

**PDE I - Programma d'Esame - a.a. 2009-2010**  
**C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni**

*Prof. Kevin R. Payne*

**1. Introduzione a PDE [Cap. 1 di [E]]**

- Nozioni di base, esempi, problemi e sfide

**2. Formule di rappresentazione per soluzioni [Cap. 2, Sez. 3.2 di [E]]**

**2.1 - L'equazione del trasporto**

- l'equazione omogenea e non con coefficienti costanti, cenni al caso di coefficienti variabili ed equazioni nonlineari - il metodo delle caratteristiche

**2.2 - L'equazione di Laplace**

- La soluzione fondamentale e l'equazione di Poisson in  $\mathbb{R}^n$
- Formule di rappresentazione di Green e funzioni di Green per le bolle
- Formula integrale di Poisson ed il problema di Dirichlet per le bolle
- Proprietà del valor medio per le funzioni armoniche
- Principio di massimo/minimo debole e forte per il laplaciano

**2.3 - L'equazione del calore**

- La soluzione fondamentale (nucleo di calore) e il problema di Cauchy
- L'equazione nonomogenea - il principio di Duhamel
- Bolle di calore e la proprietà del valor medio per funzioni caloriche
- Principio di massimo forte e debole per le funzioni caloriche

**2.4 - L'equazione delle onde**

- Il problema di Cauchy in  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$
- La formula di D'Alembert per  $n = 1$  e il metodo di riflessione per il problema di Cauchy-Dirichlet su  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$
- il metodo delle medie sferiche e la riduzione all'equazione di Euler-Poisson-Darboux
- Le formule di Kirchoff e Poisson ( $n = 3, 2$ )
- Il metodo di energia per mostrare unicità e causalità.

**2.5 - Commenti finali**

- equazioni lineari del secondo ordine e tipi qualitativi
- metodi per mostrare l'esistenza di soluzioni
- il metodo variazionale ed il principio di Dirichlet - motivazione per gli spazi di Sobolev.

**3. Spazi di Sobolev [Cap. 5 di [E] v. anche Cap. 3 di [G]]**

**3.1 - La derivata debole**

- la derivata debole di  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , prime proprietà ed esempi

### 3.2 - Gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$

- Definizione via derivate deboli in  $L^p(\Omega)$ , prime proprietà, norme
- $W^{k,p}(\Omega)$  come spazio funzionale (completezza, separabilità, riflessività)
- Definizione alternativa via completamento rispetto alla norma e la nozione di derivata forte

### 3.3 - Approssimazione in $W^{k,p}(\Omega)$

- Richiami sulla mollificazione di  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), L^p_{\text{loc}}(\Omega)$
- Mollificazione e derivate deboli
- Teoremi di approssimazione locale e globale ed il Teorema di Meyers-Serrin
- Applicazioni delle approssimazione: regola della catena, studio di  $u^\pm, |u|$  per  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , cambiamento di variabili con diffeomorfismi di classe  $C^1$
- Introduzione degli spazi  $W^{k,p}_0(\Omega)$

### 3.4 - Tracce in $W^{1,p}(\Omega)$

- Esempi di costruzione della traccia su un pezzo di bordo o iperficie interna.
- Il teorema della traccia per domini limitati e bordo di classe  $C^1$
- Disuguaglianze di tracce e stime sulle costanti
- Caratterizzazione dello spazio  $W^{1,p}_0(\Omega)$  via la traccia sul bordo
- La disuguaglianza di Poincaré per domini limitati, di ampiezza finita.
- Norma equivalente per  $W^{1,p}_0(\Omega)$

### 3.5 - Formulazione debole del problema di Dirichlet

- Definizione di soluzione debole  $u \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$  per l'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet al bordo
- Esistenza di soluzione mediante il principio di Dirichlet (rivisitato).

### 3.6 - Disuguaglianze di Sobolev

- Motivazione per la ricerca di immersioni continue degli spazi  $W^{k,p}$  in altri spazi funzionali ( $L^q, C^k$  etc.)
- Il caso  $k = 1$  e  $1 \leq p < n$ : la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev ed immersioni in  $L^q$  per  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n), W^{1,p}_0(\Omega)$  e cenni sul caso  $W^{1,p}(\Omega)$  con bordo "buono". L'esponente critico di Sobolev  $p^* = np/(n-p)$
- Il caso  $k = 1$  e  $p > n$ : la disuguaglianza di Morrey ed immersioni in spazi di Hölder per  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n), W^{1,p}_0(\Omega)$  e cenni sul caso  $W^{1,p}(\Omega)$  con bordo "buono"
- Cenni su i casi  $k = 1$  e  $p = n \vee p = \infty$  e sulle generalizzazioni ad  $W^{k,p}$ .

