Lezioni di Analisi III

Kevin R. Payne

CdL in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Università degli Studi di Milano

Versione Completa: 12 gen 2006

In questi appunti forniamo la traccia delle lezioni tenute come base per una dispensa vera e propria per il corso. Per le notazioni e richiami vedi anche la dispensa [2] *Richiami di Analisi Matematica II* disponibile in rete. Si noti che questa traccia **non** è da riguardare come base sufficiente per la preparazione dell'esame. Ogni sezione corrisponde a circa due ore di lezione.

1 Richiami di Analisi II

È disponibile la dispensa [2] per ricordare gli aspetti essenziali di Analisi Matematica II (vedi anche gli appunti di Analisi II dei Proff. Salvatori e Vignati [3]). Sono stabilite anche le notazioni che saranno usate in questo corso per gli insiemi particolari, derivate, etc.

2 Funzioni convesse in più variabili

2.1. Osservazione: Ricordiamo che una funzione (derivabile) $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si chiama *convessa* in un intervallo I se

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in I, \tag{2.1}$$

cioè, il grafico $\mathrm{graf}(f)$ è al di sopra della sua retta tangente in ogni punto. Per funzioni non necessariamente derivabili si dice f è convessa in I se ogni segmento che collega due punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2$ sul grafico sta al di sopra del grafico.

2.2. Osservazione: Ricordiamo inoltre vari criteri per la convessità di una funzione $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Sia f derivaible in $[a, b]$ e due volte derivabile in (a, b). Le affermazioni seguenti sono equivalenti fra loro

(i) f è convessa in $[a, b]$

(ii) f' è crescente in $[a, b]$

(iii) $f'' \geq 0$ su (a, b)

dove lo strumento principale e la formula di Taylor.

2.3. Domanda: Per funzioni di più variabili: a) cosa vuole dire f convessa?; b) Quali sono i criteri per funzioni convesse regolari?; c) Quale regolarità deve avere una funzione convessa?

Per trattare le funzioni convesse ci serve prima la nozione di insieme convesso.

2.4. Definizione (Insiemi convessi): *Un insieme $A \subseteq \mathbf{R}^n$ si chiama <u>convesso</u> se per ogni $x_1, x_2 \in A$ il segmento $[x_1, x_2]$ è contenuto in A dove ricordiamo $[x_1, x_2] := \{x = (1-t)x_1 + tx_2,\ 0 \leq t \leq 1\}$.*

Più generalmente, si ha per ogni $k \in \mathbf{N}$, e per ogni collezione $\{x_j\}_{j=1}^k \subset A$ e $\{\lambda_j\}_{j=1}^k \in [0, 1]$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_k x_k \in A, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \tag{2.2}$$

L'espressione in (2.2) si chiama <u>*combinazione lineare convessa*</u> di $\{x_j\}$.

2.5. Esempi: Usando la definizione

1. $A =\subset \mathbf{R}$ è convesso se e solo se $A = I$ un intervallo

2. $\mathbf{R}^n$ è convesso

3. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ il segmento $[x, y]$ è convesso

4. Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n, r > 0$ le palle $B_r(x_0), \overline{B}_r(x_0)$ sono convesse

2.6. Esercizio: Si chiama <u>*cono (con vertice in* 0*)*</u> un insieme $\mathcal{C}$ tale che $x \in \mathcal{C} \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{C}$ per ogni $\lambda > 0$. Trovare delle condizioni su $\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{C}$ risulti convesso.

2.7. Esercizio: Mostrare la seguente proposizione: *A convesso e aperto implica A connesso per archi.*

Adesso passiamo alle funzioni convesse

2.8. Definizione (funzione convessa): *Sia $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ con A convesso. Si dice f è una <u>funziona convessa</u> se*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A, \ \forall t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Inoltre si chiama f <u>strettamente convessa</u> se la disuguaglianza (2.3) *vale in senso stetto e che f è <u>concava</u> se $-f$ è convessa.*

2.9. Osservazioni: Si nota che f è convessa se e solo se ogni sua restrizione $f|_{[x_1,x_2]}$ è convessa come una funzione di una variabile $t \in [0,1]$. È essenziale la convessità del dominio A per aver ben definito il membro sinistro di (2.3).

2.10. Esempi:

1. $f(x) = e^x$ è convessa su $\mathbf{R}$, e $f(x) = x^p$ è convessa su $[0, +\infty]$ con $p \geq 1$.
2. $f(x) = ||x||$ è convessa su $\mathbf{R}^n$ (e quindi su ogni insieme convesso).
3. Sia $f(x) = g(||x||)$ con $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ convessa e crescente. Allora $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è convessa. Per esempio, $f(x) = e^{||x||}, ||x||^p$ sono convesse.
4. $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ affine ($f(x) = \sum_{j=1}^n (a_j x_j) + b$ con $a_j, b \in \mathbf{R}$) è convessa su A convesso.

2.11. Proposizione (Caraterizzazione tramite l'epigrafico): *Sia $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ con A convesso. Allora f è convessa se e solo se il suo <u>epigrafico</u>* $\mathrm{Epi}(f)$ *è un insieme convesso dove*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x,y) \in A \times \mathbf{R} : \quad y \geq f(x)\}. \tag{2.4}$$

2.12. Teorema (Criteri per funzioni differenziabili): *Sia $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ con A aperto e convesso. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti fra loro:*

(i) *f è convessa in A*

(ii) $f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \quad \forall x, x_0 \in A$

$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in A$

2.13. Teorema (Criterio per funzioni di classe C^2): *Sia $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di classe $C^2(A)$ con A aperto e convesso. Allora f è convessa se e solo se la matrice hessiana $H_f(x) = D^2 f(x)$ è semi-definita positiva per ogni $x \in A$.*

2.14. Esempi ed esercizi

1. $f(x, y) = x^2/y$ è convessa su $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > 0\}$
2. Trovare i valori di $p, q \in \mathbf{R}$ per cui la funzione $f(x, y) = x^p y^q$ sia convessa su $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y > 0\}$.
3. Trovare i valori di $p, q \in \mathbf{R}$ per cui la funzione $f(x, y) = x^p + y^q$ sia convessa su $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x, y > 0\}$.
4. Trovare condizioni sufficienti sulle coefficienti $\{a_{ij}\}$ affinchè la forma quadratica $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ sia convessa su $\mathbf{R}^n$.
5. Siano f, g convesse su un convesso $A \subset \mathbf{R}^n$ e $\lambda > 0$. Mostrare che $f + g, \lambda f$ sono convesse.

3 Funzioni implicite in 2 variabili

3.1. Problema: Si consideri l'equazione

$$F(x, y) = 0 \tag{3.1}$$

dove $F : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è una funzione data.

1. Sotto quali condizioni possiamo dire che le soluzioni di (3.1) definiscono una <u>*funzione implicita*</u>? Cioè tutte le soluzioni possono essere messe in correspondeza biunivoca come $y = g(x)$ oppure $x = h(y)$?

2. Sotto quali condizioni possiamo dire che le soluzioni di (3.1) definiscono una *curva di livello*? Cioè $Z := \{(x, y) : \; F(x, y) = 0\}$ rappresenta una curva (l'immagine unidimensionale di un intervallo I tramite una funzione $\Phi : I \to \mathbf{R}^2$)

3.2. Osservazioni: Si può pensare a (3.1) sia come una equazione in x con un parametro y oppure come una equazione in y con un parametro x. La questione di base è allora l'esistenza ed unicità delle soluzioni di un'equazione in dependenza a un parametro. Un equazione della forma $F(x, y) = c$ può essere sempre scritto nella forma (3.1) con $F - c$ nel posto di F.

3.3. Definizione: *Sia $F : A \subset R^2 \to \mathbf{R}$ con A aperto. Si dice l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce y in funzione di x se esite una funzione $g : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con $y = g(x)$ tale che*

(i) $\mathrm{graf}(g) \subset A$

(ii) $F(x, g(x)) = 0, \; \forall x \in I$

3.4. Esempi: Studiare il problema 3.1 associato all'equazione $F(x, y) = 0$ per le funzioni

1. $F(x, y) = 2x + y^3 - 1$
2. $F(x, y) = x - y^2$
3. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
4. $F(x, y) = x^2 - y^2$
5. $F(x, y) = x^4 + y^4 + 1$

3.5. Osservazione: Gli esempi 2,3,4 sopra mostrano che in generale possiamo solo sperare nella esistenza **locale** di una funzione implicita; cioè, in qualche intorno di un punto $(x_0, y_0) \in Z$. L'esempio 5 mostra che è essenziale lavorare vicino ad una soluzione.

3.6 Osservazione: Inoltre, si vede che un'ostacolo per avere una funzione implicita è la presenza di punti $(x_0, y_0) \in Z$ con $F_x(x_0, y_0) = 0$ oppure $F_y(x_0, y_0) = 0$. Nell'esempio 4, $F(0, 0) = F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$ e Z non è localmente una curva vicino $(0, 0) \in Z$

3.7. Teorema (di Dini in due variabili): *Sia $F : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ con A aperto tale che*

(i) *F e $F_y = \partial F/\partial y$ sono continue in A*

(ii) *$\exists(x_0, y_0) \in A$ t.c. $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$*

Allora

a) *Esistono intorni $B_\delta(x_0)$ e $B_\sigma(y_0)$ ed esite un'unica funzione implicita $g : B_\delta(x_0) \to B_\sigma(y_0)$ t.c. $F(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ e $y_0 = g(x_0)$.*

b) *Inoltre $g \in C^0(B_\delta(x_0))$.*

3.8. Osservazione: Ovviamente c'è una versione analoga se $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. In questo caso, esiste un'unica $h : B_\delta(y_0) \to B_\sigma(x_0)$ t.c. $x_0 = h(y_0)$, $F(h(y), y) = 0$ per ogni $y \in B_\delta(y_0)$ e h è continua.

3.9. Teorema (sulla derivazione della funzione implicita): *Supponiamo che F, A soddisfino le ipotesi del teorema di Dini. Supponiamo inoltre che $F \in C^1(A)$. Allora la funzione implicita $g : B_\delta(x_0) \to B_\sigma(y_0)$ è di classe $C^1(B_\delta(x_0))$ e vale la formula*

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}, \quad x \in B_\delta(x_0). \tag{3.2}$$

Se inoltre $F \in C^k(A)$ con $k \geq 2$ allora $g \in C^k(B_\delta(x_0))$.

