

Esercizi di PDE

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Capitolo 4: Equazioni ellittiche lineari del secondo ordine

Esercizio 4.1 - [Caratterizzazione di $H^{-1}(\Omega)$]: Leggere la dimostrazione del Teorema 5.9.1 di [E].

Esercizio 4.2 - [Continuità di L_μ^{-1}]: Finire la dimostrazione del Corollario 4.2.1 mostrando la continuità di $L_\mu^{-1} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$

Esercizio 4.3 - [Aggiunto formale di L]: Verificare l'affermazione fatta a lezione dopo Definizione 4.2.2 sulla forma di L^*v se $Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}D_iu) + \sum_{i=1}^n b_iD_iu + cu$

Esercizio 4.4 - [Alternativa di Fredholm]: Completare la dimostrazione del Teorema 4.2.2 usando Lemma 4.2.5 e consultando Teorema 6.2.4 di [E] (e anche Teorema D.5.5 se è necessario).

Esercizio 4.5 - [Variante del Teorema 4.2.1 di esistenza]: Esercizio 6.6.1 di [E]

Esercizio 4.6 - [Il problema di Dirichlet generalizzata]: Formulare e dimostrare una generalizzazione del Teorema 4.2.1 per il problema

$$Lu = f \text{ in } \Omega$$

$$u = g \text{ su } \partial\Omega$$

con $f \in L^2(\Omega)$ e g funzioni date.

Esercizio 4.7 - [Il problema di Neumann per il laplaciano]: Esercizio 6.6.3 e 6.6.7 di [E].

Esercizio 4.8 - [Altre condizioni al bordo per il laplaciano]: Per $f \in L^2(\Omega)$ spiegare come definire una nozione di soluzione debole $u \in H^1(\Omega)$ dell'equazione

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$

rispetto alle seguenti condizioni al bordo:

(a): Robin: $u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$

(b): Misto: con $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ l'unione di due sottoinsiemi chiusi, disgiunti

$$\begin{cases} u = 0 & \text{su } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma_2 \end{cases}$$

Discutere la questione di esistenza ed unicità della soluzione debole.

Esercizio 4.9 - [L'equazione biharmonica]: Esercizio 6.6.2 di [E].

Esercizio 4.10 - [Regolarità interna $H^2(\Omega)$]: Completare passo 7 della dimostrazione del Teorema 4.3.1 consultando Teorema 6.3.1 di [E].

Esercizio 4.11 - [Ulteriore regolarità e regolarità fino al bordo]: Formare un'idea più precisa delle dimostrazioni dei Teoremi 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 consultando Teoremi 6.3.2, 6.3.3, 6.3.4, 6.3.5 di [E]

Esercizio 4.12 - [Regolarità interna $H^2(\Omega)$ per un'equazione semilineare]: Esercizio 6.6.4 di [E].

Esercizio 4.13 - [Stime $W^{1,\infty}$ via il principio di massimo]: Esercizio 6.6.5

Esercizio 4.14 - [Funzioni barriera e stime sul gradiente al bordo]: Esercizio 6.6.6 di [E].

Esercizio 4.15 - [Autovalori ed autofunzioni]: Completare le dimostrazioni dei Teoremi 4.6.1 e 4.6.2 consultando Teoremi 6.5.1 e 6.5.2 di [E] (e anche sezione D.6 di [E] se è necessario)

Esercizio 4.16 - [Autovalore principale per operatori non-simmetrici]: Leggere l'enunciato e la dimostrazione del Teorema 6.5.3. Per uno studio più approfondito consultare anche [BNV].

Esercizio 4.17 - [Principi di mini-max per λ_1]: Esercizi 6.6.9 e 6.6.10 di [E].

Referenze

[BNV] - Berestycki, H., Nirenberg, L., e Varadhan, S.R.S. - *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 47–92.

[E] - Evans, L.C. - *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.