Esercizi di Analisi Reale, Parte I
Raccolta degli A.A. 2005/2006-2007/2008
C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, M. Vignati e Dott. D. Cassani, L. Mari, D. Monticelli,

N.B. Gli esercizi contrassegnato con ** sono impegnativi e forse richiedono elementi non sviluppati nel'ambito del corso. Per ulteriore suggerimenti e/o referenze si può consultare il docente.

Capitolo 1: Differenziazione ed integrazione

Esercizio 1.1 - [1.2.4. delle dispense]: Sia $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione (additiva) di insiemi. Mostrare che se F è <u>continua</u> nel senso (1.2.3) allora

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad E_1, E_2 \in \Sigma \;\text{ con }\; \operatorname{diam}(E_1 \Delta E_2) < \delta \;\Rightarrow\; |F(E_1) - F(E_2)| < \epsilon,$$

dove $E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ è la differenza simmetrica di E_1 e E_2.

Esercizio 1.2 - [1.3.4. delle dispense]: Trovare qualche esempio "onesto" che mostra che la conclusione del Teorema 1.3.3 non vale ovunque; cioè un $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ per cui il limite non esiste (o non esiste finito) ovunque. Così, non c'e' modo di cambiare f in un punto per ricuperare il risultato.

Esercizio 1.3: Dimostrare Lemma 1 (densità di $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) usato nella dimostrazione del TDL (Teorema 1.3.3). *Suggerimento*: seguire l'argomento di Lemma 7.3 di [Wheeden-Zygmund]; cioè mostrare successivamente che basta mostrare il risultato per:

1. $f \geq 0$
2. $f = \chi_E$ con $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $|E| < +\infty$ (approssimazione per funzioni semplici)
3. $f = \chi_G$ con G aperto, $|G| < +\infty$ (regolarità esterna della misura di Lebesgue)
4. $f = \chi_Q$ con Q un pluri-intervallo (rettangolo) in $\mathbb{R}^n$ (ricoprimento numerabile di aperti con rettangoli)

Poi, il caso 4 è facile. Si usa una "cuttoff" costruita tramite la distanza da Q.

Esercizio 1.4: Mostrare il seguente versione semplificata del **Lemma di Ricoprimento di Wiener:** *Sia $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in A\}$ una collezione di palle aperte con unione U. Se $|U| > m$, allora esiste $\{B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_N}\} \subset \mathcal{B}$ con le palle disgiunte e $\left|\cup_{j=1}^N B_{\alpha_j}\right| > 3^{-n}m$.*

Esercizio 1.5 - [1.4.11 delle dispense]: Sia f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione massimale di Hardy-Littlewood f^* associata ad f (vedi Def. 1.4.1).

(b) Verificare che $f^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$.

Esercizio 1.6 - [1.4.12 delle dispense]: Sia f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1/\left[|x|\log^2(1/|x|)\right] & \text{se } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$.

b) Verificare che esiste $c > 0$ t.c.

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|\log(1/|x|)}, \quad |x| \leq 1/2$$

e quindi $f^* \notin \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$.

Esercizio 1.7 - [1.4.13 delle dispense]: Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

a) Considerare $g(x) = [\tau_{x_0} f](x) := f(x - x_0)$ la <u>*traslata di f per* $x_0 \in \mathbb{R}^n$</u>. Verificare che l'operatore massimale commuta con le traslazioni; cioè

$$g^*(x) = [\tau_{x_0} f]^*(x) = [\tau_{x_0} f^*](x).$$

b) Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ <u>*radiale*</u>; cioè $f(x) = g(|x|)$ per qualche g. Mostrare che anche f^* è radiale.

