà (i), (ii), (iii) e ha il suo supporto nella palla unitaria $\overline{B}_1(0)$:

$$\varphi(x) := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases}, \tag{2.8.11}$$

dove $C > 0$ è scelta per avere $||\varphi||_1 = 1$.

Anche se ormai devono essere chiare, diamo un'elenco delle proprietà principale della famiglia $\{\varphi_\epsilon :\ \epsilon > 0\}$ definita da φ.

2.8.8. Proposizione: *Sia φ un mollificatore. Allora*

$$\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(x/\epsilon), \quad \epsilon > 0, \tag{2.8.12}$$

definisce una famiglia di mollificatori; cioè per ogni $\epsilon > 0$, φ_ϵ è un mollificatore nel senso di Definizione 2.8.6. Inoltre, valgono le seguenti affermazioni:

(iv) *Se* $\text{supp}(\varphi) \subset \overline{B}_1(0)$, *allora* $\text{supp}(\varphi_\epsilon) \subset \overline{B}_\epsilon(0) \to \{0\}$, *per* $\epsilon \to 0^+$;

(v) *Se* $\sup_{\mathbb{R}^n}[\varphi] = M$, *allora* $\sup_{\mathbb{R}^n}[\varphi_\epsilon] = M/\epsilon^n \to +\infty$, *per* $\epsilon \to 0^+$.

Lasciamo per esercizio la verifica di queste proprietà che sono alle base del metodo di mollificatori di Friedrichs (vedi K. O. Friedrichs, The identity of weak and strong differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944), 132-151.). Il nostro trattamento è una rilettura moderno, vedi ad esempio il libro di Evans [1].
Adesso definiamo il processo di regolarizzazione ed approssimazione nel caso locale in un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dove denotiamo con

$$U_\epsilon := \{x \in U : \ \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}, \tag{2.8.13}$$

il sottoinsieme di U nel cui sarà definita la famiglia di approssimazioni di f senza di aver bisogno di qualche estensione di f in un intorno di U. Nel caso, $U = \mathbb{R}^n$, abbiamo $U_\epsilon = \mathbb{R}^n$ per ogni $\epsilon > 0$.

2.8.9. Definizione: *Sia* $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$. *La* <u>*mollificazione di* f *(via* φ*)*</u> *è definita da* $f_\epsilon := \varphi_\epsilon * f$ *in* U_ϵ*; cioè:*

$$f_\epsilon(x) := \int_U \varphi_\epsilon(x-y) f(y)\, dy, \quad x \in U_\epsilon \quad (\text{dist}(x, \partial U) > \epsilon). \tag{2.8.14}$$

N.B. La funzione f_ϵ è ben definita; in particolare:

1. Come abbiamo già visto, φ_ϵ ha supporto in $\overline{B}_\epsilon(0)$. Quindi, per ogni x fissato, la traslata $\varphi_\epsilon(x-y)$ ha supporto $y \in \overline{B}_\epsilon(x) \subset U$ se $x \in U_\epsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \int_{\{y \in U : |x-y| < \epsilon\}} \varphi_\epsilon(x-y) f(y)\, dy, \quad x \in U_\epsilon \\ &= \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) f(y)\, dy, \quad x \in U_\epsilon. \end{aligned} \tag{2.8.15}$$

   Quindi, f_ϵ è ben definita in U_ϵ essendo la convoluzione di una funzione $\varphi_\epsilon \in \mathcal{L}^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$ e una funzione $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, dove si può prendere il prolungamento da zero di f fuori da U, perchè l'integrale si calcola su $B_\epsilon(x) \subset U$.

2. Facendo il semplice cambiamento di variabili $y' = x - y$ si trova

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(y') f(x-y')\, dy', \quad x \in U_\epsilon \\ &= \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(y) f(x-y)\, dy, \quad x \in U_\epsilon, \end{aligned} \tag{2.8.16}$$

   ovvero, $f_\epsilon = \varphi_\epsilon * f$ in U_ϵ. Le due formule (2.8.15) e (2.8.16) sono equivalenti, ma hanno delle utilità diverse quando si considerano incrementi in x; l'effetto di tale incremento è sentito da solo uno dei due fattori f, φ_ϵ.

