Esercizi di Analisi III

N. 1 – Funzioni implicite

C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Considerare l'equazione funzionale

$$g^3(x) + (x^2 + 1)g(x) - x^2 = 0 \tag{1}$$

a) Mostrare che esiste un'unica soluzione $g : B_\delta(0) \subset \mathbf{R} \to B_\sigma(y_0) \subset \mathbf{R}$ di classe C^∞ per y_0 opportuno e δ, σ abbastanza piccoli.

b) Trovare lo sviluppo di Taylor di terzo ordine con resto di Peano (centrato in $x_0 = 0$) per la soluzione di (1).

Esercizio 2. Considerare l'equazione

$$e^z + (x^2 - y^2)z - (1 + xy)e^{\sin(x^2+y^2)} = 0 \tag{2}$$

Verificare che l'equation (2) definisce localmente un'unica funzione implicita $z = g(x, y)$ vicino $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Mostrare inoltre che $(0, 0)$ è un punto critico per g e trovare la sua natura (massimo locale, minimo locale, sella).

Esercizio 3. Considerare la funzione $F : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) = x^2 y + e^{x+y} \tag{3}$$

Mostrare che l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ di classe C^∞. Fare uno studio qualitativo di tale funzione g indicando il segno di g, gli eventuali asintoti e presenza di estremi locali.

Esercizio 4. Considerare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0 \end{cases} \tag{4}$$

a) Mostrare che si può risolvere in modo unico il sistema per (y, z) in funzione di x vicino la soluzione $(0, 1, 1)$.

b) Se $g(x) = (u(x), v(x))$ rappresenta la funzione implicita così definita da (4) trovare lo sviluppo di Taylor di secondo ordine per g vicino $x_0 = 0$.

Esercizio 5. Considerare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (y+3)s - \tan(s+t) + 2x = 0 \\ \sin(s+t) + 3y - x(t+3) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

a) Verificare che $(x_0, y_0, s_0, t_0) = (0,0,0,0)$ è una soluzione del sistema (5) e che si può risolvere il sistema in modo unico per $s = u(x,y)$ e $t = v(x,y)$ vicino a $(x_0, y_0) = (0,0)$.

b) Trovare le derivate parziali del primo ordine di u e v nel loro dominio di definizione.