Esercizio 1.8 - 1.4.14 delle dispense]: Siano $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e χ_E la funzione caratteristica di E.

a) Con $E = B_r(0)$, mostrare che esistono costanti $c_1, c_2 > 0, R > 0$ tali che

$$c_1 \frac{|E|}{|x|^n} \leq \chi_E^*(x) \leq c_2 \frac{|E|}{|x|^n}, \quad |x| > R$$

e quindi $\chi_E^* \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

b) Generalizzare il risultato della parte **a)** a qualsiasi E misurabile e limitato

c) Concludere che

$$f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(x) = 0 \ \ q.o. \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 1.9: Consideriamo la seguente variante comune della *funzione massimale di Hardy-Littlewood*. Per $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definiamo

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, dy,$$

dove $B_r(x)$ è la palla aperta con raggio r e centro $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostrare che $Mf(x)$ e $f^*(x)$ sono equivalenti nel senso che: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$Mf(x) \leq f^*(x) \leq 2^n Mf(x).$$

(b) Nel caso $n = 1$, mostrare che la costante 2 è ottimale; cioè trovare una funzione f per cui $f^*(x) = 2Mf(x)$ per almeno un $x \in \mathbb{R}$.

(c) Trovare costanti positivi C_1, C_2 per cui si ha

$$C_1 Mf(x) \leq \widehat{M}f(x) \leq C_2 Mf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

dove

$$\widehat{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q_r(x)|} \int_{Q_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

con $Q_r(x)$ è il cubo con centro x e misura $(2r)^n$. $\widehat{M}f$ è una variante della funzione massimale usata da Wheeden-Zygmund.

Esercizio 1.10 - [1.5.10 delle dispense]: (Eccentricità delle corone circolari):

a) Mostrare che $\{U_r = B_r(x) \setminus \overline{B}_{r/2}(x) : \ r > 0\}$ ha eccentricità limitata in $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Mostrare che $\{U_{R,r} = B_R(x) \setminus \overline{B}_r(x) : \ 0 < r < R\}$ **non** ha eccentricità limitata in $x \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.11 (Limiti approssimati e continuità approssimata): Mostrare le seguente affermazioni.

a) Per una funzione $f \in \mathrm{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, il <u>*limite approssimata di f per $y \to x$*</u> è unico (se esiste), dove per definizione

$$\mathrm{ap}\lim_{y \to x} f(y) = l$$

se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{|B_r(x) \cap \{y : \ |f(y) - l\}|}{|B_r(x)|} = 0.$$

b) Per una funzione $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, quasi ogni punto è un punto di <u>*continuità approssimata per f*</u>; cioè si ha

$$\mathrm{ap}\lim_{y \to x} f(y) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

c) Usando il teorema di Lusin, mostrare che l'affermazione della parte b) rimane vero per $f \in \mathrm{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Esercizio 1.12 - [1.8.4 delle dispense]: Completare Passo 1 della dimostrazione del teorema sulla differenziabilità delle funzioni monotone (Teorema 1.8.3); cioè il teorema è stato mostrato nel caso (a, b) un intervallo finito. Mostrare che il caso generale segue dal caso speciale.

Esercizio 1.13 - [1.9.3 delle dispense]: Mostrare che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monotona a tratti*, cioè, esiste una partizione $\{a = a_0 < \cdots < a_N = b\}$ t.c. $f_{|[a_{i-i}, a_i]}$ è monotona, implica che $f \in BV([a, b])$.

Esercizio 1.14 - [1.9.5 delle dispense]: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la *funzione di Dirichlet*, cioè,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

non è un elemento di $BV([a, b])$.

Esercizio 1.15 - [1.9.15 delle dispense]: Ricordiamo che una funzione $f \in BV([a,b])$ se esiste finito la *variazione totale* di f

$$V[f] = V[f;a,b] := \sup_{\Gamma} V_{\Gamma}[f;a,b]$$

dove $\Gamma = \{a = x_0 < \ldots x_m = b\}$ è una partizione finita di $[a,b]$ e la variazione su Γ è

$$V_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \, .$$

Siano $p, q > 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(x^{-q}) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostrare che $f \in BV([0,1])$ se e solo se $p > q$.

