Seminari Crediti F – Nonlinear PDE – a.a. 2018/2019

TEMA # 1: Sistemi EDP nonlineari nell'ambito del "cultural heritage"

Si propongono alcuni lavori che trattano la modellazione e lo studio analitico di fenomeni associati al degrado e alla conservazione di monumenti storici in pietra. Da un punto di vista analitico si tratta dello studio di sistemi di EDP che accoppiano equazioni evolutive scritte nel volume e sul bordo. Le equazioni sono del tipo reazione diffusione e transizione di fase, con termini di accoppiamento fortemente nonlineari e presenza di operatori massimali monotoni. Tale tema si colloca in un progetto di ricerca sulla applicazione di modelli differenziali al restauro e alla conservazione nel "cultural heritage".

REFERENTI: Proff. Elena Bonetti e Cecilia Cavaterra

PER INFORMAZIONI: elena.bonetti@unimi.it, cecilia.cavaterra@unimi.it

BIBLIOGRAFIA:

[1] Clarelli F., Fasano A., Natalini R, *Mathematics and monument conservation: free boundary models of marble sulfation*, SIAM J. Appl. Math. **69** (2008), no. 1, 149–168.

[2] Guarguaglini F.R., Natalini R., *Global existence of solutions to a nonlinear model of sulphation phenomena in calcium carbonate stones*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **6** (2005), no. 3, 477–494.

[3] Guarguaglini F.R., Natalini R., *Fast reaction limit and large time behavior of solutions to a nonlinear model of sulphation phenomena*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 1-3, 163–189.

[4] Bonetti E., Cavaterra C., Freddi F., Grasselli M., Natalini R., *A nonlinear model for marble sulphation including surface rugosity: theoretical and numerical results*, Communications on Pure and Applied Analysis, Volume **18**, Issue 2, March 2019, 977-998.

TEMA # 2: Il metodo dei iperpiani mobili per equazioni nonlineari

Si propongono alcuni lavori che l'utilizzo dei metodi del principio di massimo per ottenere proprietà qualitative di soluzioni per EDP nonlineari. Tali properietà sono simmetrie (anche parziale) e monotonia (anche parziale) e le tecniche coinvolgono i metodi dei iperpiani mobili, sfere mobili e slittamento dei domini.

REFERENTE: Prof. Kevin Payne

PER INFORMAZIONI: kevin.payne@unimi.it

BIBLIOGRAFIA: tutti i lavori disponibili in forma elettronica su richiesta.

[1] H. Berestycki and L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method* Boll. Soc. Brazil **22** (1991), 1-37.

[2] W. Chen and C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63** (1991}, 615-622.

[3] B. Gidas and W.M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209—243.

[4] B. Gidas and W.M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations* ***R^n***, Mathematical analysis and applications, Part A, Adv. in Math. Suppl. Stud. **7**, (1981), 369—402.

[5] P. Padilla, *Symmetry properties of positive solutions of elliptic equations on symmetric domains*, Appl. Anal **64** (1997), 153-169.

[6] J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Ration. Mech. 43 (1971), 304-318.

TEMA # 3: Unicità per il problema inverso dello scattering acustico

In questa attività, che può coinvolgere 3-4 studenti, si svilupperà la teoria che permette di dimostrare uno dei risultati classici di unicità nell'ambito dei problemi inversi per equazioni alle derivate parziali, il risultato di unicità di Schiffer per il problema inverso dello scattering acustico (incluso come personal communication nel libro di Lax e Phillips, Scattering Theory, Academic Press, 1967). Il modello descrive applicazioni legate al sonar che presentano similarità sia con quelle legate al radar (in cui si usano onde elettromagnetiche invece di quelle acustiche) sia con l'ecografia. Verranno sviluppati vari metodi classici di teoria del potenziale.

REFERENTE: Prof. Luca Rondi

PER INFORMAZIONI: luca.rondi@unimi.it

BIBLIOGRAFIA:

D. Colton e R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Theory*, Springer 1998.

D. Colton e R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons 1983.

TEMA # 4: Convergenza di Mosco e applicazione alla stabilità di problemi di Neumann rispetto a variazioni del dominio

In questa attività, che può essere limitata a 1-2 studenti, si introdurranno la convergenza di Mosco e le sue applicazioni alla stabilità per il problema di Neumann rispetto a variazioni del dominio. La convergenza di Mosco è una convergenza di tipo variazionale. Verrà sviluppato, in particolare in dimensione 2, il caso della convergenza di Mosco per spazi di

Sobolev definiti su domini differenti, la cui importanza è data dal fatto che tale convergenza è strettamente legata, anzi in alcuni casi è equivalente, alla stabilità delle soluzioni di problemi di Neumann per equazioni di tipo ellittico definite sugli stessi domini.

REFERENTE: Prof. Luca Rondi

PER INFORMAZIONI: luca.rondi@unimi.it

BIBLIOGRAFIA:

D. Bucur e N. Varchon, *Boundary variation for a Neumann problem*, Annali di Pisa 29 (2000) 807-821.

A. Chambolle e F. Doveri, *Continuity of Neumann linear elliptic problems on varying two-dimensional bounded open sets*, Communications in Partial Differential Equations 22 (1997) 811-840.