3.10. Osservazione: Spesso i due Teoremi 3.7 e 3.9 sono enunciati come uno solo che prende così il nome del Teorema di Dini.

3.11. Esercizio: Sia $F(x, y) = -xe^y + 2y - 1$.

a) Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ t.c. $x_0 \leq 0$ e $F(P_0) = 0$. È vero che $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione continua $y = g(x)$ vicino P_0?

b) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della funzione g nel caso $P_0 = (0, 1/2)$.

c) Trovare i punti $Q \in \mathbf{R}^2$ per cui $F(Q) = 0$ ma F non soddisfa le ipotesi di Dini per l'esplicitabilità di y in funzione di x.

3.12. Esercizio: Mostrare che esiste una soluzione $y = g(x)$ di classe C^∞ in un intorno di $x_0 = 0$ dell'equazione $g^3(x) + (x^2 + 1)g(x) - x^2 = 0$. Trovare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 con resto di Peano e centro in $x_0 = 0$.

3.13. Esercizio: Verificare che l'equazione $xy^2+y+\sin(xy)+3(e^x-1)=0$ definisce implicitamente una funzione $y=g(x)$ in un intorno di $(0,0)$. Calcolare poi il limite $\lim_{x\to 0}(g(x)+3x)/x$.

4 Generalizzazioni del Teorema di Dini

Usando esattamente la stessa tecnica delle dimostrazioni dei Teoremi 3.7 e 3.9 si mostra il sequente teorema.

4.1. Teorema (di Dini in più variabili): *Sia $F=F(x,y):A\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ con A aperto tale che*

(i) *F e $F_y=\partial F/\partial y$ sono continue in A*

(ii) *$\exists(x_0,y_0)\in A$ t.c. $F(x_0,y_0)=0$ e $F_y(x_0,y_0)\neq 0$*

Allora

a) *Esistono intorni $B_\delta(x_0)\subset\mathbf{R}^n$ e $B_\sigma(y_0)\subset\mathbf{R}$ ed esite un'unica funzione implicita $g:B_\delta(x_0)\to B_\sigma(y_0)$ t.c. $F(x,g(x))=0$ per ogni $x\in B_\delta(x_0)$ e $y_0=g(x_0)$.*

b) *Inoltre $g\in C^0(B_\delta(x_0))$.*

c) *Se inoltre $F\in C^1(A)$ allora $g\in C^1(B_\delta(x_0))$ e valgono le formule*

$$g_{x_i}(x)=-\frac{F_{x_i}(x,g(x))}{F_y(x,g(x))},\quad x\in B_\delta(x_0),\ i=1,\ldots,n. \tag{4.1}$$

Se inoltre $F\in C^k(A)$ con $k\geq 2$ allora $g\in C^k(B_\delta(x_0))$.

4.2. Esempio: Sia $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$ con $r\in(0,+\infty)$. Sia $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ t.c. $F(P_0)=0$ e $z_0\neq 0$. Allora che F definisce localmente una funzione $z=g(x,y)$ vicino P_0. Gli altri casi $y=g(x,z)$ e $x=g(y,z)$ sono analoghi.

4.3. Esercizio: **a)** Mostrare che $e^{xy}g(x,y)+e^{g(x,y)}-x-y=0$ ammette una soluzione $g: B_\delta((x_0,y_0))\to\mathbf{R}$ di classe C^∞ vicino $P_0=(x_0,y_0)=(1,0)$; **b)** Trovare l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(P_0,g(P_0))$; **c)** Trovare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della soluzione g; **d)** Trovare il dominio massimale di g.

4.4. Esercizio: a) Mostrare che $e^z + (x^2 - y^2)z - (1+xy)e^{\sin(x^2+y^2)} = 0$ definisce una funzione implicita $z = g(x,y)$ di classe C^∞ vicino $(x_0, y_0) = (0,0)$; **b)** Verificare che $(0,0)$ è un punto critico per g e classificarlo.

Adesso passiamo al caso di sistemi di equazioni; cioè con F con valori vettoriali.

4.5. Problema: Dato $F : A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ dove

$$F(x,y) = (F_1(x,y), \ldots, F_m(x,y))$$

Se $F(x_0, y_0) = 0$ per $(x_0, y_0) \in A$ possiamo affermare l'esistenza di una funzione implicita $g : B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to B_\sigma(y_0) \subset \mathbf{R}^n$?

N. B. È un sistema di m equazioni in m variabili $(y_1, \ldots y_m)$ con n parametri $(x_1, \ldots, x_n)$; cioe

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

4.6. Esempio (Sistemi lineari in y): Siano $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^m \in \mathbf{R}$. Allora il sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) + a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_m = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) + a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mm}y_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) + My = 0.$$

dove $M = [a_{i,j}]$ è una matrice $m \times m$. Quindi per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $y = -M^{-1}f(x)$ se e solo se M è invertibile, cioè se e solo se $\det(M) \neq 0$.

4.7. Osservazione: Con $F(x,y) = f(x) + My$ abbiamo $M = D_yF(x,y)$ e quindi possiamo imaginare che quello che serve è

$$D_yF(x,y) \text{ invertibile } \forall (x,y) \text{ vicino } (x_0, y_0) \tag{4.2}$$

In generale, se $F \in C^1(A)$ e $D_yF(x_0, y_0)$ è invertibile allora

$$\det[D_y(x_0, y_0)] \neq 0 \tag{4.3}$$

e quindi per la permanenza del segno esiste un intorno $W = \overline{B}_\sigma(x_0) \times \overline{B}_\sigma(y_0) \subset A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ tale che $\det[D_y F(x,y)] \neq 0$ in W; cioè $D_y F(x,y)$ rimane invertibile vicino (x_0, y_0). Si nota che $\det : \mathbf{M}_{m\times m}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^∞ dove lo spazio $\mathbf{M}_{m\times m}(\mathbf{R})$ delle matrici $m \times m$ ha la topologia normata di $\mathbf{R}^{m^2}$ Tutto ciò suggerisce il seguente generalizzazione del teorema di Dini.

4.8. Teorema (di Dini per sistemi): *Sia $F : A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ con A aperto, dove $(x,y) \mapsto F(x,y) = (F_1(x,y), \dots, F_m(x,y))$. Supponiamo*

- **(i)** $F \in C^1(A)$
- **(ii)** $\exists (x_0, y_0) \in A$ *t.c.* $F(x_0, y_0) = 0$ *e* $J_y F(x_0, y_0) = \det D_y F(x_0, y_0) \neq 0$

Allora

- **a)** *Esistono intorni $B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ e $B_\sigma(y_0) \subset \mathbf{R}^m$ ed esite un'unica funzione implicita $g : B_\delta(x_0) \to B_\sigma(y_0)$ t.c. $F(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ e $y_0 = g(x_0)$.*
- **b)** *Inoltre $g \in C^0(B_\delta(x_0))$.*
- **c)** *Si ha $g \in C^1(B_\delta(x_0))$ e vale la formula*

$$D_x g(x) = -\left[(D_y F)(x, g(x))\right]^{-1} (D_x F)(x, g(x)). \tag{4.4}$$

- **d)** *Se inoltre $F \in C^k(A)$ con $k \geq 2$ allora $g \in C^k(B_\delta(x_0))$.*

4.9. Osservazione: Come nei casi precedenti, la formula di parte **c)** segue dalla regola della catena se si stabilisce che g è differenziabile.

4.10. Osservazione: La costruzione di g usa il <u>*Teorema del punto fisso di Banach-Cacciopoli*</u> che sarà dimostrato in Analisi Matematica IV. Brevemente, l'idea è il seguente.

1. Essendo $F \in C^1(A)$ e $F(x_0, y_0) = 0$ la formula di Taylor dice che l'equazione $F(x,y) = 0$ prende la forma

$$0 = F(x,y) = D_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y F(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x,y) \tag{4.5}$$

dove $R(x,y) = o(||(x-x_0, y-y_0)||_{n+m})$. Vogliamo isolare y in (4.5) che può essere scritta come

$$y = y_0 - [D_yF(x_0,y_0)]^{-1}(D_xF(x_0,y_0)(x-x_0) + R(x,y)) \tag{4.6}$$

Quindi, per ogni $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ vogliamo l'esistenza di un unico punto $y \in B_\sigma(y_0)$ tale che

$$y = \mathcal{F}(y) := y_0 - [D_yF(x_0,y_0)]^{-1}(D_xF(x_0,y_0)(\bar{x}-x_0) + R(\bar{x},y)), \tag{4.7}$$

cioè l'esistenza di un unico punto fisso per $\mathcal{F}$.

2. Una versione del teorema di Banach-Cacciopoli è la seguente: *Sia $\mathcal{F} : \overline{B}_\sigma(y_0) \to \overline{B}_\sigma(y_0)$ una <u>contrazione</u>; cioè esiste $L \in (0,1)$ t.c.*

$$||\mathcal{F}(y_2) - \mathcal{F}(y_1)||_m \leq L||y_2 - y_1||_m \tag{4.8}$$

Allora esiste un unico punto fisso $\bar{y} \in \overline{B}_\sigma(y_0)$ per $\mathcal{F}$.

3. Il resto del lavoro consite in fissando gli intorni $\overline{B}_\delta(x_0), \overline{B}_\sigma(y_0)$ in modo opportuno per verificare la stima (4.8) usando la formula (4.7).

4.11. Osservazione: Più generalmente il Teorema del punto fisso vale quando $\mathcal{F}$ è una contrazione di $\mathcal{B}$ uno <u>*spazio di Banach*</u>; cioè , uno spazio normato completo (le successioni di Cauchy convergono). Inoltre, la dimostrazione usa il metodo di <u>*approssimazioni successive*</u> di Picard; cioè si pone $y_{k+1} = \mathcal{F}(y_k)$ e si mostra che $\{y_k\}$ è una successione di Cauchy essendo $\mathcal{F}$ una contrazione. Quindi convege y_k ad y che deve essere $\mathcal{F}(y)$ per la continuità di $\mathcal{F}$.

4.12. Esercizio: Considerare il sistema

$$\begin{cases} y\cos(xz) - x^2 + 1 = 0 \\ y\sin(xz) - x = 0 \end{cases}$$

a) Verificare che il sistema può essere risolto per (y,z) in funzione di x vicino $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,\pi/2)$

b) Trovare lo sviluppo di Taylor del primo ordine per la funzione implicita $g(x) = (u(x),v(x))$ basato in x_0. Trovare anche lo sviluppo del secondo ordine.