Esercizio 1.16 (Teorema di Rademacher):** Mostrare il seguente generalizzazione di Corollario 1.9.14 al caso di funzioni di più variabili: *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora f è differenziabile quasi ovunque e il suo gradiente ∇f (definito quasi ovunque) ha componenti limitate.*
N.B. Questo risultato ha delle applicazioni notevoli; ad esempio, possiamo definire la misura del grafico di f via l'integrale $\int_U (1+\nabla f(x))^{1/2}\, dx$ per una funzione di più variabili con una regolarità minore di quello di Analisi III (Lipschitz al posto di $C^1(\overline{U})$).

Esercizio 1.17: Vogliamo stabilire un risultato di convergenza nello spazio $BV([a,b])$.

(a) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni su $[a,b]$ che converga puntualmente ad f. Mostrare che

$$V[f;a,b] \leq \liminf_{n\to+\infty} V[f_n;a,b].$$

(b) Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset BV([a,b])$ con $V[f_n;a,b] \leq M < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che $f_n \to f$ puntualmente su $[a,b]$ implica $f \in BV([a,b])$ e $V[f;a,b] \leq M$.

Esercizio 1.18 - [1.10.8 delle dispense]: Usando la definizione, mostrare che la funzione di Cantor-Lebesgue definita in Controesempio 1.10.1 **non** è assolutamente continua.

Esercizio 1.19 - [1.10.9 delle dispense]: Siano $F, G \in AC([a,b])$.

(a) Mostrare che $FG \in AC([a,b])$ e vale la seguente formula di <u>*integrazione per parti*</u>

$$\int_a^b F'(x)G(x)\, dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b G'(x)F(x)\, dx$$

(b) Dedurre che per $f \in \mathcal{L}([a,b])$ si ha

$$\int_a^b f(x)G(x)\, dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b G'(x)F(x)\, dx$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Esercizio 1.20 - [1.11.5 delle dispense]: Mostrare che l'insieme delle funzioni convesse su (a, b) è un cono convesso chiuso. Cioè:

(a) φ_1, φ_2 convesse implica $t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2$ è convessa dove $t_k \geq 0, t_1 + t_2 = 1$.

(b) φ convessa e $\alpha > 0$ implica $\alpha\varphi$ convessa.

(c) $\{\varphi_k\}$ convesse, $\varphi_k \to \varphi$ implica φ è convessa.

Capitolo 2: Gli spazi L^p

Esercizio 2.1 - [2.1.2 delle dispense]: Sia $f(x) = ||x||^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$. Trovare α per cui $f \in \mathcal{L}^p(E)$ nei casi

(a) $E = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$

(b) $E = \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$

Esercizio 2.2 - [2.1.6 delle dispense]: Mostrare Proposizione 2.1.5 (proprietà del estremo superiore essenziale).

Esercizio 2.3 - [2.1.8 delle dispense]: Mostrare le seguente due affermazioni di uso comune:

$$||f||_{\infty,E} = \operatorname{ess\,sup}_E |f| \leq \sup_E |f| \quad ; \quad f \in \mathcal{L}^\infty(E) \Longrightarrow f(x) \leq ||f||_\infty \text{ per q.o. } x \in E.$$

Esercizio 2.4 - [2.1.11 delle dispense]: Via la disuguaglianza di Jensen mostrare: per ogni $p \in (1, \infty)$ e per ogni $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| < +\infty$, si ha

$$||f||_1 \leq |E|^{1-1/p}||f||_p$$

e, quindi, $\mathcal{L}^p(E) \subset \mathcal{L}^1(E)$ di nuovo.

Esercizio 2.5: Siano $1 \leq p < +\infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Mostrare le seguenti affermazioni sul calcolo della norma L^p. Per ogni $f \in \mathcal{L}^p(E)$ si ha

(a)

$$||f||_p = \sup_{||g||_q \leq 1} \left| \int_E f(x)g(x)\, dx \right|,$$

(b)

$$||f||_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t)\, dt,$$

dove $q = p'$ è l'esponente coniugato di p e $m_f(t) := |\{x \in E : \; |f(t) > t\}|$ è la *funzione di distribuzione di* $|f|$.

