

COGNOME NOME MATR

Esame di Matematica del Continuo – 23/02/2010

1. ABILITÀ DI CALCOLO – TEMPO 2 ORE
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 9 PUNTI

Esercizio 1 (4 punti) Tracciare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$ precisando gli eventuali estremi relativi ed assoluti (è richiesto lo studio degli eventuali asintoti, ma non quello della concavità).

Esercizio 2 (2 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $2^{\alpha x} = \Omega(3^x)$ quando $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare lo sviluppo asintotico della successione $\ln(n + n^2)$ per $n \rightarrow +\infty$ e con una precisione $o(n^{-2})$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare l'area della figura piana $S = \{(x, y) : 1 \leq ye^x \leq x\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Stabilire se l'affermazione $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} < \frac{3}{2}$ è vera oppure falsa.

Esercizio 6 (5 punti) Usando le funzioni generatrici, risolvere l'equazione di ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = n + a_n & n \geq 0 \\ a_0 = 1, & a_1 = 0 \end{cases}$$

e precisare il comportamento asintotico della soluzione.

COGNOME NOME MATR

Esame di Matematica del Continuo – 23/02/2010

2. COMPrensione DELLA TEORIA – TEMPO 1 ORA
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 6 PUNTI

Argomento 1 (2 punti) Dare la definizione proprietà definitivamente vera sui naturali. Quindi, utilizzando solo la definizione, stabilire se la successione $\log_{1/2}(4^n) + 8\sqrt{n}$ sia o meno definitivamente positiva.

Argomento 2 (2 punti) Nell'ambito dei limiti di successioni, spiegare perché $0 \cdot \infty$ venga considerato un caso di indecisione, illustrando la spiegazione tramite gli esempi ritenuti più opportuni.

Argomento 3 (2 punti) Fornire un esempio di polinomio $P(x)$ a coefficienti reali che ammetta $x = 2$ ed $x = 1 + 2i$ tra le sue radici complesse.

Argomento 4 (2 punti) Dimostrare che la disequazione $1 + \ln x > x$ non ammette nessuna soluzione.

Argomento 5 (2 punti) Al variare di $n \geq 1$ calcolare $\sum_{k=1}^n \left\lceil \frac{k+2}{k} \right\rceil$.

Argomento 5bis (2 punti) Definire cosa si intenda per contronominale di un'implicazione $A \Rightarrow B$. Quindi esplicitare, dimostrandola, la contronominale dell'implicazione: *se il quadrato di un numero naturale è dispari, allora quel numero è dispari*.

Argomento 6 (2 punti) Definire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ed illustrare, in tale contesto, le conseguenze dell'ipotesi: $a_n = b_n - b_{n+1}$ per ogni $n \geq 0$.