

**Esame di Matematica del Continuo – 06/07/2010**

1. ABILITÀ DI CALCOLO – TEMPO 2 ORE  
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 9 PUNTI

**Esercizio 1** (3 punti) Calcolare la forma trigonometrica e la forma algebrica del numero complesso  $w = (\sqrt{3} + i)^{18}$  e delle soluzioni complesse dell'equazione  $z^4 = w$ .

**Esercizio 2** (3 punti) Calcolare lo sviluppo asintotico per  $x \rightarrow +\infty$  della funzione  $f(x) = \frac{x^2}{1 - 2x^2 + x^3}$  in potenze di  $x^{-1}$  e con una precisione di  $O(x^{-4})$ .

**Esercizio 3** (3 punti) Tracciare un grafico qualitativo della funzione  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}$  precisando gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

**Esercizio 4** (2 punti) Calcolare  $\int \ln(\sqrt{x}) dx$ .

**Esercizio 5** (3 punti) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^n + n) x^n$  e determinare la funzione della quale è la serie di MacLaurin.

**Esercizio 6** (4 punti) Usando il confronto integrale, trovare un maggiorante ed un minorante per  $\sum_{k=1}^n (2k + \sqrt{k})$  al variare di  $n$ . Determinare poi la rapidità di divergenza di tale somma per  $n \rightarrow +\infty$ .

COGNOME ..... NOME ..... MATR .....

**Esame di Matematica del Continuo – 06/07/2010**

2. COMPrensione DELLA TEORIA – TEMPO 1 ORA  
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 6 PUNTI

**Argomento 1** (2 punti) Nell'ambito dei limiti di successioni, dare la definizione corrispondente ad  $a_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi, utilizzando la sola definizione, dimostrare che  $n^2 - n \rightarrow +\infty$ .

**Argomento 2** (2 punti) Nell'ambito dei limiti di successioni, dare la definizione corrispondente ad  $a_n = o(b_n)$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa: se  $a_n \rightarrow +\infty$  allora  $\sqrt{a_n} = o(a_n)$ .

**Argomento 3** (2 punti) Dare la definizione di derivata di una funzione  $f(x)$  nel punto  $x = 1$ . Data  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  calcolare quindi  $f'(1)$  usando solo la definizione.

**Argomento 4** (2 punti) Ricavare la formula che descrive le somme parziali della serie geometrica  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  al variare di  $x \in \mathbb{R}$ .

**Argomento 5** (2 punti) Nell'ambito delle funzioni  $f(x)$  continue sull'intervallo  $[2, +\infty)$ , dare la definizione corrispondente ad  $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ . Quindi, fornire un esempio di  $f(x)$  che soddisfi contemporaneamente:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

**Argomento 6** (2 punti) Sia  $s_n$  il numero di stringhe binarie di lunghezza  $n \geq 1$ , prive di zeri consecutivi: ricavare un'equazione di ricorrenza per  $s_n$ .