3. Essendo $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(U) \subset \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ per ogni $p \geq 1$, la formula (2.8.15) (oppure (2.8.16)) continua a definire la mollificazione di una funzione localmente $\mathcal{L}^p(U)$ per ogni $p > 1$.

4. A maggior ragione, la mollificazione di funzioni $\mathcal{L}^p(U)$ è ben definita tramite questa versione locale, incluso il caso "semplice" di $U = \mathbb{R}^n$, dove ricordiamo $U_\epsilon = \mathbb{R}^n$ in questo caso.

Il risultato principale di questo paragrafo, ed il capolinea della prima parte del corso, è il seguente teorema.

2.8.5. Teorema (Mollificazione in spazi locali): *Sia $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora, la mollificazione f_ϵ di f soddisfa le seguente proprietà:*

(a) $f_\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$;

(b) $f_\epsilon \to f$ *q.o. in U. Più precisamente, c'è convergenza sull'insieme di Lebesgue di f;*

(c) *Se inoltre $f \in C^0(U)$, la convergenza $f_\epsilon \to f$ è uniforme su i sottoinsiemi compatti di U;*

(d) *Se $f \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(U)$ con $1 \le p < \infty$, abbiamo la convergenza $f_\epsilon \to f$ in $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(U)$; cioè, per ogni $V \subset\subset U$, abbiamo $||f_\epsilon - f||_{p,V} \to 0$.*

Abbiamo usato la notazione comune $V \subset\subset U$ per indicare che V è un sottoinsieme di U aperto dove $\overline{V} \subset U$; cioè, V ha chiusura compatta in U. Anche se la dimostrazione è molto simile ai pezzi relativi nel caso globale, presentiamo una dimostrazione completa cercando di sottolineare le somiglianze con il caso globale e le differenze. Il problema principale è di tener conto del dominio in cui è ben definito il processo.

Dimostrazione:

1. Regolarità: Fissiamo $x \in U_\epsilon$ e $1 \le i \le n$. Mostreremo solo che esiste la derivata parziale $(D_{x_i} f_\epsilon)(x)$. Poi, si procede per iterazione di stabilire l'esistenza delle derivate di ordine superiore.

   - Per ogni $|h|$ piccolo, $x + he_i \in U_\epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ piccolo (basta prendere $|h| < \text{dist}(x, \partial U_\epsilon)$). Quindi, possiamo calcolare il rapporto incrementale come abbiamo fatto in Proposizione 2.8.1: per ogni $x \in U_\epsilon$ si ha

$$\begin{aligned} \Delta_i^h f_\epsilon(x) &:= \frac{1}{h}\left[f_\epsilon(x+he_i) - f_\epsilon(x)\right] \\ &= \frac{1}{h}\int_U \left[\varphi_\epsilon(x+he_i-y) - \varphi_\epsilon(x-y)\right] f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_U \frac{1}{h}\left[\varphi\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\,dy, \end{aligned} \tag{2.8.17}$$

   - Notiamo che il rapporto incrementale nella funzione integranda in (2.8.17) ha supporto in $B_\epsilon(x+he_i) \cup B_\epsilon(x) := V$, dove $V \subset\subset U$. Quindi, per questo rapporto incrementale abbiamo

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left[\varphi\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right]\right) = D_{x_i}\left(\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right) = \frac{1}{\epsilon}D_{x_i}\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right), \tag{2.8.18}$$

   dove la convergenza è uniforme per $y \in V$ e $x \in U_\epsilon$ fisso.

   - Combinando (2.8.17) e (2.8.18) abbiamo per ogni $x \in U_\epsilon$

$$\lim_{h\to 0} \Delta_i^h f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\int_V \frac{1}{\epsilon} D_{x_i}\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) f(y)\,dy,,$$

   ovvero, per ogni $x \in U_\epsilon$:

$$D_{x_i} f_\epsilon(x) = \int_U \frac{1}{\epsilon^{n+1}} D_{x_i}\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) f(y)\,dy.$$

Quindi, abbiamo

$$D_{x_i} f_\epsilon(x) = (D_{x_i}\varphi_\epsilon * f)(x), \quad x \in U_\epsilon, \tag{2.8.19}$$

ed esistono le derivate parziali del primo ordine in U_ϵ con la formula (2.8.8).

