

Esercizi di Istituzioni di Matematica – N.15

Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

AVVISO: Gli esercizi sotto sono versioni più leggeri di quelli che si trova in Esercizi di Analisi Matematica I - N. 17 dell'anno scorso. Si può consultare anche quella versione in cui c'è il discorso completo sul grafico qualitativo di $F(x)$.

Esercizio 1. Sia $y = F(x)$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt - \frac{1}{3}x.$$

Trovare il dominio di esistenza di F ed eventuali asintoti di F .

Soluzione:

A. Dominio di F : Si trova $\text{dom}(F) = \mathbf{R}$ essendo la funzione integranda $f(t) = e^{-t^2} \in C(\mathbf{R})$. Inoltre $F(0) = 0$.

B. Simmetrie: La funzione F è dispari. Si nota che F è la somma di funzioni dispari; $-x/3$ è dispari e $G(x) = \int_0^x f(t) dt$ è dispari essendo $f(t)$ pari e $G(0) = 0$. Ricordiamo che il cambiamento di variabile $s = -t$ mostra

$$G(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x -f(-s) ds = - \int_0^x f(s) ds = -G(x).$$

C. Limiti di F agli estremi del dominio: Per $x \rightarrow +\infty$ si analizza il comportamento di f per $t \rightarrow +\infty$ trovando che $f(t)$ è infinitesima di ordine superiore ad α per ogni $\alpha > 1$ rispetto all'infinitesima campione $1/t$. Quindi f è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow +\infty$ e $G(x) \rightarrow L$ finito per $x \rightarrow +\infty$. Allora $F(x) = G(x) - x/3$ tende a $+\infty$ e quindi non c'è un asintoto orizzontale per F . D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2} - 1/3) = -1/3$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[F(x) - \left(-\frac{x}{3} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = L.$$

Quindi F ha un asintoto obliquo $y = -x/3 + L$ per $x \rightarrow +\infty$. Essendo $f(t) > 0$ si vede $L > 0$. Per $x \rightarrow -\infty$ si usa la disparità di F per concludere $y = x/3 - L$ è un asintoto obliquo per F quando $x \rightarrow -\infty$.

Esercizio 2. Sia $y = F(x)$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{(t-2)^{1/5}} dt$$

Trovare il dominio di esistenza di F ed eventuali asintoti di F .

Soluzione:

A. Dominio: Si trova $\text{dom}(F) = (-\infty, 2]$. La funzione integranda $f(t) = e^t/(t-2)^{1/5} \in C(\mathbf{R} \setminus \{2\})$ e $1 \in \text{dom}(F)$ dove $F(1) = 0$. Quindi $(-\infty, 2) \subseteq \text{dom}(F)$. Inoltre per $t \rightarrow 2^-$ si trova

$$f(t) \sim \frac{e^2}{(t-2)^{1/5}};$$

cioè f è infinito di ordine $1/5 < 1$ rispetto all'infinito campione $1/(t-2)$ e quindi f è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[1, 2]$.

AVVISO: Essendo che $f(t) \sim c/(t-2)^{1/5}$ anche per $t \rightarrow 2^+$ si può prolungare F dall'altra parte di 2 trovando così il dominio $(-\infty, +\infty)$. In questo corso è stato deciso di seguire il nostro libro e non parlare di tale prolungamento.

B. Simmetrie: Non ci sono.

C. Limiti di F agli estremi del dominio: Per $x \rightarrow 2^-$ il discorso sopra mostra che F non ha asintoto verticale in $x = 2$. Per $x \rightarrow -\infty$ si analizza il comportamento di $f(t)$ per $t \rightarrow -\infty$; si trova che $f(t)$ è infinitesima di ordine superiore ad α per ogni $\alpha > 1$ rispetto all'infinitesima campione $1/t$ e quindi f è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow -\infty$. Quindi F ammette limite L finito per $x \rightarrow -\infty$; cioè c'è un asintoto orizzontale $y = L$ per $x \rightarrow -\infty$.

Commento in più: Usando il fatto che $f(t) < 0$ per $t \in (-\infty, 2)$ si vede

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = - \int_x^1 f(t) dt > 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, 1)$$

e quindi $L > 0$.

Esercizio 3. Sia $y = F(x)$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{t}{(t+2)(t-1)^{1/3}} dt$$

Trovare il dominio di esistenza di F ed eventuali asintoti di F .

