Seminari Crediti F – EDP Nonlineari ed Applicazioni – a.a. 2019/2020

TEMA # 1: Equazioni di evoluzione.
Formulazione debole e alcuni risultati di esistenza e unicità delle soluzioni di problemi ai valori iniziali e al contorno associati a equazioni di evoluzione di particolare importanza nelle applicazioni.

REFERENTE: Prof. Cecilia Cavaterra
PER INFORMAZIONI: cecilia.cavaterra@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] James C. Robinson *Infinite-Dimensional Dynamical Systems,* Cambridge Text in Applied Mathematics, Chapter 8: Nonlinear reaction-diffusion equations.

[2] James C. Robinson *Infinite-Dimensional Dynamical Systems,* Cambridge Text in Applied Mathematics, Chapter 9: The Navier-Stokes Equations: Existence and uniqueness.

TEMA # 2: Attrattori
Introduzione alla teoria degli attrattori.

REFERENTE: Prof. Cecilia Cavaterra
PER INFORMAZIONI: cecilia.cavaterra@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] James C. Robinson *Infinite-Dimensional Dynamical Systems,* Cambridge Text in Applied Mathematics, Chapter 10: The Global Attractor: Existence and General Properties

---

TEMA # 3: Disuguaglianza di Poincaré
Alcuni risultati sulle disuguaglianze di tipo Poincaré.

REFERENTE: Prof. Cecilia Cavaterra
PER INFORMAZIONI: cecilia.cavaterra@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] Giovanni Alessandrini, Antonino Morassi, Edi Rosset *The linear constraints in Poincaré and Korn type inequalities,* Forum Math., 20 (2008), no.3, 557-569.

[2] Referenze contenute in [1].

TEMA # 4: Spazi di Sobolev
Spazi di Sobolev frazionari, definizione e alcune proprietà.

REFERENTE: Prof. Cecilia Cavaterra

PER INFORMAZIONI: cecilia.cavaterra@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, Enrico Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces,* Bull. Sci. math. 136 (2012) 521–573.

[2] Referenze contenute in [1].

TEMA # 5: Il mantello di Harry Potter – un approccio variazionale

Il cloaking è una tecnica che permette di nascondere oggetti a date frequenze dello spettro elettromagnetico. La possibilità di rendere un oggetto "invisibile" è attualmente molto studiata a livello ingegneristico e fisico, e presenta problemi matematici di notevole interesse. Lo studente interessato a questo argomento, potrà fare una panoramica delle varie tecniche utilizzate e approfondire il cloaking per risonanza anomala localizzata, in particolare l'approccio di tipo variazionale.

REFERENTI: Prof. Giulio Ciraolo
PER INFORMAZIONI: giulio.ciraolo@unipa.it
BIBLIOGRAFIA: tutti i lavori sono disponibili in forma elettronica su richiesta.

[1] R. V. Kohn, J. Lu, B. Schweizer, M. I. Weinstein, *A Variational Perspective on Cloaking by Anomalous Localized Resonance*, Comm. Math. Phys. **328** (2014), 1-27.

[2] H. Ammari, G. Ciraolo, H. Kang, H. Lee, G.W. Milton, *Spectral theory of a Neumann–Poincaré-type operator and analysis of cloaking due to anomalous localized resonance,* Arch. Ration. Mech. Anal., **208** (2013), no. 1, 275-304.

[3] K. Bryan, T. Leise, *Impedance Imaging, Inverse Problems, and Harry Potter's Cloak*, SIAM Review **52** (2010), no. 2, 359–377.

[4] M. Lassas, G. Milton, *Invisibility cloaking*. Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics, Springer Verlag, 2013.

TEMA # 6: Disuguaglianze funzionali e trasporto ottimale di massa

Il trasporto di massa ottimale può essere utilizzato per dimostrare alcune disuguaglianze funzionali come la disuguaglianza di Sobolev o quelle di Gagliardo-Nirenberg. Oltre a fornire un approccio di dimostrazione semplice, si nota come la struttura di R^n non giochi un ruolo fondamentale e dunque è possibile estendere queste disuguaglianze (in maniera ottimale) ad altri ambienti non necessariamente Euclidei.