- Poi, in modo tutto analogo si mostra

$$D_x^\alpha f_\epsilon(x) = (D_x^\alpha \varphi_\epsilon * f)(x), \quad x \in U_\epsilon,$$

e, quindi, $f_\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.

2. Convergenza quasi-ovunque: la dimostrazione è esattamente quella usata nel caso globale (Proposizione 2.8.5). Per ogni $x \in \mathrm{Leb}(f)$, abbiamo (ricordando $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy = 1$ e $\mathrm{supp}(\varphi_\epsilon) = B_\epsilon(0)$)

$$\begin{aligned}
|f_\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)\,[f(y)-f(x)]\;dy \right| \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) |f(y)-f(x)|\;dy \\
&\leq \alpha(n) \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \int_{B_\epsilon(x)} |f(y)-f(x)|\;dy \to 0, \quad x \in \mathrm{Leb}(f),
\end{aligned}$$

e, quindi, la convergenza quasi-ovunque.

3. La convergenza uniforme sui compatti (se f è continua): Dato $V \subset\subset U$, vogliamo mostrare che la convergenza è uniforme su V. Scegliamo un altro aperto W t.c. $V \subset\subset W \subset\subset U$. Abbiamo f uniformemente continua su W, e quindi abbiamo la tesi del Teorema di Differenziazione di Lebesgue

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(x)-f(y)|\;dy = 0,$$

dove la convergenza è uniforme per $x \in V$. Quindi, per il passo 2, abbiamo la convergenza uniforme su V di $|f_\epsilon(x) - f(x)|$ ad zero.

4. Una stima a priori: *Siano $1 \leq p < \infty$ e $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(U)$. Se $V \subset\subset W \subset\subset U$, allora:*

$$\forall\ \epsilon > 0 \text{ piccolo } \quad ||f_\epsilon||_{p,V} \leq ||f||_{p,W}. \tag{2.8.20}$$

- Per ogni $x \in V$, usando la disuguaglianza di Hölder, abbiamo

$$\begin{aligned}
|f_\epsilon(x)| &\leq \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)^{1/p'} \varphi_\epsilon(x-y)^{1/p} |f(y)|\,dy \\
&\leq \left[\int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy\right]^{1/p'} \left[\int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right]^{1/p},
\end{aligned} \tag{2.8.21}$$

usando il fatto che l'integrale di φ_ϵ vale 1.

- Integrando (2.8.21) su V e scambiando l'ordine di integrazione si trova

$$\begin{aligned} \int_V |f_\epsilon(x)|^p \, dx &\leq \int_V \left(\int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)|f(y)|^p \, dy \right) dx \\ &\leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B_\epsilon(y)} \varphi_\epsilon(x-y) \, dx \right) dy, \end{aligned} \tag{2.8.22}$$

  dove si nota la presenza dell'insieme W in (2.8.22) e abbiamo usato la non-negatività della funzione integranda. Con W fissato, la formula (2.8.22) vale per ogni $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo. Di nuovo, l'integrale di φ_ϵ vale 1, e abbiamo

$$||f_\epsilon||_{p,V}^p \leq ||f||_{p,W}, \quad \epsilon > 0 \text{ piccolo},$$

  che è la nostra stima.

5. La convergenza $||f_\epsilon - f||_{p,V} \to 0$ per ogni $V \subset\subset U$:

- Sia $\delta > 0$, prendiamo $g \in C^0(W)$ t.c. $||f - g||_{p,W} < \delta$.
- Si stima:

$$\begin{aligned} ||f_\epsilon - f||_{p,V} &\leq ||f_\epsilon - g_\epsilon||_{p,V} + ||g_\epsilon - g||_{p,V} + ||g - f||_{p,V} \\ &\leq 2||f - g||_{p,W} + ||g_\epsilon - g||_{p,V} \\ &\leq 2\delta + ||g_\epsilon - g||_{p,V} \end{aligned}$$

  dove il termine rimanente tende ad zero perchè la convergenza è uniforme su V (passo 3 applicato a g).
- Quindi, per ogni $\delta > 0$:

$$\limsup_{\epsilon \to 0^+} ||f_\epsilon - f||_{p,V} \leq 2\delta,$$

  e, quindi, il risultato

.