Soluzione:

A. Dominio: Si trova $\text{dom}(F) = (-2, 1]$. La funzione integranda $f(t) = t/[(t+2)(t-1)^{1/3}] \in C(\mathbf{R} \setminus \{-2, 1\})$ e $-1 \in \text{dom}(F)$ dove $F(-1) = 0$. Quindi $(-2, 1) \subseteq \text{dom}(F)$. Inoltre per $t \rightarrow 1^-$ si trova

$$f(t) \sim \frac{1}{3(t-1)^{1/3}};$$

cioè f è infinito di ordine $1/3 < 1$ rispetto all'infinito campione $1/(t-1)$ e quindi f è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow 1^-$. Segue che $(-2, 1] \subseteq \text{dom}(F)$. Per $t \rightarrow -2^+$ si trova

$$f(t) \sim \frac{2}{3(t+2)};$$

cioè f è infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione $1/(t+2)$ e quindi f **NON** è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow -2$.

B. Simmetrie: Non ci sono.

C. Limiti di F agli estremi del dominio: Per $x \rightarrow 1^-$ non c'è asintoto verticale per il discorso sopra. Per $x \rightarrow -2^+$ si sa che $|F(x)| \rightarrow +\infty$ usando l'analisi della parte A. sopra. Quindi c'è un asintoto verticale per F in $x = 0$. Inoltre controllando il segno di $f(t)$ per $t \rightarrow 0^+$ si trova $f(t) > 0$ per $t \in (-2, 0)$ e quindi

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = - \int_x^{-1} f(t) dt < 0 \quad \text{per } x \in (-2, -1)$$

e quindi $F(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow -2^+$.

Esercizio 4. Sia $y = F(x)$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{t-2}{e^t-1} dt$$

Trovare il dominio di esistenza di F ed eventuali asintoti di F .

Soluzione:

A. Dominio: Si trova $\text{dom}(F) = (0, +\infty)$. La funzione integranda $f(t) = (t-2)/(e^t-1) \in C(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ e $1 \in \text{dom}(F)$ dove $F(1) = 0$. Quindi $(0, +\infty) \subseteq \text{dom}(F)$. Inoltre per $t \rightarrow 0$ si trova

$$f(t) \sim \frac{-2}{e^t-1} \sim \frac{-2}{t};$$

cioè f è infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione $1/t$ e quindi f **NON** è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow 0$.

B. Simmetrie: Non ci sono.

C. Limiti di F agli estremi del dominio: Per $x \rightarrow +\infty$ si analizza il comportamento di f per $t \rightarrow +\infty$ trovando

$$f(t) \sim \frac{t}{e^t}$$

che è infinitesima di ordine maggiore ad α per ogni $\alpha > 1$ rispetto all'infinitesimo campione $1/t$ e quindi f è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow +\infty$. Segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ con L finito (cioè $y = L$ è un asintoto orizzontale per F quando $x \rightarrow +\infty$). Per $x \rightarrow 0^+$ si sa che $|F(x)| \rightarrow +\infty$ usando l'analisi della parte A. sopra. Quindi c'è un asintoto verticale per F in $x = 0$. Inoltre controllando il segno di $f(t)$ per $t \rightarrow 0^+$ si trova $f(t) < 0$ per $t \in (0, 2)$ e quindi

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = - \int_x^1 f(t) dt > 0 \quad \text{per } x \in (0, 1)$$

e quindi $F(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0^+$.

Esercizio 5. Sia $y = F(x)$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(|t|)}{t^{1/3}} dt$$

Trovare il dominio di esistenza di F ed eventuali asintoti di F .

Soluzione:

A. Dominio: Si trova $\text{dom}(F) = [0, +\infty)$. La funzione integranda $f(t) = \ln(|t|)/t^{1/3} \in C(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ e $1 \in \text{dom}(F)$ dove $F(1) = 0$. Quindi $(0, +\infty) \subseteq \text{dom}(F)$. Inoltre per $t \rightarrow 0$ si trova

$$f(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \quad 1/3 < \alpha < 1$$

cioè f è infinito di ordine strettamente inferiore di 1 rispetto all'infinito campione $1/t$ e quindi f è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow 0^+$.

B. Simmetrie: La funzione F sarebbe pari essendo $f(t)$ dispari se si considera il prolungamento di F nominato nell'avviso di esercizio 2.

C. Limiti di F agli estremi del dominio: Per $x \rightarrow 0^+$ c'è un limite finito per l'argomento sopra e quindi non c'è asintoto verticale. Per $x \rightarrow +\infty$ si analizza il comportamento di f per $t \rightarrow +\infty$ trovando

$$f(t) \sim \frac{\ln t}{t^{1/3}}$$

che è infinitesima di ordine inferiore di $1/3 < 1$ rispetto all'infinitesima campione $1/t$ e quindi f **NON** è integrabile in senso generalizzato per $t \rightarrow +\infty$. Segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} |F(x)| = +\infty$. Inoltre essendo $f(t) > 0$ per $t \in (1, +\infty)$ si vede che $F(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Non c'è un asintoto orizzontale nè un asintoto obliquo essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = 0.$$