4.13. Esercizio: Ripetere l'esercizio 4.12 per il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

4.14. Esercizio: Considerare il sistema

$$\begin{cases} (y+3)s - \tan(s+t) + 2x = 0 \\ \sin(s+t) + 3y - x(t+3) = 0 \end{cases}$$

a) Verificare che $(x_0, y_0, s_0, t_0) = (0, 0, 0, 0)$ è una soluzione.

b) Verificare che il sistema definisce implicitamente due funzioni $s = u(x, y)$ e $t = v(x, y)$ per (x, y) vicino a $(0, 0)$.

c) Trovare le derivate parziali di u, v del primo ordine nel loro dominio di definizione.

5 Inversione locale e globale

5.0. Osservazione: Ci sono tantissime applicazioni del teorema della funzione implicita (i teoremi 3.7, 3.9, 4.1 e 4.8). Trattiamo in questo corso:

1. Inversione locale (il teorema della funzione inversa) e poi il problema di inversione globale (esistenza di diffeomorfismi)

2. Curve e superficie di livello (come esempi di vincoli regolari) e poi l'applicazione al problema di estremi vincolati - vedi paragrafi 6 e 7

5.1. Problema: Siano $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$.

1. Esiste $g = f^{-1} : f(\Omega) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una <u>*funzione inversa*</u>? Cioè una g t.c.

$$g(f(x)) = x, \quad x \in \Omega \quad \text{e} \quad f(g(y)) = y, \quad y \in f(\Omega)$$

2. Se $f \in C^k(\Omega)$ allora $f^{-1} \in C^k(f(\Omega))$?

3. Formule per le derivate di f^{-1}?

5.2. Definizioni: *Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ di classe $C^1(\Omega)$ con Ω aperto.*

a) *Se esiste una funzione inversa $g = f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ diciamo che f è invertibile in Ω. Se inoltre $f^{-1} \in C^1(f(\Omega))$ diciamo che f è un diffeomorfismo di classe C^1 in Ω*

b) *Dato $x_0 \in \Omega$ diciamo che f è localmente invertibile in x_0 se esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 per cui $f_{|\mathcal{U}}$ è invertibile in $\mathcal{U}$. Se inoltre $(f_{|\mathcal{U}})^{-1}$ è di classe C^1 diciamo che f è un diffeomorfismo locale di classe C^1 in x_0*

N.B. Nel caso f, g sono solo continue si parla di *omeomorfismi* e ovviamente ha senso parlare di diffeomorfismi di classe C^k con $k \geq 2$ ed in particolare di classe C^∞.

5.3. Teorema (della funzione inversa) *Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ di classe $C^1(\Omega; \mathbf{R}^n)$ con Ω aperto. Supponiamo che $J_f(x_0) = \det[Df(x_0)] \neq 0$ per $x_0 \in \Omega$. Allora f è un diffeomorfismo locale di classe C^1 in x_0; cioè esistono intorni aperti $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ di $x_0, f(x_0)$ t.c. $f_{|\mathcal{U}}\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ è invertibile con inversa $g = (f_{|\mathcal{U}})^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ di classe $C^1(\mathcal{V})$. Inoltre vale la formula*

$$D_y g(y) = [(D_x f)(g(y))]^{-1}, \quad y \in \mathcal{V}. \tag{5.1}$$

5.4. Osservazione: Per $f \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^n)$ e Ω aperto il teorema della funzione inversa dice che $J_f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ è un diffeomorfismo locale in x_0. Vale anche il contrario; cioè la condizione sul jacobiano $J_f(x_0) \neq 0$ è anche necessaria affinchè f sia un diffeomorfismo locale in x_0. Il punto è la richiesta di regolarità sulla funzione inversa (per esempio cosa succede per $f(x) = x^3$ nel caso unidimensionale?).

Rispetto il problema di inversione globale, vogliamo trattare la questione così.

Problema: Dato $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ di classe $C^1(A; \mathbf{R}^n)$ e $\Omega \subset A$ trovare condizioni necessarie e sufficienti affinchè $f_{|\Omega} : \Omega \to f(\Omega)$ sia un diffeomorfismo, oppure semplicamente invertibile.

5.5. Osservazione (Condizione necessaria 1): Se Ω è aperto, abbiamo

$$f : \Omega \to f(\Omega) \ \text{ diffeomorfismo} \Rightarrow J_f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega \tag{5.2}$$

ma non vale il contrario.

5.6. Esempio: La funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos(x_2), e^{x_1} \sin(x_2))$ soddisfa $J_f(x) = e^{x_1} \neq 0$ su tutto $\mathbf{R}^2$ ma non è iniettiva.

5.7. Osservazione: Nel Esempio 5.6, si nota che

$$f : \Omega = (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi) \to f(\Omega) = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : \quad x \geq 0\}$$

è una biezione fra due aperti (infatti è un diffeomorfismo) **ma** f non può essere prolungato al bordo di Ω in modo iniettivo.

Per trattare degli aspetti globali ci serve qualche definizione

5.8. Definizione *Un insieme $D \subset \mathbf{R}^n$ si chiama dominio se D è la chiusura di un aperto $\mathcal{U}$.*

Notiamo che in particolare, D è chiuso e ha interno D° non vuoto.

5.9. Definizione: *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ con D un dominio. Diciamo che f è differenziabile in D se esiste un intorno aperto A di D per cui f è differnziabile in A. In modo analogo, si definisce $C^k(D, R^n)$ per ogni $k \geq 1$.*

5.10. Proposizione: *Sia $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ con D dominio t.c.*

(i) $f \in C^1(D^\circ)$

(ii) $J_f(x) \neq 0, \quad x \in D^\circ$

Allora $f : D^\circ \to (f(D))^\circ$. In particolare, $x \in D^\circ$ **non** *è mandato al bordo $\partial(f(D))$.*

5.11. Osservazione: (Condizione necessaria 2) Dal Proposizione 5.10 segue : *Siano Ω aperto e $f : \Omega \to f(\Omega)$ un diffeomorfismo. Allora*

$$\forall D \subset \Omega, \quad f : D^\circ \to [f(D)]^\circ.$$

5.12. Proposizione: (Condizione necessaria 3) *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ con D dominio di classe $C^1(D, \mathbf{R}^n)$ che soddisfi $J_f \neq 0$ su D°. Se $f : D \to f(D)$ è un diffeomorfismo (invertibile con inversa di classe C^1) allora*

$$f : \partial D \to \partial(f(D)) \tag{5.3}$$

Adesso troviamo delle condizioni sufficienti affinchè f sia globalmente invertibile. La dimostrazione su trova sul libro, ma è facoltativo.

5.13. Teorema (inversione globale) *Siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ di classe $C^1(A; \mathbf{R}^n)$ con A aperto e $D \subset A$ un dominio (la chiusura di un aperto) limitato e connesso t.c.*

(i) $J_f \neq 0$ *su* D

(ii) $f : \partial D \to \partial(f(D))$ *una biezione*

Allora

a) $f(D)$ *è un dominio limitato e connesso*

b) $f : D \to f(D)$ *è invertibile*

5.14. Esercizio: Analizzare di nuovo Esempio 5.6 tramite i risultati 5.5, 5.11, 5.12, 5.13.

5.1 Esercizi su cambiamento di variabili ed invertibilità

5.15. Esercizio (Cambiamento lineare di coordinate nel piano) Considerare l'applicazione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

dove $ad - bc \neq 0$: **a)** f è un diffeomorfismo locale per quali $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$?; **b)** Calcolare $Dg(y_0)$ per $y_0 = f(x_0)$ e $g = f^{-1}$; **c)** f è un diffeomorfismo globale?

5.16. Esercizio (Coordinate polari nel piano) Considerare l'applicazione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$(x, y) = f(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) : \tag{5.5}$$

a) f è un diffeomorfismo locale per quali (ρ_0, θ_0)?; **b)** Calcolare $Dg(x_0, y_0)$ per $(x_0, y_0) = f(\rho_0, \theta_0)$ e $g = f^{-1}$; **c)** Trovare il più grande aperto Ω t.c. $(\rho_0, \theta_0) = (1, 0) \in \Omega$ e f_Ω sia invertibile.

5.17. Esercizio (Coordinate cilindriche nello spazio) Considerare l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$(x, y, z) = f(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z) : \tag{5.6}$$

a) f è diffeomorfismo locale per quali (ρ_0, θ_0, z_0)?; **b)** Calcolare $D_y g(x_0, y_0, z_0)$ per $(x_0, y_0, z_0) = f(\rho_0, \theta_0, z_0)$ e $g = f^{-1}$; **c)** Trovare il più grande aperto Ω t.c. $\{(x, y, z) : \; y > 0\} \subset f(\Omega)$ e $f_{|\Omega}$ sia invertibile.

5.18. Esercizio (Coordinate sferiche nello spazio) Considerare l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$(x, y, z) = f(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos\theta \sin\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\varphi) : \tag{5.7}$$

a) f è diffeomorfismo locale per quali $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$?; **b)** Calcolare $D_y g(x_0, y_0, z_0)$ per $(x_0, y_0, z_0) = f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ e $g = f^{-1}$; **c)** Trovare il più grande aperto Ω t.c. $\{(x, y, z) : \; y > 0\} \subset f(\Omega)$ e f_Ω sia invertibile.

5.19. Esercizio (Coordinate polari in $\mathbf{R}^n$) Considerare i semi spazi (dove $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$)

$$\mathbf{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} : \quad x_n > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}^n_- = \{(x', x_n) \in \mathbf{R}^n : \quad x_n < 0\} \tag{5.8}$$

e il cono $K_+ = \{(u, r) \in \mathbf{R}^n_+ : \quad |u| < r\}$. Definiamo coordinati nuovi (u, r) tramite le funzioni $f_\pm : K_+ \subset \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}^n_\pm$ definite da

$$(x', x_n) = f_\pm(u, r) = (u, \pm\sqrt{r^2 - |u|^2}) \tag{5.9}$$

Mostrare che $f_\pm$ sono diffeomorfismi locali e globali e trovare una formula per $f_\pm^{-1}$.