$\square$

N.B. Nel caso $U = \mathbb{R}^n$, la dimostrazione è più facile, e l'ultima parte dice $f \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \implies ||f_\epsilon - f||_{p,V} \to 0$ per ogni $V \subset\subset \mathbb{R}^n$

Commento finale: Ci sono tante altre varianti di questi processi di approssimazione nel libro di Wheeden-Zygmund [11], dove il punto è che si può scegliere dei *nuclei* diversi del nostro $K(x,y) = \varphi_\epsilon(x-y)$ in una trasformazione integrale del tipo

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) \, dy.$$

Vari casi di K particolare sono di uso comune nell'analisi di Fourier, come sarà caso di vedere nella seconda parte del corso. Inoltre, la versione locale presentata qui con il mollificatore canonico radiale (Esempio 2.8.7) viene usato nel discorso sugli spazi di Sobolev e regolarità all'interno per equazioni uniformemente ellittiche nel corso di Equazioni alle Derivate Parziali I. Invece, per risultati di regolarità al bordo o per equazioni degenere, spesso conviene scegliere un mollificatore con una simmetria minore o solo in qualche direzione.

2.9 Dimostrazione del Teorema di Rappresentazione di Riesz

In questo paragrafo, che è facoltativo nell'ambiente del corso, presentiamo la dimostrazione del Teorema 2.5.11. Ricordiamo il suo enunciato:

Teorema (di Rappresentazione di Riesz): *Siano $1 \leq p < \infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| > 0$. Allora, per ogni $l \in (L^p(E))'$ esiste un'unica $g \in L^{p'}(E)$ t.c. $l = l_g$. Inoltre, abbiamo $||l||_{(L^p(E))'} = ||g||_{p'}$; cioè la mappa l definita in Teorema 2.5.9 è un'isometria.*

La strategia della dimostrazione sarà di spezzare di due casi, cioè

A. Il caso $|E| < +\infty$: si usa il Teorema di Radon-Nikodym qui.

B. Il caso $|E| = +\infty$: si usa approssimazione del dominio con domini di misura finita, il caso **A**, ed il Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue.

Dimostrazione nel caso A: Assumiamo $|E| < +\infty$.

1. Sia $l \in L^p(E)'$ e denotiamo con $m = |||l||| = ||l||_{(L^p(E))'}$, la norma del funzionale lineare continua l. Usando l, definiamo una funzione di insiemi $\nu : \mathcal{M}(E) \to (-\infty, +\infty)$ con la regola
$$\nu(A) := l(\chi_A). \tag{2.9.1}$$
Essendo $|E| < +\infty$, abbiamo $\chi_A \in \mathcal{L}^p(E)$ e ν è ben definita. Inoltre, abbiamo$||\chi_A||_p = |A|^{1/p}$

2. $\nu : \mathcal{M}(E) \to \mathbb{R}$ è una *misura sigma-finita con segno* su $(E, \mathcal{M}(E))$; cioè:
   (i) $\nu(\emptyset) = 0$;
   (ii) $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum j = 1^{+\infty}\nu(A_j)$ *se* $\{A_j\} \subset \mathcal{M}(E)$ *disgiunti*;
   (iii) $|\nu|$ *è σ-finita; cioè esiste una collezione* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(E)$ *t.c.* $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ *e* $|\nu(A_j)| < +\infty$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$.

   Infatti:

   - $|\nu(A)| = |\,l(\chi_A)| \leq m||\chi_A|| = m|A|^{1/p}$, e, quindi abbiamo (i).
   - $|\nu|(E) := |\nu(E)| \leq m|E|^{1/p} < +\infty$, e, quindi abbiamo banalmente la proprietà (iii).
   - Se $A = \bigcup_{j=1}^{N} A_j$ con $\{A_j\}$ disgiunti, allora
   $$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) &= l\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{N} A_j}\right) = l\left(\sum_{j=1}^{N} \chi_{A_j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{N} l\left(\chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} \nu(A_j),\end{aligned}$$
   e, quindi, ν è *finitamente additiva*.
   - Se invece, $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$ con $\{A_j\}$ disgiunti, spezziamo
   $$A := A' \cup A'' := \left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=n+1}^{+\infty} A_j\right),$$

e abbiamo, dal passo precedente,

$$\nu(A) = \nu(A') + \nu(A'') = \sum_{j=1}^{N} \nu(A_j) + \nu(A''),$$

ma

$$|\nu(A'')| \leq m|A''|^{1/p} = m \left| \bigcup_{j=n+1}^{+\infty} A_j \right| \to 0 \text{ per } N \to +\infty.$$

Quindi, abbiamo $\nu(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \nu(A_j)$, ovvero, la proprietà (ii).