TEMA # 5: Simmetrizzazione e applicazioni.

In questo tema sono raccolte più proposte, basate sulla nozione di riordinamento o simmetrizzazione secondo Schwarz. Data una funzione misurabile a supporto compatto, è sempre possibile associare ad essa una funzione radialmente simmetrica che preservi alcune proprietà integrali della funzione originale. La disuguaglianza di Polya-Szego, poi, assicura che la norma integrale del gradiente della funzione riordinata sia minore o uguale a quella della funzione originale: ovvero, l'operazione di riordinamento non aumenta l'energia della funzione in gioco. Questa fondamentale proprietà consente l'applicazione della tecnica di simmetrizzazione a molti problemi fisici di natura isoperimetrica, e, più in generale, a EDP nell'ambito del calcolo delle variazioni.

REFERENTE: Proff. Marta Calanchi, Bernhard Ruf, Federica Sani, Cristina Tarsi

PER INFORMAZIONI: cristina.tarsi@unimi.it

BIBLIOGRAFIA: per tutte le proposte, come introduzione alla nozione di simmetrizzazione si suggerisce il seguente testo:
S. Kesavan *Symmetrization and applications*, Series in Analysis, 3. World Scientific Publishing (2006)

[1] **Talenti comparison principle.**
G. Talenti, *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **3** (1976), 697--718.

[2] **Existence of a ground state solution of a nonlinear scalar field equation.**
H. Berestycki e P.L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313--345.

[3] **Best constant in Sobolev inequality.**
G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353--372.

[4] **The limiting case of the Sobolev embedding theorem.**
- D.E. Marshall, *A new proof of a sharp inequality concerning the Dirichlet integral,* Ark. Mat**. 27** (1989) 131—137, paragrafo 3.
- S.Y.A. Chang, *The Moser-Trudinger inequality and applications to some problems in conformal geometry*, Nonlinear partial differential equations in differential geometry (Park City, UT, 1992), 65--125, 1996, Lecture 4
- L. Carleson and S.Y.A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser,* Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), no. 2, 113--127.

TEMA # 6: Spazi di Orlicz e caso limite nelle immersioni di Sobolev.

In questo tema si propone una introduzione allo studio degli spazi di Orlicz; tali spazi possono essere visti come una generalizzazione degli spazi di Lebsegue, basati sulla limitatezza di una norma integrale definita tramite una funzione convessa. L'introduzione vuole essere finalizzate alla lo studio del caso limite per immersioni di tipo Sobolev (parziale sovrapposizione al precedente tema 5.4)

REFERENTE: Proff. Marta Calanchi, Bernhard Ruf, Federica Sani, Cristina Tarsi

PER INFORMAZIONI: cristina.tarsi@unimi.it

BIBLIOGRAFIA:
-M.A. Krasnoselskii e Y.B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff Ltd., (1966).
- N. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz Spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473--483.

TEMA # 7: Disuguaglianze di tipo Hardy.

In questo tema si propone una introduzione alla classica disuguaglianza di Hardy e alle sue generalizzazioni.

REFERENTE: Proff. Marta Calanchi, Bernhard Ruf, Federica Sani, Cristina Tarsi

PER INFORMAZIONI: cristina.tarsi@unimi.it

BIBLIOGRAFIA:
-N. Ghoussoub, A. Moradifam, *Functional inequalities: new perspectives and new applications,* American Mathematical Society, Providence, RI (2013).
- A. Kufner, L. Maligranda, *The prehistory of the Hardy inequality*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 715–732

- E. Mitidieri, *A simple approach to Hardy inequalities*, Math. Notes **67** (2000), 479--486.

TEMA # 8: Metodi astratti nella teoria dei punti critici.

Si propongono due argomenti classici nella teoria dei punti critici:

1) Principio Variazionale di Ekeland: in generale non è chiaro quando un funzionale limitato e semicontinuo inferiormente ammetta minimo. Una variante dovuta a Ekeland del principio di Dirichlet, permette di costruire successioni minimizzanti per un funzionale E, e così di avere soluzioni approssimanti di determinati problemi. Il principio ha parecchie applicazioni in vari campi dell'analisi, oltre ad essere un risultato di per sé interessante.

2) Varietà di Nehari: negli anni '60 Nehari introdusse questo strumento per studiare un problema con condizioni al bordo per certe equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nonlineari mostrando che soluzioni non triviali possono essere ottenute attraverso una minimizzazione vincolata. Il metodo si è anche rivelato molto versatile nello studio dell'esistenza di soluzioni anche per PDE, e in generale in teoria dei punti critici.

REFERENTE: Proff. Marta Calanchi, Bernhard Ruf, Federica Sani, Cristina Tarsi

PER INFORMAZIONI: cristina.tarsi@unimi.it

BIBLIOGRAFIA:

[1] **Ekeland Variational Principle and applications.**
- D. G. deFigueiredo, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1989.
http://www.math.tifr.res.in/~publ/ln/tifr81.pdf
-M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems,* Springer 1990.

[2] **The Nehari Manifold.**
-A. Szulkin, T. Weth, *The method of Nehari manifold*
-Z. Nehari, *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 101--123.