5.20. Esercizio (Coordinate cilindriche su $\mathbf{R}^n$) Ripetere l'esercizio 8 con le funzioni $f\pm$: $K_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n_\pm \times \mathbf{R}$ definite da

$$(x', x_n, t) = f_\pm(u, r, t) = (u, \pm\sqrt{r^2 - |u|^2}, t) \tag{5.10}$$

5.21. Esercizio: Trovare $\lambda \in \mathbf{R}$ t.c. $f(x, y) = (x + \lambda y, y - (\lambda + 1)x^2)$ sia un diffeomorfismo globale in $\mathbf{R}^2$.

5.22. Esercizio: Sia $u = u(x, y)$ una soluzione $C^2(\mathbf{R}^2)$ dell'equazione del onde $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Mostrare che la funzione $v(\xi, \eta) := u(\Phi^{-1}(\xi, \eta)$ risolve l'equazione $v_{\xi\eta} = 0$ dove Φ è il cambiamento lineare di variabili

$$(\xi, \eta) = \Phi(x, t) = (x + t, x - t).$$

5.23. Esercizio: Sia $u = u(x, y)$ una soluzione $C^2(\mathbf{R}^2)$ dell'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Mostrare che la funzione $v(\rho, \theta) := u(\Phi(\rho, \theta)$ risolve l'equazione $v_{\rho\rho} + \rho^{-1}v_\rho + \rho^{-2}v_{\theta\theta} = 0$ dove Φ è il cambiamento polare di coordinate di (5.5); cioè

$$(x, y) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

6 Estremi vincolati: un vincolo in due variabili

Studiamo il problema di ottimizzare una funzione scalare di più variabili rispetto un vincolo che impone ulteriori restrizioni su dove è ammissibile cercare gli estremi (tipicamente su un'iperficie oppure un'intersezione di iperfici).

6.1. Problema: Siano $f, \Phi : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di classe $C^1(A)$ con A aperto. Trovare gli estremi (locali) di $f_{|\Gamma_0}$ dove

$$\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0) = \{x \in A : \ \Phi(x) = 0\}$$

f è la *funzione da ottimizzare* e $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ è il *vincolo*

N.B. Ha senso usare anche $\Gamma_c = \Phi^{-1}$ per $c \neq 0$, ma si può sempre rinormalizzare tramite $\tilde{\Phi}(x) := \Phi(x) - c$.

6.2. Obiettivi: 1) Trovare un concetto di vincolo ammissibile (detto *vincolo regolare*) per l'uso del calcolo differenziale che venga dal Teorema di Dini **2)** Trovare condizioni necessarie per avere estremi locali vincolati definendo il concetto di *punto critico vincolato*; **3)** Trovare condizioni sufficienti affinchè un punto critico vincolato sia punto di estremo vincolato locale.

6.3. Osservazione: La presenza del vincolo cambia tutto, per esempio:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ ha un solo estremo locale su $\mathbf{R}^2$ (un minimo globale in 0), ma sul vincolo $\Phi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$?

2. $f(x,y) = x^2 - y^2$ non ha estremi locali in $\mathbf{R}^2$ (ha solo un punto di sella in $(0,0)$), ma sul vincolo $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$?

Qui esaminiamo il caso di una funzione di due variabili vincolata su un insieme che è localmente una curva. La prima cosa da fare è di precisare il concetto di un vincolo ammissibile. Una classe ampia e interessante è la seguente.

6.4. Teorema (Curve di livello) *Sia $\Phi : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ di classe $C^k(A)$ con $k \geq 1$. Per $c \in \Phi(A)$ consideriamo l'insieme di livello c di Φ*

$$\Gamma_c := \{(x,y) \in A : \quad \Phi(x,y) = c\} = \Phi^{-1}(c) \tag{6.1}$$

Sia $(x_0, y_0) \in \Gamma_c$ t.c. $\nabla\Phi(x_0,y_0) \neq 0$. Allora

a) *Esiste un intorno $\mathcal{U} = B_\delta(x_0) \times B_\sigma(y_0)$ t.c. $\Gamma_c \cap \mathcal{U}$ è il grafico di una funzione ($y = g(x)$ oppure $x = h(y)$) di classe C^k.*

b) *La retta tangente a Γ_c nel punto (x_0, y_0) è data dall'equazione*

$$\langle \nabla\Phi(x_0,y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle = 0 \tag{6.2}$$

6.5. Osservazione: (Strutture geometriche) Sia Γ_c un vincolo regolare. Allora sono ben definite la *retta tangente*

$$\Pi_{(x_0,y_0)}\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad \langle \nabla\Phi(x_0,y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle = 0\} \tag{6.3}$$

lo *spazio tangente*

$$T_{(x_0,y_0)}\Gamma_c = \{(v_1,v_2) \in \mathbf{R}^2 : \quad \langle \nabla\Phi(x_0,y_0), (v_1,v_2)\rangle = 0\} \tag{6.4}$$

e lo spazio normale

$$N_{(x_0,y_0)}\Gamma_c = \{(w_1,w_2) \in \mathbf{R}^2 : \quad \langle \nabla(w_1,w_2), (v_1,v_2)\rangle = 0 \quad \forall (v_1,v_2) \in T_{(x_0,y_0)}\Gamma_c\} \tag{6.5}$$

Si nota che la retta tangente è uno spazio *affine*; cioè ha la forma $\Pi_{(x_0,y_0)}\Gamma_c = \{(x,y) = (v_1,v_2) + (x_0,y_0)\}$ dove $v = (v_1,v_2)$ appartiene allo spazio vettoriale $T_{(x_0,y_0)}\Gamma_c$. In questo senso possiamo dire che il gradiente $\Phi(x_0, y_0)$ è ortogonale allo spazio tangente $T_{(x_0,y_0)}\Gamma_c$ e denotiamo $\nabla\Phi(x_0, y_0) \perp T_{(x_0,y_0)}\Gamma_c$. Lo spazio normale è anche uno spazio vettoriale e possiamo dire che

$$N_{(x_0,y_0)}\Gamma_c = \left[T_{(x_0,y_0)}\Gamma_c\right]^{\perp} = \{\lambda\nabla\Phi(x_0, y_0) : \quad \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

6.6. Esercizi: Analizzare le curve di livello per le funzioni

1. $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$
2. $\Phi(x, y) = xy$
3. $\Phi(x, y) = x^2 + y^3$
4. $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$

6.7. Definizione: *Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. L'insieme $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ si chiama un vincolo regolare quando*

$$\Phi \in C^1(A) \text{ e } \nabla\Phi(x_0, y_0) \neq 0 \ \ \forall (x_0, y_0) \in \Gamma_0 \tag{6.6}$$

N.B. Cioè per il Teorema di Dini, Γ_0 è localmente il grafico di una funzione di una variabile (Teorema 6.5- curve di livello).

6.8. Teorema: (Condizioni necessarie - moltiplicatori di Lagrange) *Siano $f, \Phi : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ di classe $C^1(A)$ con A aperto. Assumiamo che $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ sia un vincolo regolare. Se $f_{|\Gamma_0}$ ha un estremo locale in $P_0 = (x_0, y_0)$ allora*

a) *esiste $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ t.c. $\nabla f(P_0) = \lambda_0\nabla\Phi(P_0)$*

b) *(x_0, y_0, λ_0) è punto critico libero della funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda\Phi(x, y)$*

Il numero λ_0 si chiama moltiplicatore di Lagrange, la coppia (x_0, y_0) per cui esiste λ_0 si chiama punto critico vincolato per $f_{|\Gamma_0}$.

6.9. Esercizio: Trovare i candidati per estremi locali di $f = f(x, y) = x^2 + y^2$ ristretta alla curva $y = 1$.

6.10. Teorema: (Condizioni sufficienti - natura dei punti critici vincolati) *Siano* $f, \Phi : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *di classe* $C^2(A)$ *con* A *aperto. Assumiamo che* $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ *sia un vincolo regolare. Sia* λ_0 *il moltiplicatore di Lagrange associato al punto critico vincolato* (x_0, y_0)*. Allora*

$$[H_f - \lambda_0 H_\Phi] \text{ e}' \begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases} \text{definita su } T_{(x_0,y_0)}\Gamma_0 \Longrightarrow (x_0, y_0) \text{ e}' \begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases} \text{relativo per } f_{|\Gamma_0}$$

dove $T_{(x_0,y_0)}\Gamma_0$ *è lo spazio tangente al vincolo e* H_f, H_Φ *sono le matrici hessiane.*

6.11. Esercizio: Trovare la distanza minima dall'origine della curva definita dall'equazione $xy = 1$

6.12. Esercizio: Sia $A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ con $A = A^T$. Siano $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ e $\Phi(x) = ||x||^2 - 1$. Trovare gli estremi locali di $f_{|\Phi^{-1}(0)}$.

7 Estremi vincolati: più variabili e più vincoli

7.1 Il caso di più variabili

Gli obiettivi 6.2 per il problema 6.1 nel caso generale $n \geq 2$ si raggiungono in un modo del tutto analogo al caso $n = 2$. In particolare, come primo passo abbiamo la seguente classe di vincoli amissibili.

7.1. Teorema (Ipersuperfici di livello) *Sia* $\Phi : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *di classe* $C^k(A)$ *con* $k \geq 1$*. Per* $c \in \Phi(A)$ *consideriamo* <u>*l'insieme di livello* c *di* Φ</u>

$$\Gamma_c := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in A : \quad \Phi(x) = c\} = \Phi^{-1}(c) \tag{7.1}$$

Sia $x_0 \in \Gamma_c$ *t.c.* $\nabla\Phi(x_0) \neq 0$*. Allora*

a) *Esiste un intorno* $\mathcal{U}$ *di* x_0 *t.c.* $\Gamma_c \cap \mathcal{U}$ *è il grafico di una funzione di classe* C^k.

b) *L'iperpiano tangente a* Γ_c *nel punto* x_0 *è dato dall'equazione*

$$\Pi_{x_0}\Gamma_c : \quad \langle \nabla\Phi(x_0), x - x_0\rangle = 0 \tag{7.2}$$

7.2. Osservazioni: Nel caso $n = 3$ parliamo di *superfici di livello*. La dimostrazione del teorema 7.1 è del tutto analoga e quella del Teorema 6.4. Una riduzione comoda è la seguente: 1) assumiamo che $\Phi_{x_n}(x_0) \neq 0$ (basta ridefinire la funzione Φ facendo una permutazione delle variabili, 2) dividiamo le variabili $x = (x', y)$ con $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ e $x_0 = (x'_0, y_0)$, 3) il teorema di Dini (4.1) fornisce $g : B_\delta(x'_0) \to B_\sigma(y_0)$ e $\mathcal{U} = B_\delta(x'_0) \times B_\sigma(y_0)$.