Esercizio 2.6: Mostrare le seguente affermazioni sul *operatore massimale* definita da

$$Mf(x) = f^*(x) = \sup_{B:\ x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy$$

a) Se $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in (1, +\infty]$, allora $Mf \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ e vale la stima

$$||Mf||_p \leq C_p ||f||_p$$

dove $C_\infty = 1$ e $C_p^p = p3^n 2^p/(p-1)$ per $p \in (1, +\infty)$. *Suggerimento:* Per $p \neq +\infty$, sfruttare la funzione di distribuzione di f^* e l'espressione per la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ in Esercizio 2.5.

b) M definisce un operatore sublineare e continuo su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in (1, +\infty]$.

Esercizio 2.7 (Interpolazione di Marcinkiewicz): Generalizzare il risultato di Esercizio 2.6, mostrando il seguente affermazione: *Sia* $T : \mathrm{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathrm{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *un operatore sublineare t.c. esistono costanti* C_∞, C_1 *per cui*

$$||Tf||_\infty \leq C_\infty ||f||_\infty;$$

$$\forall\ \alpha > 0 : \quad |\{x \in \mathbb{R}^n :\ |Tf(x)| > \alpha\}| \leq \frac{C_1}{\alpha} ||f||_1.$$

Allora, per ogni $p \in (1, = \infty)$ *esiste* C_p *t.c.*

$$||Tf||_p \leq C_p ||f||_p.$$

N.B. Ricordiamo che T sublineare vuol dire che $T(f+g)$ è ben definito se Tf, Tg lo sono e vale

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 2.8: Sia $p \in \mathbb{R}$. Considerare la seguente famiglia di funzionali:

$$\Phi_p(u) := \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p},$$

definiti per $u : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato. Mostrare che:

$$\lim_{p\to+\infty} \Phi_p(u) = \mathrm{ess\,sup}_\Omega |u|;$$

$$\lim_{p\to-\infty} \Phi_p(u) = \mathrm{ess\,inf}_\Omega |u|;$$

$$\lim_{p\to 0} \Phi_p(u) = \exp\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \log(|u(x)|)\, dx \right).$$

Esercizio 2.9 (Una disuguaglianza di interpolazione): Mostrare la seguente affermazione. *Siano* $1 \leq p < q < r \leq +\infty$ *t.c.*

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r},$$

per qualche $\theta \in (0,1)$. *Per ogni* $f \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$ *si ha*

$$||f||_q \leq ||f||_p^\theta ||f||_r^{1-\theta}.$$

Quindi, se $f \in \mathcal{L}^p(E) \cap \mathcal{L}^r(E)$, *allora* $f \in \mathcal{L}^q(E)$.

Esercizio 2.10 - [2.2.10 delle dispense] (Disuguaglianza di Hölder generalizzata): Mostrare la seguente affermazione. *Siano* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *con* $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$ *e* $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. *Per ogni* $f, g \in \mathrm{mis}(E, \mathbb{R})$ *si ha*

$$||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Quindi, il prodotto definisce una mappa bilineare e continua da $\mathcal{L}^p(E) \times \mathcal{L}^q(E) \to \mathcal{L}^r(E)$.

Esercizio 2.11 - [2.2.11. delle dispense] (Disuguaglianza di Minkowski - versione integrale): Mostrare la seguente affermazione. *Sia* $1 \leq p < \infty$. *Per ogni* $f \in \mathrm{mis}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *t.c.* $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_x)$ *per q.o.* $y \in \mathbb{R}^m$, *si ha*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^m} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dx\right|^p dy\right]^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p\, dy\right]^{1/p} dx$$

Quindi, se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n_x, \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m_y))$, *allora* F *definita quasi ovunque da* $F(y) = ||f(\cdot, y)||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ *sta in* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m_y)$.

