Esercizi di Istituzioni di Matematica – N.9

Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Sia $f_{a,b}$ la funzione definita da

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq -\pi/2 \\ a \sin x + b & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

trovare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che $f_{a,b}$ sia continua su tutto $\mathbf{R}$.

Soluzione: La risposta è $a = 1/2, b = -1/2$. Infatti, essendo le funzioni $\sin x, \cos x$ continue su tutto $\mathbf{R}$ la funzione $f_{a,b}$ è continua in $\mathbf{R} \setminus \{\pm\pi/2\}$. In $x = \pi/2$ si ha

$$f_{a,b}(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2^+} f_{a,b}(x) = \lim_{x \to \pi/2^+} \cos x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pi/2^-} f_{a,b}(x) = \lim_{x \to \pi/2^-} a \sin x + b = a + b$$

da cui segue la condizione necessaria $a = -b$. In $x = -\pi/2$ un argomento analogo dà la condizione necessaria $-a + b = -1$. Risolvendo queste due condizioni si ottiene il risultato.

Esercizio 2. Sia $f_{b,c}$ la funzione definita da

$$f_{b,c}(x) = \begin{cases} x^2 + 2bx + c & |x| > 1 \\ cx + b & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Trovare i valori di $b, c \in \mathbf{R}$ tali che $f_{b,c}$ sia continue su tutto $\mathbf{R}$.

Soluzione: La risposta è $b = -1, c = -2$. È chiaro che $f_{b,c}$ è continua in $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$ per ogni $b, c \in \mathbf{R}$. Usando l'argomento dell'Esercizio 1, si trova la condizione necessaria $b = -1$ in $x = 1$ e la condizione necessaria $3b = 1 + 2c$ in $x = -1$.

Esercizio 3. Dire se la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2 - e^{1/x}}$ ammette un prolungamento che è continua su tutto $\mathbf{R}$.
Soluzione: La risposta è no. Infatti c'è un salto in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1/2 \quad \text{ma} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Inoltre, c'è una discontinuità di seconda specie in $x = 1/\ln 2$.

Esercizio 4. Mostrare che esiste almeno una soluzione di $\ln(x + 1) = 1 - x$ nell'intervallo $(0, 1)$

Soluzione: Ricordiamo il Teorema degli zeri: *Sia f continua in $[a, b]$. Se $f(a)f(b) < 0$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.* Qui le soluzioni dell'equazione data sono equivalenti agli zeri della funzione $f(x) = \ln(x + 1) + x - 1$. La funzione f è continua in $(-1, +\infty)$ e quindi anche in $[0, 1]$. Si nota che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = \ln 2 > 0$ e quindi esiste $c \in (0, 1)$ tale che $f(c) = 0$.

Esercizio 5. Mostrare che esiste almeno una soluzione reale di $\arctan(x+1)+x=0$.
N.B. arctan è la funzione "arctg".

Soluzione: Si nota che $f(x)=\arctan(x)+x$ è continua su tutto $\mathbf{R}$ e vale $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. Quindi esistono $x_-<0$ e $x_+>0$ tali che $f(x_-)<0$ e $f(x_+)>0$. Essendo f continua in $[x_-,x_+]$ e $f(x_-)f(x_+)<0$ per il Teorema degli zeri esiste $c\in(x_-,x_+)$ tale che $f(c)=0$.

Esercizio 6. Sia $P_{2n+1}(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+\ldots+a_1x+a_0$ un polinomio di grado dispari ($a_{2n+1}\neq 0$) con coefficienti reali $a_k\in\mathbf{R}, k=0,1,\ldots 2n=1$. Mostrare che esiste almeno una soluione reale di $P_{2n+1}(x)=0$.

Soluzione: Si nota che $f(x)=P_{2n+1}(x)$ è continua su tutto $\mathbf{R}$ e vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\operatorname{sign}(a_{2n+1})\,[\pm\infty]$$

Nel caso $a_{2n+1}>0$ esistono $x_-<0$ e $x_+>0$ tali che $f(x_-)<0$ e $f(x_+)>0$. Essendo f continua in $[x_-,x_+]$ e $f(x_-)f(x_+)<0$ per il Teorema degli zeri esiste $c\in(x_-,x_+)$ tale che $f(c)=0$. Il caso $a_{2n+1}<0$ è analogo dove esistono $x_\pm$ tali che il segno di $f(x_\pm)$ è $\mp$.

Esercizio 7. Sia f la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x & x\in[-1,0] \\ e^{\ln^3 x} & x\in(0,2] \end{cases}$$

Mostrare che f ammette massimo e minimo in $[-1,2]$.

Soluzione: Ricordiamo il Teorema di Weierstrass: *Sia f continua su K compatto. Allora f ammette massimo e minimo in K; cioè esistono $x_m, x_M\in K$ tali che*

$$f(x_m)=\min_K f \quad \text{e} \quad f(x_M)=\max_K f$$

Qui il dominio $K=[-1,2]$ è compatto essendo chiuso e limitato (Il Teorema di Heine-Borel). Inoltre è chiaro che f è continua in $K\setminus\{0\}$. Per controllare la continuità in $x=0$ si calcola

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-3x\right)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\ln^3 x}=\lim_{y\to-\infty} e^y=0$$

Quindi si può applicare il Teorema di Weierstrass.

Esercizio 8. Siano $a\in\mathbf{R}$ e f la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|e^x}{x} & x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ a & x=0 \end{cases}$$

a) Dire se si può applicare il Teorema di Weierstrass a f nell'intervallo $[-1,1]$
b) Trovare il massimo/minimo di f su $[-1,1]$ se esistono.

Soluzione: a) Si nota che $f(x)=e^x$ per $x>0$ e $f(x)=-e^x$ per $x<0$. Segue che c'è un salto in $x=0$ e quindi nessun valore di a può rendere f continua in $x=0$. Quindi è impossibile applicare il Teorema di Weierstrass per ogni $a\in\mathbf{R}$.

b) Usando il grafico di f si trova che ci sono 3 casi. **i)** per $a \geq e$: $\max f = a$ e non esiste un minimo; **ii)** per $-1 < a < e$: $\max f = e$ e non esiste un minimo; **iii)** per $a \leq -1$: $\max f = e, \min f = a$.

Esercizio 9. Trovare i valori di $a, k \in \mathbf{R}$ per cui si può applicare il Teorema di Weierstrass alla funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x/3)}{x^{2-k}} & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Il dominio della funzione $[-1,1]$ è compatto (chiuso e limitato) e la funzione è continua in $[-1,1] \setminus \{0\}$ quindi basta scegliere a, k in modo tale che f sia continua in $x = 0$. Si nota

$$f(x) = x^{k-2} \sin(x/3) = \frac{1}{3} \frac{\sin(x/3)}{x/3} x^{k-1}$$

dove il limite dipende dal ultimo fattore; segue che il limite vale: 0 per ogni $k > 1$; $1/3$ per $k = 1$; non esiste finito per ogni $k < 1$. Quindi ci sono due casi: **i)** $a = 0$ e $k > 1$; **ii)** $a = 1/3$ e $k = 1$.