ESEMPIO TEMA D'ESAME
MATEMATICA DEL CONTINUO – A.A. 2009/10

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore

Per l'ammissione alla prova orale occorre totalizzare almeno 9 punti.

Esercizio 1 (3 punti) Calcolare l'espressione algebrica del numero complesso $w = (1+i)^{10}$ e quindi risolvere l'equazione $z^3 = w$.

Esercizio 2 (3 punti) Mettere in relazione le seguenti successioni:

$$a_n = 3^n \qquad b_n = \sqrt{n!} \qquad c_n = 5 \cdot 2^n$$

tramite i simboli di Landau.

Esercizio 3 (3 punti) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto della funzione:

$$f(x) = 3\sqrt{x} - 5\ln(1+x)$$

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare l'area della figura piana

$$S = \{(x,y) : 0 \le y \le x^2 e^{-x}\} \ .$$

Esercizio 5 (3 punti) Dopo aver stabilito il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$$

determinare il comportamento asintotico delle sue ridotte.

Esercizio 6 (4 punti) Risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n & n \ge 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

determinando la funzione generatrice del problema, l'espressione esplicita degli a_n ed il loro comportamento asintotico.

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora

Ciascun argomento vale fino a 2 punti: per l'ammissione alla prova orale occorre totalizzare almeno 6 punti.

Argomento 1 Dare la definizione di estremo superiore di un sottoinsieme (non vuoto) di $\mathbb{R}$, utilizzandola poi per verificare che:

$$\sup\{n^2 - 5n + 1 : n \in \mathbb{N},\ n \geq 10\} = +\infty$$

Argomento 2 Dopo aver dato la definizione corrispondente simbolo Θ di Landau, verificare che l'espressione $\Theta(\log_q a_n)$ non dipende dalla scelta della base q del logaritmo.

Argomento 3 Dare la definizione di integrale generalizzato di una funzione continua sull'intervallo $[\pi, +\infty)$, discutendo esplicitamente i casi di:

$$f(x) = \sin x \qquad\qquad g(x) = 1 + \sin x$$

Argomento 4 Fornire un controesempio alla seguente affermazione: comunque scelta una successione positiva, risulta $O(a_n) = O(a_n^2)$ per $n \to +\infty$.

Argomento 5 Stabilire se la successione $a_n = n^2 + 5\sin n$ è o meno definitivamente monotona.

Argomento 6 Dimostrare che l'affermazione:

$$\sqrt[3]{x^2 + x^3} \;=\; x^{2/3} + \frac{1}{3}x^{4/3} + O(x^{8/3})$$

è vera per $x \to 0$.