3. La misura ν è *assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue*; cioè

$$|A| = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0, \quad \forall\ A \in \mathcal{M}(E). \tag{2.9.2}$$

Infatti, abbiamo la stima $|\nu(A)| \leq m|A|^{1/p}$.

4. Adesso, si può applicare il Teorema di Radon-Nikodym (vedi Teorema 2.12.14 del libro di Friedman [4]:

Teorema (di Radon-Nikodym): *Sia ν una misura σ-finita con segno sullo spazio di misura di Lebesgue $(E, \mathcal{M}(E), |\cdot|)$. Se ν è assolutamente continua rispetto la misura di Lebesgue $|\cdot|$, allora:*

(a) *esiste $g \in \text{mis}(E, \mathbb{R})$ t.c.*

$$\nu(A) = \int_A g\, dx, \quad \forall\ A \in \mathcal{M}(E) \ \ t.c.\ |\nu(A)| < +\infty; \tag{2.9.3}$$

(b) *se g_1 è un altro rappresentante di ν, allora $g = g_1$ q.o. rispetto alla misura di Lebesgue.*

La funzione $g \in \text{mis}(E, \mathbb{R})$ nella tesi del Teorema è il nostro candidato per la funzione che rappresenta l, dove notiamo che g è un elemento di $\mathcal{L}^1(E)$ perchè $|E| < +\infty$. Infatti,

$$\begin{aligned} \int_E |g|\, dx &= \int_E g^+\, dx + \int_E g^-\, dx \\ &= \int_{A^+} g\, dx - \int_{A^-} g\, dx := \nu(A^+) - \nu(A^-), \end{aligned}$$

dove $A^\pm := \{x \in E : \ \pm g(x) \geq 0\}$. Ma, l'ultima espressione è finita perchè $A^\pm \subset E$ con $|E| < +\infty$.

5. Per costruzione, abbiamo la rappresentazione desiderata se $f = \chi_A$ è una funzione caratteristica. Infatti, per ogni $A \in \mathcal{M}(E)$

$$l(\chi_A) := \nu(A) = \int_A g\, dx = \int_E \chi_A g\, dx$$

e, quindi, per linearità abbiamo la rappresentazione per ogni f semplice, misurabile, ovvero

$$l(f) = l\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{A_j}\right) = \int_E \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{A_j}\right) g\, dx, \quad \forall\ \alpha_j \in \mathbb{R}, A_j \in \mathcal{M}(E).$$

Vogliamo questa formula per un $f \in \mathcal{L}^p(E)$ qualsiasi.

6. **Affermazione 1:** *Valgono* $g \in \mathcal{L}^p(E)$ *e* $||g||_{p'} \le m = |||\, l\,|||$.
Infatti, per $1 < p < \infty$, la funzione $|g|^{p'}$ è misurabile e non-negativa, e, quindi, esiste una successione di funzioni semplici, misurabili $\{h_k\}$ t.c.
$$0 \le h_k \nearrow |g|^{p'}, \quad \text{per } k \to +\infty, \tag{2.9.4}$$
(vedi Teorema 4.13 di [11]). Definiamo $g_k := h_k^{1/p}\text{sign}(g)$. L'affermazione dipende dalle proprietà delle successioni $\{h_k\}, \{g_k\}$, per cui vogliamo applicare il Teorema della convergenza monotona (vedi Teorema 5.6 di [11]).

