

Esercizi di Istituzioni di Matematica – N. 1
Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Risolvere $(3 - 2x)^2 > x(2 - x)$

Soluzione: $x \in (-\infty, 1) \cup (9/5, +\infty)$

Esercizio 2. Risolvere $kx^2 - x + 1 > 0$ dove $k \in \mathbf{R}$

Soluzione: Ci sono 5 casi: definendo $x_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - 4k})/2k$ si ha i) $k < 0$: $x \in (x_-, x_+)$, ii) $k = 0$: $x \in (-\infty, 1)$, iii) $0 < k < 1/4$: $x \in (-\infty, x_-) \cup (x_+, +\infty)$, iv) $k = 1/4$: $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, v) $k > 1/4$: $x \in (-\infty, +\infty)$

Esercizio 3. Risolvere $\frac{k}{x-1} < \frac{1}{x}$ dove $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione: Ci sono 5 casi: i) $k < 0$: $x \in (0, 1/(1-k)) \cup (1, +\infty)$, ii) $k = 0$: $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, iii) $0 < k < 1$: $x \in (0, 1) \cup (1/(1-k), +\infty)$, iv) $k = 1$: $x \in (0, 1)$, v) $k > 1$: $x \in (-\infty, 1/(1-k)) \cup (0, 1)$

Esercizio 4. Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 5 - 4x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$$

Soluzione: $x \in (-1, 5/4]$

Esercizio 5. Risolvere $|x + 1| - |x| > x^2$

Soluzione: $x \in (1 - \sqrt{2}, 1)$

Esercizio 6. Mostrare $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$.

Soluzione: Si divide in casi sulla base dei segni di x, y , e $x + y$. Ci sono 6 casi.

Esercizio 7. Sia f la funzione definita da

$$\begin{cases} 9 - x^2 & -4 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

Trovare $\text{Dom}(f)$, $\text{Im}(f)$, $f(1)$, $f^{-1}(1)$, $f([0, 4])$ e $f^{-1}((-\infty, 1))$.

Soluzione: $\text{Dom}(f) = [-4, +\infty)$, $\text{Im}(f) = [-7, +\infty)$, $f(1) = 8$, $f^{-1}(1) = \{-2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}\}$, $f([0, 4]) = [-2, 2] \cup [8, 9]$ e $f^{-1}((-\infty, 1)) = [-4, -2\sqrt{2}) \cup (1, 2 + \sqrt{3})$

Esercizio 8. Sia $f(x) = x^2 + x$. Mostrare che f non è iniettiva su \mathbf{R} . Trovare un intervallo $[a, b]$ per cui la restrizione $f|_{[a, b]}$ è iniettiva. Trovare la funzione inversa associata.

Soluzione: Si può usare qualsiasi intervallo $[a, b]$ tale che $-1/2 \notin (a, b)$. L'inversa dipende dalla scelta di $[a, b]$. Per esempio: $[a, b] = [-1/2, b]$ con $b > -1/2$ dà $f : [-1/2, b] \rightarrow [-1/4, b^2 + b]$ biettiva con inversa $g : [-1/4, b^2 + b] \rightarrow [-1/2, b]$ tale che $g(y) = (-1 + \sqrt{1 + 4y})/2$.