Esercizio 2.12 (Disuguaglianza di Hölder inversa): Mostrare la seguente affermazione. *Siano* $0 < p < 1$ *con* $p' := p/(p-1) < 0$. *Se* $f \in \mathcal{L}^p(E)$ *e*

$$0 < \int_E |g(x)|^{p'} dx < +\infty$$

allora si ha

$$\int_E |f(x)g(x)|\, dx \geq \left(\int_E |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'}.$$

Esercizio 2.13 (Disuguaglianza di Minkowski inversa): Mostrare la seguente affermazione. *Sia* $0 < p < 1$. *Se* $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$ *allora si ha*

$$||\, |f| + |g|\, ||_p \geq ||f||_p + ||g||_p$$

Esercizio 2.14 (Clarkson's inequalities)**: Mostrare le seguente affermazioni: *Siano* $f, g \in L^p(E)$ *con* $1 < p < +\infty$ *e* $p' = p/(p-1)$. *Allora*

a) *nel caso* $2 \leq p < +\infty$ *si ha*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_p^p + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_p^p \leq \frac{1}{2}||f||_p^p + \frac{1}{2}||g||_p^p$$

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_p^{p'} + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_p^{p'} \geq \left(\frac{1}{2}||f||_p^p + \frac{1}{2}||g||_p^p\right)^{p'-1}$$

b) *nel caso* $1 < p \leq 2$ *si ha*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_p^{p'} + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_p^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}||f||_p^p + \frac{1}{2}||g||_p^p\right)^{p'-1}$$

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_p^{p'} + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_p^{p'} \geq \frac{1}{2}||f||_p^p + \frac{1}{2}||g||_p^p$$

Suggerimento: Verificare prima le seguente affermazioni che valgono nel piano complesso: *Siano $z, w \in \mathbb{C}$ allora:*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p\right)^{1/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2$$

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p} \leq \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p, \quad 2 \leq p < +\infty$$

Esercizio 2.15 (Convessità uniforme): Usare le disuguaglianze di Clarkson (Esercizio 2.14) per mostrare che: *Per ogni $p \in (1, +\infty)$, $L^p(E)$ è <u>uniformemente convesso</u>; cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c.*

$$||f||_p \leq 1, ||g||_p \leq 1, ||f-g||_p > \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\left|\frac{1}{2}(f-g)\right|\right|_p \leq 1 - \delta.$$

Esercizio 2.16 - [2.4.6 delle dispense]: Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Rispetto la nostra discussione sui modi di convergenza $f_j \to f$ per $f_j, f \in \operatorname{mis}(E, \mathbb{R})$, completare il quadro enunciato, mostrando le seguente affermazioni.

(a) "$U \longrightarrow QU \longrightarrow QO$"

(b) "$U \longrightarrow L^\infty \longrightarrow M$"

(c) "$M \not\Rightarrow L^p$" ($1 \leq p < \infty$)

Ricordiamo le nostre abbreviazioni: ($\longrightarrow$) = sempre vero, ($\Rrightarrow$) = vero se $|E| < +\infty$ e $|f_j| \leq M$ per ogni j. Inoltre, ricordiamo

- Convergenza Uniforme (U) : $\sup_E |f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$
- Convergenza Quasi-Uniforme (QU) : $\forall \ \alpha > 0 \ \exists \ E_\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $|E_\alpha| < \alpha$ e $\sup_{E \setminus E_\alpha} |f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$
- Convergenza Quasi-Ovunque (QO) : $\exists \ Z$ t.c. $|Z| = 0$ e $\forall x \in E \setminus Z : \ |f_j(x) - f(x)| \to 0, \ j \to +\infty$
- In Misura (M) : $\forall \ \alpha > 0 \ |\{x \in E : \ |f_j(x) - f(x)| > \alpha\}| \to 0, \ j \to +\infty$
- In Norma (L^∞) : $||f_j - f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f_j - f| \to 0, \ j \to +\infty$
- In Norma (L^p) : $||f_j - f||_p = \left[\int_E |f_j - f|^p \, dx\right]^{1/p} \to 0, \ j \to +\infty$