   - Abbiamo:
   $$||g_k||_p^p = \int_E h_k\, dx = ||h_k||_1,$$
   e, quindi, $||g_k||_p = ||h_k||_1^{1/p}$.
   - Essendo g_k semplice, possiamo usare il passo 5 per trovare
   $$\int_E g_k g\, dx = l(g_k) \le m||g_k||_p \le m||h_k||_1^{1/p}. \tag{2.9.5}$$
   - La successione $\{h_k\}$ è limitata in norma $L^1(E)$. Infatti, abbiamo $g_k g = h_k^{1/p} g\,\text{sign}(g) = h_k^{1/p}|g|$, ma $|g| \ge (h_k)^{1/p'}$ per (2.9.4), e, quindi, $g_k g \ge (h_k)^{1/p+1/p'} = h_k$, perciò
   $$||h_k||_1 \le ||g_k g||_1 \le m||h_k||_1^{1/p}, \tag{2.9.6}$$
   per (2.9.5). Possiamo assumere $||h_k||_1 \ne 0$ per k grande; altrimenti, $g = 0$ q.o. e abbiamo il caso banale $l = 0$. Quindi, possiamo riscrivere (2.9.6) come
   $$||h_k||_1 \le m^{p'} = |||\, l\,|||^{p'}, \quad \text{per ogni } k \text{ grande}. \tag{2.9.7}$$
   - Quindi, abbiamo le ipotesi (2.9.4), (2.9.7) del Teorema di Convergenza Monotona, per cui concludiamo $|g|^{p'} \in \mathcal{L}^1(E)$ e $||\,|g|^{p'}\,||_1 \le m^{p'}$, ovvero, $||g||_{p'}^{p'} \le m^{p'}$.
   - Il caso $p = 1$ è analogo, e abbiamo Affermazione 1.

7. **Affermazione 2:** *Vale* $l(f) = \int_E fg\, dx$ *per ogni* $f \in \mathcal{L}^p(E)$.

   - Possiamo approssimare f mediante funzioni semplici; cioè esistono $\{f_k\}$ semplici t.c. $||f_k - f||_p \to 0$.
   - Per la continuità di l abbiamo
   $$\int_E f_k g\, dx = l(f_k) \to l(f) \in \mathbb{R}. \tag{2.9.8}$$
   - Ma abbiamo anche
   $$\int_E f_k g\, dx \to \int_E fg\, dx \tag{2.9.9}$$
   per la disuguaglianza di Hölder. Infatti,
   $$\left|\int_E (f_k - f)\, dx\right| \le ||f_k - f||_p\, ||g||_{p'} \to 0.$$
   - Combinando (2.9.8) e (2.9.9) abbiamo l'Affermazione 2.

8. Dall'Affermazione 2, abbiamo anche la stima

$$|l(f)| \leq ||f||_p \, ||g||_{p'},$$

ovvero, la stima $m = |||\, l||| \leq ||g||_{p'}$. Ma, dal passo 6, abbiamo anche $m \geq ||g||_{p'}$, e, quindi $|||\, l||| = ||g||_{p'}$.

9. l'uncitià della classe $L^{p'}(E)$ di g segue dal Teorema di Radon-Nikodym, e la dimostrazione nel caso $|E| < +\infty$ è completa. $\square$

Dimostrazione nel caso B: Assumiamo $|E| = +\infty$. Sia $l \in (L^p(E))'$.

1. La misura $\mu = |\cdot|$ è σ-finita, e , quindi esiste una successione numerabile di insiemi $\{E_j\}$ t.c. $|E_j| < +\infty$ e $E_j \nearrow E$. Abbiamo per ogni $j \in \mathbb{N}$, $l_{|L^p(E_j)} \in (L^p(E_j))'$. Quindi, per il caso A, esistono $g_j \in \mathcal{L}^{p'}(E_j)$ (uniche classi in $L^{p'}(E_j)$) t.c.

$$||g_j||_{p',E_j} \leq ||\, l||_{(L^p(E))'}; \tag{2.9.10}$$

$$l(f) = \int_{E_j} f g_j \, dx, \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^p(E) \;\text{ t.c. }\; f = 0 \text{ su } E \setminus E_j. \tag{2.9.11}$$

Siano j fisso e $f = 0$ su E_j^c. Essendo $E_j \subset E_{j+1}$, abbiamo anche

$$l(f) = \int_{E_{j+1}} f g_{j+1} \, dx = \int_{E_j} f g_{j+1} \, dx, \quad \forall\, f \in L^p(E), f = 0 \text{ su } E_j^c$$

e, quindi $g_{j+1} = g_j$ q.o. in E_j. Ridefinendo $\{g_j\}$, se è necessario, possiamo assumere $g_{j+1} = g_j$ in E_j.