### 3.7 - Compattezza delle immersioni

- Richiami sulla compattezza ed il teorema di Ascoli-Arzelà e conseguenze
- Il caso  $k = 1$  e  $n \leq p < \infty$ : immersione compatta di  $W^{1,p}_0(\Omega)$  in  $C^0(\overline{\Omega})$ .
- Il caso  $k = 1$  e  $1 \leq p < n$ : immersione compatta di  $W^{1,p}_0(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$  per ogni  $q \in [1, p^*)$ .
- Cenni sulle generalizzazioni

## 4. Equazioni ellittiche lineari del secondo ordine [Cap. 6 di [E] v. anche Cap. 3 e 8 di [GT]]

### 4.1 - Introduzione

- Definizione di ellitticità ed ellitticità uniforme

- Equazioni in forma di divergenza e non

#### 4.2 - Esistenza di soluzioni deboli

- Formulazione debole del problema di Dirichlet per soluzioni  $H_0^1(\Omega)$ , lo spazio duale  $H^{-1}(\Omega)$ , il lemma di Lax-Milgram e la disuguaglianza di Gårding
- Teorema di esistenza ed unicità di soluzioni deboli per equazioni uniformemente ellittiche con termine noto in  $L^2(\Omega)$
- Estensione al termine noto in  $H^{-1}(\Omega)$  e l'isomorfismo  $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$
- L'alternativa di Fredholm per equazioni uniformemente ellittiche
- Caratterizzazione degli autovalori del problema di Dirichlet via l'alternativa di Fredholm e lo spettro di operatori compatti.

#### 4.3 - Regolarità

- Rapporti incrementali e derivate deboli
- Regolarità interna  $H_{loc}^2(\Omega)$  per soluzioni  $H^1(\Omega)$  con termine noto in  $L^2(\Omega)$
- Cenni sulla regolarità interna  $H_{loc}^{m+2}(\Omega), C^\infty(\Omega)$  per soluzioni  $H^1(\Omega)$  con termine noto in  $H^m(\Omega), C^\infty(\Omega)$
- Cenni sulla regolarità fino al bordo  $(H^2(\Omega), H^{m+2}(\Omega), C^\infty(\bar{\Omega}))$

#### 4.4 - Principi di massimo per soluzioni classiche

- Principio di massimo debole per equazioni ellittiche non in forma di divergenza
- Nozione di subsoluzione, supersoluzione ed osservazioni sul segno del coefficiente del termine di ordine zero
- Il Lemma di Hopf per equazioni uniformemente ellittiche ed il principio di massimo forte
- Cenni alle applicazioni dei principi di massimo: unicità, principi di confronto, stime a priori puntuale.

#### 4.5 - Principi di massimo per soluzioni deboli

- Per  $u \in H^1(\Omega)$ , definizioni di segno in senso debole per  $u$  in  $\Omega$  e su  $\partial\Omega$ . Definizione di subsoluzione, supersoluzione in senso debole.
- Teorema sul segno di subsoluzioni, supersoluzioni ed il principio di massimo debole per equazioni uniformemente ellittiche in forma di divergenza.

#### 4.6 - Autovalori ed autofunzioni

- Operatori uniformemente ellittici e formalmente auto-aggiunti
- Teorema spettrale per tali operatori: successione di autovalori reali di molteplicità finita che tende a  $+\infty$  con base ortonormale in  $L^2(\Omega)$  di autofunzioni in  $H_0^1(\Omega)$ .
- L'autovalore principale  $\lambda_1 > 0$ : caratterizzazione variazionale, autofunzioni con segno stretto in  $\Omega$  e semplicità di  $\lambda_1$ .

### Referenze

[E] - Evans, L.C. - *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[GT] - Gilbarg, D and Trudinger, N. - *Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order, Second Edition*, Springer-Verlag, 1983. (Adesso disponibile anche in paperback nella serie "Classics in Mathematics", 2001).

[G] - Giusti, E. - *Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni* - Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994. (Adesso disponibile anche in inglese e pubblicato da World Scientific Press, 2003).