7.3. Esempio: Sia $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Gli insiemi di livello per $c > 0$ sono tutte superfici di livello (sfere) e l'equazione del piano tangente in ogni punto si trova facilmente.

Le condizioni necessarie e sufficienti per trovare gli estremi locali sono anche analoghe a quelle con $n = 2$.

7.4. Definizione: *Sia* $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. *L'insieme* $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ *si chiama un* *vincolo regolare* *quando*

$$\Phi \in C^1(A) \quad \text{e} \quad \nabla\Phi(x_0) \neq 0 \quad \forall x_0 \in \Gamma_0 \tag{7.3}$$

N.B. Cioè per il Teorema di Dini, Γ_0 è localmente il grafico di una funzione di $n - 1$ variabili (Teorema 7.1- ipersuperfici di livello).

7.5. Osservazione: (Strutture geometriche) Come nel Osservazione 6.5, per un vincolo regolare Γ_0, sono ben definiti l'iperpiano tangente *l'iperpiano tangente*, *spazio tangente*, *spazio normale*:

$$\Pi_{(x_0,y_0)}\Gamma_0 := \{x \in \mathbf{R}^n : \quad \langle \nabla\Phi(x_0), (x - x_0)\rangle = 0\} \tag{7.4}$$

$$T_{x_0}\Gamma_0 := [\nabla\Phi(x_0)]^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \quad \langle \nabla\Phi(x_0), v\rangle = 0\} \tag{7.5}$$

$$N_{x_0}\Gamma_0 := [T_{x_0}\Gamma_0]^\perp = \{w \in \mathbf{R}^n : \quad \langle \nabla w, v\rangle = 0 \quad \forall v \in T_{x_0}\Gamma_0\} \tag{7.6}$$

Molto utile nella dimostrazione del risultato principale è la seguente proposizione che fornisce una caratterizzazione dei spazi tangenti e normali.

7.6. Proposizione: *Sia* Γ_0 *un vincolo regolare. Allora*

a) $N_{x_0}\Gamma_0 = \{\lambda\nabla\Phi(x_0) : \quad \lambda \in \mathbf{R}\}$

b) $T_{x_0}\Gamma_0 = \{\gamma'(0) : \ \gamma : (-\delta, \delta) \to \Gamma_0 \text{ di classe } C^1, \ \gamma(0) = x_0\}$

dove $\delta = \delta(\gamma) > 0$. *Cioè lo spazio tangente è lo spazio di vettori di velocità a tempo zero di cammini di classe* C^1 *con immagine su vincolo* Γ_0 *che passano per* x_0 *a tempo zero (vedi paragrafo 8).*

7.7. Teorema: (Moltiplicatori di Lagrange) *Siano* $f,\ \Phi : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *di classe* $C^1(A)$ *con* A *aperto. Assumiamo che* $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ *sia un vincolo regolare. Se* $f_{|\Gamma_0}$ *ha estremo locale in* x_0 *allora*

a) *esiste* $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ *t.c.* $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla\Phi(x_0)$

b) (x_0, λ_0) *è punto critico libero della funzione* *Lagrangiana* $\mathcal{L}(x,\lambda) := f(x) - \lambda\Phi(x)$

c) *Se inoltre* $f, \Phi \in C^2(A)$ *si ha*

$$[H_f - \lambda_0 H_\Phi] \text{ e}' \begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases} \text{definita su } T_{x_0}\Gamma_0 \Longrightarrow x_0 \text{ e}' \begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases} \text{relativo per } f_{|\Gamma_0}$$

dove $T_{x_0}\Gamma_0$ *è lo spazio tangente al vincolo e* H_f, H_Φ *sono le matrici hessiane.*

7.8. Esercizio: Siano $\Phi(x,y,z) = z^3 + y^2 + xz + z + x^2$ e $f(x,y,z) = z$. Verificare che $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ sia un vincolo regolare e trovare gli estremi locali di f_{Γ_0}.

7.2 Il caso di più vincoli

7.9. Problema: Trovare gli estremi locali di $f_{|\Gamma_0}$ dove $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e il vincolo è definito tramite le soluzioni del sistema

$$\Gamma_0 : \begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ \Phi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

Cioè con $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ definita da $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ si ha

$$\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0) = \bigcap_{j=1}^{k} \Phi_j^{-1}(0)$$

7.10. Definizione: *Sia* $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *di classe* $C^1(A, \mathbf{R}^k)$ *con* $1 \leq k \leq n-1$*. Si chiama* Γ_0 *un vincolo regolare oppure sistema regolare di vincoli se per ogni* $x_0 \in \Gamma_0$ *la matrice jacobiana*

$$
D\Phi(x_0) = \begin{bmatrix} \partial\Phi_1/\partial x_1 & \cdots & \partial\Phi_1/\partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial\Phi_k/\partial x_1 & \cdots & \partial\Phi_k/\partial x_n \end{bmatrix}_{x=x_0} = \begin{bmatrix} \longleftarrow & \nabla\Phi_1(x_0) & \longrightarrow \\ & \vdots & \\ \longleftarrow & \nabla\Phi_k(x_0) & \longrightarrow \end{bmatrix}
$$

di Φ ha caratteristica k; cioè esistono k colonne indipendenti e quindi esistono anche k righe indipendenti.

7.11. Osservazioni: Prima di enunciare il risultato notiamo i punti principali dell'argomento.

1. Abbiamo $\nabla\Phi_j(x_0) \neq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, k$ (le k righe sono linearmente independenti) e quindi per il teorema sulle iperfici di livello $\Sigma_j := \Phi_j^{-1}(0)$ è localmente una ipersuperficie di co-dimensione $n-1$.

2. Abbiamo Γ_0 è *localmente una ipersuperficie di codimensione $n-k$*. Più precisamente, Γ_0 è esplicitabile localmente come grafico di una funzione $y = g(\tilde{x})$ dove $y \in \mathbf{R}^k$ corrisponde alle k colonne indipendenti e $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n-k}$ alle altre. Per esempio, se le ultime k sono quelle "buone", si scrive $(x_1, \ldots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n) = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-k}, y_1, \ldots, y_k)$ in un intorno di x_0.

3. C'è uno *spazio tangente* $T_{x_0}\Gamma_0$ di dimensione $n-k$ e uno *spazio normale* $N_{x_0}\Gamma_0$ di dimensione k con una base $\{\nabla\Phi_j(x_0)\}_{j=1}^k$.

4. x_0 è un punto critico vincolato per $f_{|\Gamma_0}$ se e solo se

$$
\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}\Gamma_0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}\Gamma_0 \Leftrightarrow \exists\{\lambda_j\}_{j=1}^k : \quad \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla\Phi_j(x_0)
$$

   Quindi abbiamo k *moltiplicatori di Lagrange* nel caso di k vincoli independenti.

7.12. Teorema: (Moltiplicatori di Lagrange per k vincoli) *Siano $f \in C^1(A; \mathbf{R})$ e $\Phi \in C^1(A; \mathbf{R}^k)$ con $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Assumiamo che $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ sia un vincolo regolare. Se $f_{|\Gamma_0}$ ha estremo locale in x_0 allora*

a) *esiste $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots \lambda_k^0) \in \mathbf{R}^k$ t.c. $\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j^0 \nabla\Phi_j(x_0)$*

b) *(x_0, λ_0) è punto critico libero della funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x, \lambda) := f(x) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \Phi_j(x)$*

c) *Se inoltre* $f \in C^2(A; \mathbf{R}), \Phi \in C^2(A; \mathbf{R}^k)$ *si ha*

$$[H_f - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^0 H_{\Phi_j}] \text{ e}' \begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases} \text{definita su } T_{x_0}\Gamma_0 \Longrightarrow x_0 \text{ e}' \begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases} \text{relativo per } f_{|\Gamma_0}$$

7.13. Esempio: Trovare tutti i punti critici vincolati per $f(x, y, z) = y^2 - 2y + z^2$ ristretta al vincolo formato dal sistema $\Phi(x, y, z) = (z, x^2 + y^2 + z^2 - 1) = (0, 0)$.

7.3 Altri esempi ed esercizi

7.14. Esercizio: Trovare i punti sulla superficie definita da $z^2 - xy = 1$ che sono loclmente più vicino all'origine. Classificare la loro natura.

La teoria degli estremi vincolati può essere utile anche nei problemi di estremi globali, per esempio per gli estremi globali di una funzione continua su un compatto K. Per il teorema di Weierstrass si sa che $f \in C^0(K, \mathbf{R})$ ammette massimo, minimi globale che perforza deve succedere o all'interno K° oppure sul bordo ∂K. Se $f \in C^2(K, \mathbf{R})$ si può usare la teoria di punti critici liberi all'interno e la teoria dei punti critici vincolati al bordo.

7.15. Esercizio: Trovare gli estrei globali di $f(x, y, z) = xyz^2 - 2$ su $K = \overline{B}_1(0)$ la palla chisa di raggio 1 e centro in 0.

Sarebbe opportuno anche fare qualche esempio su $\mathbf{R}^n$ con $n \geq 2$ non specificato. Il primo esercizio proposto è la generalizzazione naturale del Esercizio 6.12 sulla caratterizzazione variazionale dei autovalori per una matrice reale e simmetrica.

7.16. Esercizio: Sia $A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ con $A = A^T$. Siano $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ e $\Phi(x) = ||x||^2 - 1$. Trovare gli estremi locali di $f_{|\Phi^{-1}(0)}$.

7.17. Esercizio: Trovare gli estremi vincolati di $f_{|\Gamma_0}$ dove

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ln(x_j) \;\; rme \;\; \Gamma_0 : \; \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

dove $\ln = \log_e$ è il logaritmo in base e.

7.18. Esercizio: Trovare il minimo per la somma $\sum_{j=1}^{n} x_j$ dove $x_j > 0$ con il vincolo $\Pi_{j=1}^{n} x_j = 1$. Dedurre la seguente relazione fra le medie geometriche ed aritmetiche:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad a_j \geq 0.$$

8 Curve in $\mathbf{R}^n$: concetti fondamentali

8.1. Definizioni: *Una curva in $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione continua $\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$* dove I è un intervallo. L'immagine $\varphi(I)$ si chiama *sostegno della curva*. Le equazioni

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, \ x_n = \varphi_n(t)$$

si chiamano equazioni parametriche della curva.

