Matematica del Continuo
C.L. in Comunicazione Digitale, a.a. 2009/2010
Esercizi N. 2 - Logica dei predicati: quantificatori

Prof. K. Payne

Premessa: Una logica basata solo sulle proposizioni e connettivi logici è spesso insufficiente per i nostri obiettivi. Abbiamo bisogno di affermazioni che dipendono da uno o più variabili. Tale affermazioni sono chiamate <u>*predicati*</u>. La frase $p(x)$ definita da

$$x \geq 1 \tag{1}$$

ha valore di verità che dipende dal valore della variabile (reale) x. Ad esempio, $p(-2)$ è falsa ma $p(3)$ è vera. In modo analogo, la frase $p(x, y)$ definita da

$$x \geq y \tag{2}$$

ha valore di verità che dipende dai valori delle variabili (reali) x, y. Ad esempio, $p(2, 1)$ è vera ma $p(3, 5)$ è falsa.
Se fissiamo (o limitiamo) le possibili valori delle variabili, il predicato diventa una proposizione sola e possiamo dare un valore di verità (V o F). Ad esempio, in (1), possiamo limitare x ad essere una soluzione di una certa equazione per trovare una proposizione

$$\text{per ogni } x \text{ soluzione reale di } x^2 - 8x + 15 = 0 : \quad x \geq 1 \tag{3}$$

Questa proposizione è vera perchè $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$ e quindi $x = 3, 5$. Per la frase (2) possiamo, ad esempio, chiedere solo la proprietà per qualche valore di (x, y), ad esempio

$$\text{per qualche } x, y \text{ reale} : \quad x \geq y \tag{4}$$

è una proposizione vera perchè esiste almeno una copia "buona" $x = 2, y = 1$.
In questi esempi, abbiamo fatto uso dei cosidetti <u>*quantificatori logici*</u> che sono definiti nel moso seguente.

Definizione: (quantificatori logici)

i) *Il <u>quantificatore universale</u> si denota con $\forall$ e significa "per ogni".*

ii) *Il <u>quantificatore esistenziale</u> si denota con $\exists$ e significa "esiste".*

Con questi simboli possiamo ricrivere (3) e (4) nel modo seguente:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;\text{ t.c. }\; x^2 - 8x + 15 = 0 : \quad x \geq 1 \tag{5}$$

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : \quad x \geq y \tag{6}$$

Fatto: Una proprietà cruciale nella gestione di proposizioni costruite tramite predicati è la loro negazione. Si ha

$$\neg\, [\forall x : p(x)] \Leftrightarrow [\exists x : \neg p(x)]$$

$$\neg\, [\exists x : p(x)] \Leftrightarrow [\forall x : \neg p(x)]$$

Osservazione: Per un predicato con due (o più) variabili, si può usare due o più quantificatori, **ma** è importante l'ordine in cui vengono usati. Ad esempio, siano x uno studente iscritto al primo anno a Comunicazione Digitale e y un'esame obligatorio del primo anno. Se definiamo il predicato

$$p(x,y): \quad x \text{ supera l'esame } y \tag{7}$$

allora abbiamo le seguente proposizioni

- $\forall y, \exists x : p(x,y)$ significa "per ogni materia esiste uno studente che supera quel'esame"
- $\exists x, \forall y : p(x,y)$ significa "esiste uno studente che supera tutti gli esami"
- $\exists y, \forall x : p(x,y)$ significa "esiste un esame superato da tutti gli studenti"
- $\forall x, \exists y : p(x,y)$ significa "per ogni studente esite un esame superato da quel studente"

Esercizio 1: Per le seguente proposizioni trovare il loro negazione

a) $\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$

b) $\exists x : p(x) \Rightarrow q(x)$

c) $\forall x : p(x) \Leftrightarrow q(x)$

d) $\exists x : p(x) \Leftrightarrow q(x)$

Esercizio 2: Per le proposizioni sopra enunciate per il predicato (7), trovare le loro negazione e significato a parole.

Esercizio 3: Per il predicato

$$p(x,y) : x < y$$

con $x, y \in \mathbb{N}$, interpretare le proposizioni:

$$\forall y, \exists x : p(x,y), \quad \exists x, \exists y : p(x,y), \quad \forall y, \forall x : p(x,y), \quad \forall x, \exists y : p(x,y)$$