REFERENTE: Prof. Giulio Ciraolo
PER INFORMAZIONI: giulio.ciraolo@unimi.it
BIBLIOGRAFIA: tutti i lavori sono disponibili in forma elettronica su richiesta.

[1] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities,* Adv. Math., **182** (2004), 307-332

[2] C. Villani, Topics in Optimal Transportation. Graduate Studies in Mathematics, **58** (2016).

TEMA # 7: Equazioni di Monge-Ampère nel trasporto ottimale

Il problema di trasporto ottimale è soggetto di intensa interessa attuale per via delle sue applicazioni possibili nel mondo reale. Protagonista nello studio sono equazioni completamente nonlineari che coinvolgono il determinante della hessiana della soluzione. L'obbiettivo di questo progetto sarebbe di impostare il problema di trasporto ottimale, indicare come equazioni di questo tipo nascono dal problema e indicare alcuni aspetti della teoria per le equazioni. Questo progetto potrebbe essere anche diviso tra due (o più) studenti. Si nota il legame con Tema # 6 (e referenza bibliografica [2]).

REFERENTE: Prof. Kevin Payne
PER INFORMAZIONI: kevin.payne@unimi.it
BIBLIOGRAFIA: tutti i lavori disponibili in forma elettronica su richiesta.

[1] G. De Philippis and A. Figalli, *The Monge-Ampère equation and its link to optmal transportation*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2014), 527-580.

[2] G. De Philippis and A. Figalli, *W^{1,2} regularity for solutions of the Monge-Ampère equation*, Invent. Math. **192** (2013), 55-69.

TEMA # 8: Regolarità di soluzioni viscose per equazioni completamente nonlineari

Si propongono alcuni lavori sulla questione di regolarità in spazi di Sobolev e Hölder per equazioni ellittiche completamente nonlineari F(Hu) = 0 dove Hu è l'hessiana di u in senso viscoso. Obiettivi principali sono stime apriori del tipo Krylov-Safonov legati alla validità di disuguaglianze di Harnack.

REFERENTE: Prof. Kevin Payne
PER INFORMAZIONI: kevin.payne@unimi.it
BIBLIOGRAFIA: tutti i lavori disponibili in forma elettronica su richiesta.

[1] S. Armstrong, L. Silvestre and C. Smart, *Partial regularity of solutions of fully nonlinear uniformly elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **65** (2012), 1169-1184.

[2] C. Mooney, *A proof of the Kylov-Safonov theorem without localization*, Comm. Partial Differential Equations **44** (2019), 681-690.

TEMA # 9: Scattering acustico

Si possono sviluppare alcuni metodi classici di teoria del potenziale, in particolare quelli legati alla risoluzione di un problema di Dirichlet per l'equazione ridotta delle onde (equazione di Helmholtz) su un dominio esterno. Tale problema è un modello del problema diretto dello scattering acustico.

Risolto il problema diretto, si può affrontare uno dei risultati classici di unicità nell'ambito dei problemi inversi per equazioni alle derivate parziali, quello di Schiffer per il problema inverso dello scattering acustico. Tale problema inverso descrive applicazioni legate al sonar che presentano similarità sia con quelle legate al radar (in cui si usano onde elettromagnetiche invece di quelle acustiche) sia con l'ecografia.

REFERENTE: Prof. Luca Rondi
PER INFORMAZIONI: luca.rondi@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] D. Colton e R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Theory*, Springer 1998.

[2] D. Colton e R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons 1983.

TEMA # 10: Convergenza di Mosco e applicazione alla stabilità di problemi di Neumann rispetto a variazioni del dominio

L'obiettivo è quello di introdurre un tipo di convergenza variazionale, la convergenza di Mosco. Un caso significativo è la convergenza di Mosco per spazi di Sobolev definiti su domini differenti. Infatti tale convergenza è strettamente legata, anzi in alcuni casi è equivalente, alla stabilità delle soluzioni di problemi di Neumann per equazioni di tipo ellittico definite sugli stessi domini. In particolare, si può sviluppare il problema in dimensione 2 dove tale convergenza è perfettamente caratterizzata.