Esercizio 2.17: Per ciascuna delle successioni con termine generale f_k date sotto, decidere per quale $p \in [1, +\infty]$ abbiamo convergenza in $L^p(\mathbb{R})$:

a) $e^{-k|x|}, \ e^{-|x-k|}, \ k^{1/2}e^{-k^2|x|}, \ e^{-k|x-k|}, \ k^{-1}e^{-|x|/k}, \ ke^{-k|x|}$

b) $k^{-1/2}\chi_{[k,k+1]}, \ k^{-1/2}\chi_{[k,2k]}, \ k\chi_{[0,1/k]}, \ k\chi_{[k,k+1/k]}, \ k^{-2/3}\chi_{[0,k]}, \ k^{-1/2}\chi_{[-k,k^2]}$

Esercizio 2.18: Sia $\{f_k\} \subset \mathcal{L}^p(E), f \in \mathcal{L}^p(E)$ t.c. $||f_k - f||_p \to 0$ per $p \in [1, \infty]$. Mostrare che $||f_k^\pm - f^\pm||_p \to 0$ dove $f^\pm$ sono le parte positive/negative di f.

Esercizio 2.19 - [2.5.5 delle dispense]: Verificare che $(\mathcal{F}', +, m_c)$ è uno spazio vettoriale e che $|| \cdot ||_{\mathcal{F}'}$ è una norma.

Esercizio 2.20 - [2.5.12 delle dispense]: Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $|E| < +\infty$. Considerare i seguenti funzionali l. Verificare che sono lineari e continui su $L^p(E)$ con $1 \le p < \infty$. Poi, trovare una rappresentante per $g \in L^{p'}(E)$ per cui $l(f) = l_g(f) = \int_E fg\, dx$.
N.B. Esempi ancora più interessanti hanno bisogno di un po' di più di analisi funzionale (per esempio, il teorema di Hahn-Banach).

(a) $l(f)$ la media integrale di f.

(b) $l(f) = \int_{T^{-1}(E)} f(Tx)\, dx$ dove $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed invertibile.

Esercizio 2.21 - [2.6.3 delle dispense]: Sia $1 < p < +\infty$. Verificare che le seguenti successioni di funzioni $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *convergono debolmente* a zero in $L^p(\mathbb{R})$ ($f_j \rightharpoonup 0$), cioè

$$\int_E f_j g\, dx \to 0, \quad \forall g \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}),$$

ma **non** convergono fortemente (in norma L^p). **Facoltativo:** Il caso $p = 1$?

(a) $f_j(x) := \varphi(x + j)$ con $0 \neq [\varphi] \in L^p(\mathbb{R})$. Esiste una versione di questo esempio anche su $E = (0, 1)$?

(b) $f_j(x) := j^{1/p}\varphi(jx)$ con $0 \neq [\varphi] \in L^p(\mathbb{R})$.

(c) $f_j(x) := \sin(jx)$ per $x \in [0, \pi]$ e $f_j(x) := 0$ per $x \notin [0, \pi]$.

N.B. Quest'ultimo esempio non ammette sottosuccessioni che convergono quasi-ovvunque.

Esercizio 2.22 - [2.6.7 delle dispense]: Mostrare le seguente affermazioni sulla convergenza forte e debole in L^p. Siano $\{f_j\} \subset L^p(E), f \in L^p(E)$.

(a) $||f_j - f||_p \to 0 \Longrightarrow ||f_j||_p \to ||f||_p \quad (1 \le p \le \infty)$.

(b) $f_j \to f$ q.o., $||f_j||_p \to ||f||_p \Longrightarrow ||f_j - f||_p \to 0 \quad (1 \le p < \infty)$

(c) $f_j \to f$ q.o, $||f_j||_p \le M < +\infty \Longrightarrow f_j \rightharpoonup f \quad (1 < p < \infty)$.