N.B. Si usa varie termonologia: "curva" = "cammino" = "curva parametrizzata". Si parla anche di "arco" nel caso $I = [a, b]$.

8.2. Esempio: Con $x_0, v \in \mathbf{R}^n$ fissi la curva $\varphi(t) = x_0 + tv, \quad t \in \mathbf{R}$ ha come sostegno la retta che passa da x_0 nella direzione v. La curva φ è derivabile (è di classe C^∞) e si ha $\varphi'(t) = v$.

8.3. Definizioni: *Sia $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$ derivabile. Si chiama $\varphi'(t)$ il vettore di velocita di φ al tempo t e si chiama $||\varphi'(t)||$ la velocità scalare.*

N.B. La terminologia di velocità prende spinto dal risultato seguente di uso frequente.

8.4. Teorema (del valor medio) *Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ continua e derivabile su $[a, b] \setminus S$ dove l'insieme singolare $S = \{t_1, \ldots, t_N\}$ è finito. Allora*

$$||\varphi(b) - \varphi(a)|| \leq \sup_{t \in [a,b] \setminus S} ||\varphi'(t)|| \, |b - a| \tag{8.1}$$

N.B. Ci dice qualcosa solo nel caso del sup finito, altrimenti dice solo $||\varphi(b) - \varphi(a)|| \leq +\infty$. C'è uguaglianzna in (8.1) solo nel caso $\varphi(t) = \varphi(a) + t(\varphi(b) - \varphi(a))/(b - a)$.

8.5. Osservazione: Per $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ sappiamo che esiste $\xi \in (a, b)$ t.c. $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a)$ ma in $\mathbf{R}^n$ abbiamo in generale solo una disuguaglianza.

La dimostrazione del Teorema 8.4 si basa sul un confronto con una funzione ausilliare $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ via il seguente lemma.

8.6. Lemma: *Siano* $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ *e* $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *continue su* $[a,b]$ *e derivabili su* $[a,b] \setminus S$ *t.c.* $||\varphi'_d(t)|| \leq g'_d(t)$ *per ogni* $t \in [a,b] \setminus S$ *dove* f'_d *rappresenta la derivata destra di una funzione* f*. Allora*

$$||\varphi(b) - \varphi(a)|| \leq g(b) - g(a) \tag{8.2}$$

Abbiamo conseguenze utile del teorema del valor medio.

8.7. Corollario: *Sia* $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$ *derivabile. Allora* φ *è costante* $\Leftrightarrow \varphi'(t) = 0, \forall t \in I$*.*

8.9. Corollario: *Sia* $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$ *continua su* I *e derivabile su* $I \setminus S$ *con* S *finito. Allora* φ *è lipschitziana* $\Leftrightarrow \varphi'(t)$ *è limitata su* $I \setminus S$*.*
Ricordiamo che φ è lipschitziana in I se esiste $L > 0$ t.c. $||\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|| \leq L|t_2 - t_1|, \quad \forall t_1, t_2 \in I$

8.10. Esercizio: Trovare una parametrizzazione per il segmento $[x_0, x_1]$ in $\mathbf{R}^n$ dove x_1, x_2 sono due punti distinti in $\mathbf{R}^n$. Cioè trovare una curva con sostegno $[x_0, x_1]$. Qual'è la parametrizzazione con velocità scalare uguale 1?

8.11. Osservazione: Il sostegno di una curva data ha tante parametrizzazioni diverse. Per esempio il cerchio

$$\gamma = \{(x, y, z) : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \wedge \quad z = 0\}$$

ha le parametrizzazioni

$$\varphi_1(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi_2(t) = (\cos(-t), \sin(-t), 0), \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi_3(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0), \quad t \in [0, \pi)$$

$$\varphi_4(t) = (\sin t, \cos t, 0), \quad t \in [0, 2\pi)$$

8.12. Osservazione: L'ordinamento in $I \subset \mathbf{R}$ induce un "verso" sulla curva φ ed il suo sostegno.

8.13. Definizioni (tipi di curve): *Si chiama una curva* $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$

a) semplice $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ *φ è iniettiva su I°*

b) chiusa $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $I = [a,b]$ *e* $\varphi(a) = \varphi(b)$

c) piana $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ *$\varphi(I)$ è contenuto in un piano (2-dimensionale)*

8.14. Esempi: Oltre ai segmenti e cerchi curve che vediamo spesso sono

1. Il grafico di una funzione $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ che è semplice, piana, non chiusa

2. Le eliche come $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbf{R}$, che è semplice, non chisua, non piana.

8.15. Esercizio: Una "figura ad otto" nel piano può essere il sostegno di una curva semplice e chiusa? Il sostegno di una curva semplice?

8.16. Definizioni: *Una curva (continua)* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *si chiama*

a) *regolare* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\varphi \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n) \ \wedge \ \varphi'(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b)$

b) *regolare a tratti* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ *una partizione* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ *t.c.* $\varphi_{|[t_{k-1}, t_k]}$ *è regolare* $\forall k = 1, \ldots, N$

8.17. Esempio: La curva $\varphi(t) = (t^3, t^2)$ è di classe $C^\infty([-1, 1], \mathbf{R}^n)$ ma **non** è regolare secondo Definizione 8.16; c'è una cuspide nel sostegno di φ in $t = 0$. Questa curva è regolare a tratti.

8.18. Osservazione: *Sia* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *una curva regolare. Allora per ogni* $t_0 \in (a, b)$

a) *esiste una retta tangente* τ *al sostegno di* φ *in* $t = t_0$*. Una sua parametrizzazione è data da*

$$\tau(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0), \quad t \in \mathbf{R}$$

b) *esiste un versore tangente al sostegno di* $\varphi(t_0)$ *dato da* $T(t_0) = ||\varphi'(t_0)||^{-1}\varphi'(t_0)$.

8.19. Esercizio: Esaminare la curva $\varphi(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$, $t \in \mathbf{R}$. È regolare? Il sostegno è una curva semplice?

9 Curve rettificabili e lunghezza di una curva

9.1. Problema: Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una curva (continua). Si può associare un numero (finito) $L(\varphi)$ che rappresenta la distanza percorsa lungo il cammino? Rappresenta anche la lunghezza del sostegno?

9.2. Osservazione: (l'idea della costruzione) Approssimare φ con una *curva poligonale* "iscritta in φ" e usare la distanza in $\mathbf{R}^n$ per misurare la lunghezza della approssimazione. Più precisamente:

1. Prendiamo una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$: $\quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

2. Poniamo $P_k = \varphi(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N$

3. Consideriamo la curva poligonale iscritta in φ; cioè il sostegno è l'insieme $\cup_{k=1}^{N}[P_{k-1}, P_k]$ ed una parametrizzazione è data da $\varphi_{\mathcal{P}} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ dove
$$\varphi_{\mathcal{P}}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right) P_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} P_k, \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \tag{9.1}$$

4. Definiamo
$$l(\varphi_{\mathcal{P}}) := \sum_{k=1}^{N} ||P_k - P_{k-1}|| = \sum_{k=1}^{N} ||\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|| \tag{9.2}$$
dove si nota "$L(\varphi)$" $\geq l(\varphi_{\mathcal{P}})$.

5. Definiamo
$$L(\varphi) := \sup_{\mathcal{P}} l(\varphi_{\mathcal{P}}) \tag{9.3}$$
dove si prende il sup su tutte le partizioni $\mathcal{P} \in \Pi$, dove Π è l'insieme di tutte le partizioni di $[a,b]$.

9.3. Definizione: *Una curva (continua) $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ si chiama rettificabile se esiste finito $L(\varphi) = \sup_{\mathcal{P}} l(\varphi_{\mathcal{P}})$ ed in tal caso si chiama $L(\varphi)$ la lunghezza della curva parametrica φ.*

9.4. Osservazione: Non tutte le curve continue sono rettificabili. Per esempio $\varphi(t) := (t, t\cos(\pi/t))$ per $t \in (0,1]$ e $\varphi(0) = (0,0)$.

9.5. Teorema (Rettificabilità di curve lipschitziana) *Sia $\varphi \in \mathrm{Lip}([a,b], \mathbf{R}^n)$ una curva lipschitziana; cioè $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ed esiste $L > 0$ t.c.*
$$||\varphi(t) - \varphi(s)|| \leq L|t - s|, \quad s, t \in [a,b]$$
Allora φ è rettificabile.

9.6. Teorema (Rettificabilità di curve di classe C^1) *Sia $\varphi \in C^1([a,b],\mathbf{R}^n)$. Allora φ è rettificabile e la sua lunghezza soddisfa*

$$L(\varphi) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\,dt. \tag{9.4}$$

N.B. Per le curve C^1 abbiamo non solo la rettificabilità ma anche una bella formula (9.6) per calcolare la sua lunghezza. Invece, per esempio con $\varphi \in \mathrm{Lip}([a,b],\mathbf{R}^n)$ ma $\varphi \notin C^1([a,b],\mathbf{R}^n)$ non si può dire in generale che la lunghezza è data da (9.4).

9.7. Esempi: Si verifica che:

1. $\varphi(t) = x_0 + tv,\ t \in [a,b] \Rightarrow L(\varphi) = (b-a)||v||, \quad x_0, v \in \mathbf{R}^n$
2. $\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t),\ t \in [0,2\pi] \Rightarrow L(\varphi) = 2\pi r, \quad r > 0$

9.8. Esempio: (la lunghezza di un grafico) Sia $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ di classe C^1. Poniamo $\Gamma = \mathrm{graf}(g)$. Allora Γ è il sostegno di una curva rettifcabile $\varphi(x) = (x, g(x)),\ x \in [a,b]$ e

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2}\,dx \tag{9.5}$$

Per estendere la teoria, ci serve la capacità di spezzare un curva. Il primo passo è una proprietà generale che segue dal modo in cui viene fatto la costruzione della lunghezza.

