Esercizi di Analisi III

N. 2 - Applicazioni del Teorema di Dini

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

28 ottobre 2003

Esercizio 1. Considerare la funzione $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $\Phi(x,y) = x^5 + y^4$. Per ogni valore fisso di $c \in \mathbf{R}$, determinare i punti $(x_0, y_0) \in \Gamma_c = \Phi^{-1}(c)$ per cui l'insieme di livello Γ_c **non è** localmente una curva di classe C^1 vicino (x_0, y_0). Trovare l'equazione della retta tangete in un punto generico (x_0, y_0) per cui Γ_c è regolare. Ci sono valori di c per cui Γ_c è compatto?

Esercizio 2. Considerare la funzione $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da

$$\Phi(x,y,z) = x^2y^2 + ye^z.$$

a) Per ogni valore fisso di $c \in \mathbf{R}$, determinare i punti $(x_0, y_0, z_0) \in \Phi^{-1}(c)$ **non è** localmente una superficie di classe C^1 vicino (x_0, y_0, z_0).

b) Trovare l'equazione della piano tangete in un punto generico (x_0, y_0, z_0) per cui Γ_c è regolare.

c) Trovare una base per lo spazio tangente $T_{(1,1,0)}\Gamma_2$.

d) Sia M la matrice hessiana $H_g(1,1,0)$ della funzione $g(x,y,z) = x^2 + 2xy + yz^2$ nel punto $(1,1,0) \in \Gamma_2$. M è positiva definita su $T_{(1,1,0)}\Gamma_2$?

Esercizio 3. Sia $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $\Phi(x,y) = xe^y + ye^x$. Mostrare che $\Gamma_0 = \Phi^{-1}$ è un vincolo regolare non compatto. Trovare gli estremi locali di $f_{|\Gamma_0}$ per $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2(x+y) + 1$.

Esercizio 4. Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)z^2 + 2xz$ sull'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 5. Sia $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ dove $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\Phi(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2, x^2 + y^2 - 2rx), \quad r > 0.$$

a) È vero che Γ_0 è un vincolo regolare per ogni $r > 0$?

b) Trovare un punto p tale che $\Gamma_0 \setminus \{p\}$ è un vincolo regolare.

c) Trovare i punti di Γ_0 che hanno distanza minima dal punto $(0, 2r, 0)$

Esercizio 6. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ una matrice simmetrica a valori reali. Considerando la forma quadratica $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ ed il vincolo $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ con $\Phi(x) = ||x||^2 - 1$ mostrare che le copie di punti critici vincolati, moltiplicatori di Lagrange $(\lambda_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ di $f_{|\Gamma_0}$ sono gli autovalori e autovettori di norma 1 di A.

Esercizio 7. Trovare i valori di $c \in \mathbf{R}$ tali che la mappa $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (x + cy, y - (c + 1)x^2)$$

sia un diffeomorfismo globale.

Esercizio 8. È possibile trovare un diffeomorfismo $f : \mathbf{R}^2 \to S_1(0) \subset \mathbf{R}^2$ dove $S_1(0)$ è il cerchio unitario?

Esercizio 9. (Coordinate polari in $\mathbf{R}^n$) Considerare i semi spazi (dove $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$)

$$\mathbf{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} : \quad x_n > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}^n_- = \{(x', x_n) \in \mathbf{R}^n : \quad x_n < 0\}$$

e il cono $K_+ = \{(u, r) \in \mathbf{R}^n_+ : \quad |u| < r\}$. Definiamo coordinati nuovi (u, r) tramite le funzioni $f_\pm : K_+ \subset \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}^n_\pm$ definite da

$$(x', x_n) = f_\pm(u, r) = (u, \pm\sqrt{r^2 - |u|^2})$$

Mostrare che $f_\pm$ sono diffeomorfismi locali e globali e trovare una formula per $f_\pm^{-1}$.

Esercizio 10. (Coordinate cilindriche su $\mathbf{R}^n$) Ripetere l'esercizio 8 con le funzioni $f\pm : K_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n_\pm \times \mathbf{R}$ definite da

$$(x', x_n, t) = f_\pm(u, r, t) = (u, \pm\sqrt{r^2 - |u|^2}, t)$$

Esercizio 11. (L'equazione di Laplace in coordinate polari) Mostrare che $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus X)$ dove $X = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : \quad x \geq 0\}$ è soluzione di

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^2 \setminus X$$

se e solo se $v \in C^2((0, +\infty) \times (0, 2\pi))$ definita da $v(\rho, \theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ è soluzione di

$$\Delta_{\text{pol}} v = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 0 \quad \text{in} \quad (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$$