(d) $f_j \rightharpoonup f \Longrightarrow ||f||_p \le \liminf ||f_j||_p \quad (1 < p < \infty)$

Esercizio 2.23 - [2.7.8 e 2.7.7 delle dispense]: Ricordiamo il prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}^n$:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, dy, \quad f, g \in \mathrm{mis}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

che è definito per ogni x per cui esiste l'integrale

(a) Verificare la formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g|(x)\, dx = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dx\right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g|\, dx\right], \quad f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

(b) Calcolare $f * g$ per le funzioni caratteristiche su $\mathbb{R}$ definite da

$$f = \chi_{[0,1]} \quad \text{e} \quad g = \chi_{[a,b]}.$$

(c) Mostrare il Teorema di Convoluzione di Young: *Siano* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *t.c.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1 \ \text{ e } \ \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Allora $* : L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ *è ben definito, bilineare, continuo, e soddisfa*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p \, ||g||_q, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \ g \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Esercizio 2.24: Sia $K = K(x,y) \in \text{mis}(X \times Y, \mathbb{R})$ con $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $Y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Assumiamo che esistono $C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$\int_X |K(x,y)| \, dx \leq C_1 \ \text{ e } \ \int_Y |K(x,y)| \, dy \leq C_2$$

e definiamo *l'operatore integrale con nucleo* K via

$$Tf(x) := \int_Y K(x,y) f(y) \, dy.$$

(a) Mostrare che $T : L^p(X) \to L^p(X)$ è un operatore lineare e limitato per ogni $p \in [1, +\infty)$.

(b) Mostrare che

$$||T|| \leq C_1^{1/p} C_2^{1/p'}, \ \text{ dove } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Suggerimento: Si ricorda le disuguaglianze di Minkowski generalizzato (Esercizio 2.2.11) e di Young (Corollario 2.2.3) più il fatto che la norma di K soddisfa (vedi Esercizio 2.1)

$$||T|| := \sup_{||f||_p \leq 1} ||Tf||_p = \sup_{||f||_p \leq 1} \sup_{||g||_{p'} \leq 1} \left| \int_X Tf(x) g(x) \, dx \right|.$$

Esercizio 2.25 (Funzione di Green in dimensione uno): Considerare il seguente *Problema di Dirichlet*: Dato $f \in C^0([0,1])$, trovare una soluzione $u \in C^2([0,1])$ t.c.

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) \ \text{ per } \ x \in (0,1) \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases}$$

a) Mostrare che per $u \in C^2([0,1])$ con $u(0) = 0 = u(1)$ abbiamo la formula di rappresentazione

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) u''(y) \, dy$$

dove G è la funzione di Green definita da

$$G(x,y) = \begin{cases} -x(1-y) & \text{se } \ 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ -(1-x)y & \text{se } \ 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Quindi, una soluzione del problema è fornita da

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) \, dy.$$

b) Mostrare adesso (anche con l'aiuto di Esercizio 2.??) che abbiamo la seguente stima a priori in norma $L^1(0,1)$ per la derivata seconda:

$$\int_0^1 |u(x)|\,dx \leq \frac{1}{8}\int_0^1 |u''(x)|\,dx, \quad u \in C^2([0,1]).$$

Esercizio 2.26:

a) Mostrare il **Lemma di Schur:** *Sia $K(s,t)$ un nucleo definito per $s,t \geq 0$ tale che $K \geq 0$, $K(\lambda s, \lambda t) = \lambda^{-1}K(s,t)$ per ogni $\lambda > 0$ e*

$$\int_0^{+\infty} x^{-1/p}K(1,t)\,dt < +\infty$$

per qualche $p \in [1,+\infty]$. Allora l'operatore T su funzioni nonnegative definita da

$$(Tf)(s) := \int_0^{+\infty} f(t)K(s,t)\,ds$$

soddisfa $||Tf||_p \leq \gamma||f||_p$.

b) Verificare che $K(s,t) = (s+t)^{-1}$ è ammissibile per il lemma.

Esercizio 2.27: Mostrare le seguenti affermazioni.

(a) (Disuguaglianza di Young con ϵ) Siano $1 < p < +\infty$ e $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$||fg||_1 \leq \epsilon||f||_p^p + C(\epsilon)||g||_q^q, \quad \forall\epsilon > 0, \quad \forall f,g \in \text{mis}(E,\mathbb{R}),$$

dove $q = p'$ è l'esponente coniugato di p e $C(\epsilon) := (\epsilon p)^{-q/p}q^{-1}$.