2. Definiamo una funzione g su tutto E tramite la regola

$$g(x) = g_j(x) \;\text{ se }\; x \in E_j.$$

Abbiamo $g \in \text{mis}(E, \mathbb{R})$ e $||g||_{p'} \leq ||\, l||_{(L^p(E))'}||$. Per ogni $f \in \mathcal{L}^P(E)$, abbiamo

$$l(f\chi_{E_j}) = \int_{E_j} f g_j \, dx = \int_{E_j} f g \, dx,$$

ma $f\chi_{E_j} \to f$ in $L^p(E)$, e, quindi

$$\int_{E_j} f g \, dx = l(f\chi_{E_j}) \; tol(f) \;\text{ in } \mathbb{R}.$$

Ma

$$\int_{E_j} f g = \int_E \chi_{E_j} f g \, dx \to \int_E f g \, dx,$$

per il Teorema di Convergenza Dominata (vedi Teorema 5.36 di [11]). Quindi, abbiamo $l(f) = \int_E f g \, dx$ per ogni $f \in \mathcal{L}^p(E)$ ed inoltre $|||\, l||| = ||g||_{p'}$.

$\square$

Finiamo questo paragrafo con una osservazione importante. Il Teorema di Rappresentazione di Riesz prende una forma diversa per il caso $p = \infty$; cioè non è vero che $(L^\infty(E))' = L^1(E)$. Infatti, il duale di $L^\infty(E)$ è molto più grande.

2.9.1. Esempio: Definiamo un'applicazione lineare $l : C^0([-1,1]) \to \mathbb{R}$ via la formula

$$l(f) = f(0), \tag{2.9.12}$$

cioè il funzionale di valutazione in $x = 0$. Questa mappa ha un prolungamento allo spazio $L^\infty(E)$ con $E = [-1,1]$ che **non** è rappresentabile come integrazione contro una funzione $g \in \mathcal{L}^1([-1,1])$.

L'idea della verifica è la seguente.

1. La mappa definita da (2.9.12) è lineare e soddisfa

   $$|l(f)| = |f(0)| \le \sup_E |f|.$$

   Quindi, per un risultato basilare del corso Analisi Funzionale, il *Teorema di Hahn-Banach*, esiste un prolungamento continuo

   $$\bar{l} : L^\infty(E) \to \mathbb{R};$$

   cioè, $\bar{l} = l$ su $C^0(E)$ e $|||\bar{l}||| \le ||f||_\infty$.

2. Assumiamo, per assurdo, che esiste $g \in \mathcal{L}^1(E)$ t.c. $\bar{l}(f) = \int_E fg\,dx$ per ogni $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$. Testando $\bar{l}$ su tutte le funzioni $f \in C^0(E)$ che si annullano in 0 si trova $\bar{l}(f) = l(f) = f(0) = 0$. Quindi, $g = 0$ q.o., assurdo.

Il funzionale $\bar{l}$ è, in realtà, una *distribuzione*, la *distribuzione δ di Dirac*.

Bibliography

[1] L. C. Evans - *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **19**, American Mathematical Society, Providence, 1998..

[2] L. C. Evans & R. F. Gareipy - *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[3] G. B. Folland - *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, Second Edition*, John wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[4] A. Friedman - *Foundations of Modern Analysis*, dover Publications, Inc, New York, 1982.

[5] N. Fusco, P. Marcellini & C. Sbordone - *Analisi Marematica Due*, Liguori Editore, Napoli, 1996.

[6] E. H. Lieb & M. Loss - *Anaysis, 2nd Edition*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **14**, American Mathematical Society, Providence, 2001.

[7] H. L. Royden - *Real Analysis, 2nd Edition*, MacMillian Publishing Co., Inc., New York, 1968.

[8] W. Rudin - *Analisi Reale e Complessa*, Editore Boringhieri, Torino, 1974.

[9] E. M. Stein & R. Shakarchi - *Real Analysis: Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces*, Princeton Lectures in Analysis III, Princeton University Press, Princeton, 2005.

[10] M. E. Taylor - *Measure Theory and Integration*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **76**, 1998. American Mathematical Society, Providence, 2006.

[11] R. Wheeden & A. Zygmund - *Measure and Integral: An introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.