9.9. Proposizione (decomposizione di curve) *Siano $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ continua e Π la famiglia di tutte le partizioni di $[a,b]$. Denotiamo con*

$$V[\varphi; a,b] = \sup_{\mathcal{P}\in\Pi} \sum_{k=1}^{N} ||\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})||$$

la <u>variazione totale di φ</u>. Per ogni $c \in (a,b)$, si ha $V[\varphi; a,b] = V[\varphi; a,c] + V[\varphi; c,b]$.
In particolare, abbiamo

(a) *Se φ è rettificabile, cioè $V[\varphi; a,b] < +\infty$, allora $\varphi_1 = \varphi_{|[a,c]}$ e $\varphi_2 = \varphi_{|[c,b]}$ sono anche rettificabile e si ha $L(\varphi) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2)$.*

(b) *Se invece, φ_1, φ_2 sono rettificabili, allora φ è rettificabile, e vale di nuovo $L(\varphi) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2)$.*

9.10. Teorema (Rettificabilità di curve C^1 a tratti) *Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ continua e C^1 a tratti; cioè esiste $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 \cdots < t_N = b\}$ t.c. $\varphi_k := \varphi_{[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1},t_k];\mathbf{R}^n)$, $k = 1, \dots N$. Allora φ è rettificabile e la sua lunghezza soddisfa*

$$L(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} L(\varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} ||\varphi'(t)||\, dt. \tag{9.6}$$

9.1 Esercizi nel calcolo della lunghezza

9.11. Esercizio: Calcolare la lunghezza della <u>*elica cilindrica*</u> parametrizzata da

$$\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

9.12. Esercizio: Calcolare la lunghezza del grafico di $y = x^2$ per $x \in [0,1]$.

9.13. Osservazione: L'integrale indefinto

$$\int \sqrt{1 + \alpha^2 x^2}\, dx \tag{9.7}$$

si trova in tantissimi problemi nel calcolo della lunghezza (e poi anche nel calcolo dell'area). È una "bestia" che dovrebbe essere trattata. La sostituzione $\alpha x = \tan\theta$ <u>oppure</u> $\alpha x = \sinh t$ è una buona idea.

9.14. Esercizio: Calcolare la lunghezza del grafico di $y = \ln x$ per $x \in [1, \sqrt{3}]$

9.15. Esercizio: (cateneria) Calcolare la lunghezza del grafico di $y = \cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ per $x \in [-a, a]$. Questa curva è

9.16. Esercizio: (curve polari) Sia $\rho = \rho(\theta)$ con $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ t.c. $\rho \in C^1([\theta_0, \theta_1])$.

a) Trovare le equazioni parametriche (cartesiane) della curva così definita.

b) Dire quando la curva è regolare

c) Trovare una formula per la lunghezza della curva polare

9.17. Esercizio: (spirale logaritmica) Trovare la lunghezza della curva definita da

$$\rho = e^{\theta}, \quad \theta \in (-\infty, \bar{\theta}], \quad \text{dove } \bar{\theta} \in \mathbf{R}.$$

9.18. Esercizio: (asteroide) Trovare la lunghezza della curva definita da

$$\varphi(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t)), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{dove} \quad a > 0.$$

10 Lunghezza d'arco e l'integrale lungo un cammino

10.1. Domande: Data una curva rettificabile φ con sostegno γ,

1. Possiamo cambiare la parametrizzazione φ senza cambiare il valore della lunghezza del sostegno γ?
2. C'è una parametrizzazione "preferita" in qualche senso?
3. Data una funzione f sul sostegno γ di un cammino φ, possiamo definire l'integrale di f su γ (oppure lungo il cammino φ)?

10.1 Curve equivalenti e cambiamento di variabili

10.2. Definizione: *Due curve parametrizzate $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ e $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ sono equivalenti nel senso C^0 se esiste un omeomorfismo $g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ (g è biettiva con g, g^{-1} continue) t.c. $\varphi(t) = (\psi \circ g)(t), \quad t \in [a, b]$. Se inoltre g è un diffeomorfismo di classe C^1 si dice φ, ψ sono equivalenti in senso C^1.*

N.B. *Si ha anche $\psi(s) = (\varphi \circ g^{-1})(s), \quad s \in [\alpha, \beta]$. Si scrive $\varphi \overset{C^k}{\sim} \psi$ quando due curve sono equivalenti in C^k o semplicamente $\varphi \sim \psi$ quando il contesto è chiaro.*

10.3. Proposizione: *Siano φ, ψ due curve continue. Se $\varphi \overset{C^0}{\sim} \psi$ allora $L(\varphi) = L(\psi)$. In particolare, sono entrambi rettificabili se una lo è e la lunghezza è independente dall'orientazione.*

10.4 Teorema: *Siano $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ e $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ due curve t.c. $\varphi \overset{C^1}{\sim} \psi$. Allora si ha*

$$L(\varphi) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\, dt = \int_\alpha^\beta ||\psi'(s)||\, ds = L(\psi) \tag{10.1}$$

e

$$\int_a^b ||\varphi'(t)||\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} ||\varphi'(g^{-1}(s))|| \frac{1}{g'(g^{-1}(s))}\, ds \tag{10.2}$$

N.B. La formula (10.2) è un esempio di una formula di <u>*cambiamento di variabili*</u> e g un diffeomorfismo di classe C^1 si chiama un cambiamento <u>*ammissible*</u> di parametro per l'integrale.

10.5. Osservazione: Le relazioni $\overset{C^k}{\sim}$ sono tutte relazioni d'equivalenza. Quindi, data una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$, ha senso parlare della classe d'equivalenza

$$[\varphi] = \{\psi \ \text{ t.c. } \ \psi \sim \varphi\}$$

Inoltre, se γ è il sostegno di φ, spesso idenifichiamo γ con $[\varphi]$ e ha senso definire

$$L(\gamma) = L(\psi), \quad \psi \in [\varphi].$$

10.2 Il parametro lunghezza d'arco

10.6. L'idea: C'è una parametrizzazione "preferita" nel calcolo della lunghezza di una curva.

1. Siano $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ rettificabile e $c \in [a, b]$. Definiamo un nuovo parametro
$$s = s(t) := \begin{cases} L(\varphi_{|[c,t]}) & \text{se } \ t \geq c \\ -L(\varphi_{|[t,c]}) & \text{se } \ t < c \end{cases} \tag{10.3}$$
2. Si ha $s : t \in [a, b] \mapsto s(t) \in [s(a), s(b)]$ con $s(c) = 0$.
3. Vogliamo che s dia un diffeomorfismo o almeno un omeomorfismo. Questo succede se s è strettamente crescente in t.
4. Se $\varphi \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ è una curva regolare; cioè $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$ allora si ha
$$s = s(t) := \int_c^t ||\varphi'(\tau)||\, d\tau \tag{10.4}$$
e s è un diffeomorfismo da $[a, b]$ in $[s(a), s(b)]$ con inversa $t = t(s) : [s(a), s(b)] \to [a, b]$. Nel caso $c = a$ si ha anche $s(b) = L(\varphi)$. Questa è la scelta più commune.
5. La parametrizzazione $\gamma : [0, L(\varphi)] \to \mathbf{R}^n$ definita da $\gamma(s) = (\varphi \circ t)(s)$ si chiama <u>*parametrizzazione rispetto lunghezza d'arco*</u>

10.7. Proposizione: *Sia $\varphi = \varphi(t)$ una curva regolare e $\gamma = \gamma(s)$ la sua parametrizzazione rispetto lunghezza d'arco. Allora*

a) γ *è regolare e* $\gamma \overset{C^1}{\sim} \varphi$

b) $||\gamma'(s)|| = 1, \quad s \in [s(a), s(b)]$; *cioè* $\gamma'(s)$ *è un versore tangente alla curva nel punto* $\gamma(s)$.

10.8. Esercizio: Trovare la parametrizzazione rispetto lunghezza d'arco per la curva $\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t, t), \quad t \in \mathbf{R}$ con la normalizzazione di $s = 0$ in $t = 0$.

10.3 Integrali di funzioni rispetto lunghezza d'arco

10.9. Definizione: *Sia* $\gamma = [\varphi]$ *una curva regolare con* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *una sua parametrizzazione. Sia* f *una funzione continua sul sostegno* $\varphi([a, b])$ *di* γ. *Allora l'integrale di f lungo* γ *rispetto lunghezza d'arco è*

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\varphi(t))\, ||\varphi'(t)||\, dt \tag{10.5}$$

10.10. Esempio: Se $f \equiv c$ sul è costante sul sostegno allora $\int_\gamma f\, ds = cL(\gamma)$. In particolare $\int_\gamma ds = L(\gamma)$.

10.11. Proposizione: *L'integrale* $\int_\gamma f\, ds$ *è ben definito nel senso che non dipende dalla rappresentante* $\psi \in [\varphi] = \gamma$ *scelta. In particolare, non dipende dall'orientazione di* γ. *Inoltre, l'integrale è ben definito per* γ *regolare a tratti e per* f *continiua a tratti lungo il sostegno di* γ.

10.12. Osservazione: Per γ regolare, abbiamo la parametrizzazione rispetto la lunghezza d'arco $\gamma = \gamma(s) : [0, L] \to \mathbf{R}^n$ per cui

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^L f(\gamma(s)),\ ds.$$

10.13. Teorema (Proprietà di $\int_\gamma f\, ds$): *Siano* γ *una curva regolare a tratti e* $f, g : \gamma \to \mathbf{R}$ *continue a tratti. Allora:*

a) $\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\ ds = \alpha \int_\gamma f\, ds + \beta \int_\gamma g\, ds, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

b) $\int_\gamma f\, ds \le \int_\gamma g\, ds$ *se* $f \le g$ *su* γ

c) $\left| \int_\gamma f\, ds \right| \le \int_\gamma |f|\, ds \le L(\gamma) \max_\gamma |f|$

d) $\int_\gamma f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds$ *se* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

10.4 Applicazioni ed esercizi

10.14. Definizione: *Siano γ regolare a tratti con lunghezza $L(\gamma)$ e f continua a tratti lungo γ. Si chiama valor medio di f su γ la quantità*

$$\bar{f}_{|\gamma} = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma f\, ds \tag{10.6}$$

10.15. Esercizio: Siano $f(x, y, z) = z^3$ e γ la curva con parametrizzazione $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t),\ \ t \in [0, 2\pi]$. Calcolare l'integrale di f lungo γ e trovare il suo valor medio. Il valor medio è assunto da f lungo γ?

10.16. Osservazione: (Interpretazione geometrica) Nel caso di γ una curva regolare e piana e f continua su γ, abbiamo $\int_\gamma f\, ds$ uguale all'area della superficie limitata dal sostegno di γ e il grafico di f su γ.