(b) (Stima a priori per equazioni differenziali) Considerare l'equazione differenziale

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{q.o. } x \in (0,1),$$

dove $f \in C^0([0,1])$ e le coefficienti soddisfano

$$a \in AC([0,1]), \quad b,c \in \mathcal{L}^\infty([0,1])$$

$$a(x) \geq \lambda > 0, \quad \forall x \in (0,1).$$

Se $u \in C_0^2((0,1))$ è una soluzione, allora esiste $C > 0$ t.c.

$$||u'||_2^2 \leq C\left(||f||_2^2 + ||u||_2^2\right).$$

Suggerimento: Moltiplicare l'equazione per u, integrare e stimare.

Esercizio 2.28 - [2.8.5 delle dispense]: Verificare le affermazioni nella Osservazione 2.8.4 sulla regolarizzazione ed approssimazione per $f \in \mathcal{L}^p(U)$ con U aperto.

Esercizio 2.29 (Esistenza di funzioni cutoff): Mostrare il **Lemma di Urysohn:** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $K \subset \Omega$ compatto. Esiste $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\psi(x) = 1$ per ogni $x \in K$.*
Suggerimento: Seguire il seguente procedimento

a) Considerare una famiglia di compatti K_ϵ t.c. $K \subset K_\epsilon \subset \Omega$ e usare la distanza $d(x, K_\epsilon)$ per costruire $\Psi_\epsilon \in C_0^0(\Omega)$ tale che $\Psi_\epsilon(x) = 1$ per $x \in K$ e $\Psi_\epsilon(x) = 0$ per $x \notin K_{2\epsilon} \subset \Omega$.

b) Definire $\psi = \psi_\epsilon$ via $\psi_\epsilon = \Psi_\epsilon * \varphi_\epsilon$ dove φ è il mollificatore canonico di Esempio 2.8.7. Verificare che ψ ha le proprietà richieste.

I prossimi due esercizi forniscono delle condizioni necessarie e sufficiente affinche un sottoinsieme $\mathcal{K}$ di $L^p(U)$ sia *precompatta*; cioè data una successione $\{f_k\} \subset \mathcal{K}$ esiste una sottosuccesione che converge in norma ad un elemento $f \in L^p(U)$ nella chiusura di $\mathcal{K}$.

Esercizio 2.30 (Precompatezza per sottoinsiemi limitati):** Mostrare la seguente affermazione. *Siano $1 \le p < \infty$ e $\mathcal{K} \subset L^p(U)$ <u>limitato</u> con U aperto. Allora $\mathcal{K}$ è precompatto se e solo se esistono $\delta > 0$ e $V \subset\subset U$ t.c. per ogni $u \in \mathcal{K}, h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \delta$ si ha*

$$\int_U \left|\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)\right|^p dx < \epsilon^p,$$

$$\int_{U \setminus \overline{V}} |u(x)|^p \, dx < \epsilon^p,$$

dove $\tilde{f}$ è il prolungamento da zero fuori di U.
Suggerimento: Per mostrare che le condizioni sono sufficienti, basta considerare il caso speciale $U = \mathbb{R}^n$ (si considera $\widetilde{\mathcal{K}} = \{\tilde{f} : \ f \in \mathcal{K}\}$. Per il caso speciale, si sfruttare mollificazione delle funzioni f in modo di usare il risultato di compattezza di Ascoli-Arzela.

Esercizio 2.31 (Altre condizioni sufficienti):** Mostrare la seguente affermazione. *Siano $1 \le p < \infty$ e $\mathcal{K} \subset L^p(U)$ con U aperto. Allora $\mathcal{K}$ è precompatto se esiste una successione di sottodomini $\{U_j\}$ con unione U t.c.*

$$U_j \subset U_{j+1} \quad \text{per ogni } j;$$

$$\mathcal{K}_j := \{f_{|U_j} : \ f \in \mathcal{K}\} \text{ è precompatto in } L^p(U_j) \quad \text{per ogni } j:$$

$$\text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } j \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \int_{U \setminus U_j} |f(x)|^p \, dx < \epsilon, \ \text{per ogni } f \in \mathcal{K}.$$