REFERENTE: Prof. Luca Rondi
PER INFORMAZIONI: luca.rondi@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] D. Bucur e N. Varchon, *Boundary variation for a Neumann problem*, Annali di Pisa 29 (2000) 807-821.

[2] A. Chambolle e F. Doveri, *Continuity of Neumann linear elliptic problems on varying two-dimensional bounded open sets*, Communications in Partial Differential Equations 22 (1997) 811-840.

TEMA # 11: Simmetrizzazione e applicazioni.

In questo tema sono raccolte più proposte, basate sulla nozione di riordinamento o simmetrizzazione secondo Schwarz. Data una funzione misurabile a supporto compatto, è sempre possibile associare ad essa una funzione radialmente simmetrica che preservi alcune proprietà integrali della funzione originale. La disuguaglianza di Polya-Szego, poi, assicura che la norma integrale del gradiente della funzione riordinata sia minore o uguale a quella della funzione originale: ovvero, l'operazione di riordinamento non aumenta l'energia della funzione in gioco. Questa fondamentale proprietà consente l'applicazione della tecnica di simmetrizzazione a molti problemi fisici di natura isoperimetrica, e, più in generale, a EDP nell'ambito del calcolo delle variazioni.

REFERENTE: Proff. Marta Calanchi, Bernhard Ruf, Cristina Tarsi
PER INFORMAZIONI: cristina.tarsi@unimi.it
BIBLIOGRAFIA: per tutte le proposte, come introduzione alla nozione di simmetrizzazione si suggerisce il seguente testo:

[0] S. Kesavan *Symmetrization and applications*, Series in Analysis, 3. World Scientific Publishing (2006)

[1] **Talenti comparison principle.**
G. Talenti, *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **3** (1976), 697--718.

[2] **Existence of a ground state solution of a nonlinear scalar field equation.**
H. Berestycki e P.L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313--345.

[3] **Best constant in Sobolev inequality.**
G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353--372.

[4] **The limiting case of the Sobolev embedding theorem.**
- D.E. Marshall, *A new proof of a sharp inequality concerning the Dirichlet integral,* Ark. Mat**. 27** (1989) 131—137, paragrafo 3.
- S.Y.A. Chang, *The Moser-Trudinger inequality and applications to some problems in conformal geometry*, Nonlinear partial differential equations in differential geometry (Park City, UT, 1992), 65--125, 1996, Lecture 4
- L. Carleson and S.Y.A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser,* Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), no. 2, 113--127.

TEMA # 12: Disuguaglianze di tipo Hardy.

In questo tema si propone una introduzione alla classica disuguaglianza di Hardy e alle sue generalizzazioni.

REFERENTE: Proff. Marta Calanchi, Bernhard Ruf, Cristina Tarsi
PER INFORMAZIONI: cristina.tarsi@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] [N. Ghoussoub, A. Moradifam, *Functional inequalities: new perspectives and new applications,* American Mathematical Society, Providence, RI (2013).

[2] A. Kufner, L. Maligranda, *The prehistory of the Hardy inequality*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 715–732

[3] E. Mitidieri, *A simple approach to Hardy inequalities*, Math. Notes **67** (2000), 479--486.

TEMA # 13: Buona positura per equazioni del calore semi-lineari in spazi di Lebesgue

Si propone lo studio dell'esistenza e dell'unicità di soluzioni per alcune equazioni del calore semilineari. Inizialmente si considerano nonlinearità di tipo potenza f(u)=u|u|^p, con p>1 (cf. [1] e [2]). In un secondo momento ci si restringe al caso di soluzioni nonnegative per generiche nonlinearità f(u) dove f è una funzione continua e non-decrescente.

REFERENTI: Prof. Elide Terraneo
PER INFORMAZIONI: elide.terraneo@unimi.it
BIBLIOGRAFIA:

[1] Brezis, H., Cazenave, T. *A nonlinear heat equation with singular initial data.* J. Anal. Math. **68,** (1996), 277—304.

[2] Laister, R., Robinson, J. C., Sierzega, M., Vidal-Lòpez, A., *A complete characterisation of local existence for semilinear heat equations in Lebesgue spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **33**, (2016), 1519—1538.