10.17. Esercizio: Calcolare l'area della superficie parallela all'asse z fra $z = 0$ ed il grafico di $z = f(x, y) = xy$ lungo la curva con parametrizzazione $\varphi(t) = (t, t^2)$ per $t \in [0, 1]$.

10.18. Definizione: *Sia γ una curva semplice e regolare a tratti con sostegno Γ. Il punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ con*

$$\bar{x}_i = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x_i\, ds, \quad i = 1, \ldots, n \tag{10.7}$$

si chiama baricentro (centro di massa) dell'insieme Γ.

10.19. Esercizio: Calcolare il baricentro (del arco) dell'elica cilindrica $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t).\ \ t \in [0, 2\pi]$.

10.20. Esercizio: Sia $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ con $t \in [-1, 1]$. Mostrare che φ è rettificabile e calcolare la sua lunghezza. Trovare la sua parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco.

10.21. Esercizio: Sia $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ definita da $\varphi(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$. Trovare il tempo $T > 0$ per cui $L(\varphi_{|[0,T]}) = 3/2$.

11 Campi vettoriali ed integrali di linea

11.1. Definizione: *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Si chiama campo vettoriale in A una funzione $F : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ a valori vettoriali dove si denota $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$.*

N.B. Anche se non è sempre strettamente necessario, prendiamo spesso:

1. A aperto e connesso e quindi A è connesso per archi.
2. $F \in C^0(A, \mathbf{R}^n)$ un campo continuo.

Inoltre, nelle applicazioni, $F(x)$ spesso è un *campo di forza* che agisce su una particella puntiforme che sta nella posizione $x \in A$.

11.2. Domanda: Che tipo di informazione globale possiamo avere su F lungo una curva (traiettoria) γ? Ci sono varie possibilità:

1. $\int_\gamma F\,ds = \left(\int_\gamma F_1\,ds, \dots, \int_\gamma F_n\,ds\right)$
2. $\int_\gamma ||F||\,ds$
3. $\int_\gamma \langle F, v\rangle\,ds$ dove $v : \gamma \to \mathbf{R}^n$ è qualche campo vettoriale su γ.

Per motivi fisici (ma non solo) una scelta buona è $v = v(s) = \gamma'(s)$ il campo vettoriale dei versori tangenti ad una curva regolare γ. Quest'integrale viene chiamato *integrale di linea* di F su γ. Nel contesto fisico questo è legato al *concetto di lavoro*.

11.3. Problema: L'integrale $\int_\gamma \langle F, \gamma'\rangle\,ds$ ovviamente dipende sul verso di γ. C'è un nuovo concetto di cambiamento ammissibili di parametri per gli integrali di linea?

11.4. Definizione: *Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una curva parametrizzata regolare. Si chiama curva regolare orientata γ (con una sua parametrizzazione φ) la classe di equivalenza*

$$\gamma = [\varphi]^\circ = \{\psi \in C^1([\alpha,\beta]; R^n) : \quad \psi \overset{\circ}{\sim} \varphi\}$$

dove $\psi \overset{\circ}{\sim} \varphi \Leftrightarrow \exists$ un diffeomorfismo $\tau = g(t)$ da $[a,b]$ in $[\alpha,\beta]$) t.c. $g'(t) > 0$ per ogni $t \in [a,b]$ e

$$\psi(\tau) \equiv (\varphi \circ g^{-1})(\tau) \quad \wedge \varphi(t) \equiv (\psi \circ g)(t).$$

N.B. Se $\tau = g(t) = -t$, si "cambia verso" e si trova "l'opposta" di φ; cioè

$$(-\varphi)(\tau) = \varphi(g^{-1}(\tau)) = \varphi(-\tau).$$

Così si vede che la classe γ (senza orientazione) si spezza in due classi (con orientazione); cioè

$$\gamma = [\varphi] = \{+\gamma, -\gamma\} = \{[\varphi]^\circ, [-\varphi]^\circ\}.$$

11.5. Definizione: *Sia $F : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un campo vettoriale t.c. F è continua sul sostegno di una curva regolare orientata γ. Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una parametrizzazione di γ; cioè $\gamma = [\varphi]^\circ$. Si chiama integrale di linea di F lungo γ l'integrale*

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle\, ds := \int_\gamma \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\, dt \tag{11.1}$$

11.6. Osservazione L'integrale di linea è esattamente l'integrale della componente tangenziale di F lungo γ con la sua orientazione dove si ricorda che il campo tangenziale T e l'elemento d'arco possono essere scritti tramite la parametrizzazione φ

$$T(t) = \frac{1}{||\varphi'(t)||}\varphi'(t) \quad \text{e} \quad ds = ||\varphi'(t)||\, dt \tag{11.2}$$

da cui segue (11.1). Inoltre, il valore di (11.1) non dipende sulla scelta di $\psi \in [\varphi]^\circ$; fatto che è la parte **a)** del seguente teorema.

11.7. Teorema: (Proprietà dell'integrale di linea) *Siano $F, G \in C^0(A; \mathbf{R}^n)$ due campi vettoriali su $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso. Sia γ una curva regolare orientata con sostegno in A e sia $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una sua parametrizzazione. Allora*

a) $\psi \overset{\circ}{\sim} \varphi \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\, dt = \int_\alpha^\beta \langle F(\psi(\tau)), \psi'(\tau)\rangle\, d\tau$

b) $\psi \overset{\circ}{\sim} (-\varphi) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\, dt = -\int_\alpha^\beta \langle F(\psi(\tau)), \psi'(\tau)\rangle\, d\tau$

c) $\int_\gamma \langle \alpha F + \beta G, T\rangle\, ds = \alpha \int_\gamma \langle F, T\rangle\, ds + \beta \int_\gamma \langle G, T\rangle\, ds \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

d) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \langle F, T\rangle\, ds = \int_{\gamma_1} \langle F, T\rangle\, ds + \int_{\gamma_2} \langle F, T\rangle\, ds$

Quindi **a) - d)** *valgono anche per γ regolare a tratti e orientata.*

11.1 Il concetto di lavoro e campi conservativi

11.8. Definizione: *Sia $F : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un campo vettoriale continuo pensato come un campo di forza. Per ogni curva orientata regolare a tratti con sostegno in A, si chiama l'integrale di linea $\int_\gamma \langle F, T\rangle\, ds$ il lavoro effetuato da F lungo γ.*

N.B. Nel caso di un campo costante F_0, il lavoro W effetuato lungo un segmento $[x, x+h]$ è

$$W = \langle F_0, h\rangle = \langle F_0, h/||h||\rangle ||h||$$

dove $||h|| = \mathrm{dist}(x+h, x)$ e il primo fattore è la componente di F_0 nella direzione h.

11.9. Esercizio: Sia $F(x, y) = (0, -g)$ il campo di *gravità* dove g è costante. Calcolare il lavoro effetuato da F lungo la collina con profilo $y = f(x) = -x^2 + 20$ per $x \in [-4, 2]$ attraversando la collina **a)** da destra a sinistra; **b)** da sinistra a destra.

11.10. Esercizio: Sia

$$F(x) = -\frac{Gm}{r^3}x, \quad x \in \mathbf{R}^3$$

il campo di *Newton* dove G è il *costante universale di gravitazione*, m è la *massa* di un oggetto all'origine, $r = ||x||$. Calcolare il lavoro effetuato da F lungo l'orbita circolare $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

11.11. Definizione: *Sia $F \in C^0(A; \mathbf{R}^n)$ un campo vettoriale su $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso. Si dice F è conservativo in A $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists\ \mathcal{U} \in C^1(A; \mathbf{R})$ t.c. $\nabla \mathcal{U} = F$ in A. In tal caso, $\mathcal{U}$ è detta funzione potenziale di F.*

11.12. Esempio: Il campo di Newton è un campo conservativo in $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ perchè $F = \nabla \mathcal{U}$ dove $\mathcal{U}(x) = Gm/r$ (il potenziale newtoniano).

11.13. Teorema (Campi conservativi ed integrali di linea): *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso. Sia $F \in C^0(A; \mathbf{R}^n)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti fra loro:*

a) *F è conservativo in A*

b) *$\int_{\gamma_1} \langle F, T\rangle\, ds = \int_{\gamma_2} \langle F, T\rangle\, ds$ per ogni γ_1, γ_2 regolari a tratti con sostegno in A con gli stessi estremi e lo stesso verso.*

c) *$\int_\gamma \langle F, T\rangle\, ds = 0$ per ogni γ regolare a tratti e chiusa con sostegno in A.*

11.14. Proposizione: *Sia $F \in C^0(A; \mathbf{R}^n)$ un campo conservativo in A aperto connesso con funzione potenziale $\mathcal{U}$. Allora:*

a) *Per ogni curva regolare a tratti γ con sostegno fra P_0 e P_1 in A, si ha*

$$\int_\gamma \langle F, T \rangle \, ds = \mathcal{U}(P_1) - \mathcal{U}(P_0) \tag{11.3}$$

b) *Tutte le funzioni potenziali sono della forma $\mathcal{U} + c$ dove $c \in \mathbf{R}$.*

11.15. Esercizio: Calcolare il lavoro effettuato dal campo

$$F(x, y) = \left(\ln{(1 + y^2)}, 2y \left(1 + \frac{x}{1 + y^2} \right) \right)$$

lungo la curva con parametrizzazione $\varphi(t) = (\cos(t), \sin^2(t))$ con $t \in [0, \pi]$.

12 Forme differenziali lineari

12.1. Definizione: *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Si chiama forma differenziale lineare un'applicazione*

$$\omega : A \to (\mathbf{R}^n)^* = \{L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \text{ lineare}\} \tag{12.1}$$

12.2. Notazione: Rispetto la base canonica di $R^n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ abbiamo la *base canonica* di $(R^n)^* = \{e^1, \ldots, e^n\} = \{dx_1, \ldots, dx_n\}$ definita da

$$dx_i[e_j] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{12.2}$$

Quindi

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \, dx_i \tag{12.3}$$

dove $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ sono i *coefficienti della forma differenziale ω* rispetto alla base canonica. Si dice ω è di *classe C^k su $A (k \geq 0)$* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $a_i \in C^k(A), \; i = 1, \ldots, n$. In tal caso denotiamo $\omega \in C^k(A; (\mathbf{R}^n)^*)$.

12.3. Osservazione: L'azione di ω su un vettore $h \in \mathbf{R}^n$ è per definizione un'azione lineare; cioè si ha:

$$\omega(x)[h] \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \, dx_i \right) [h] = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \, dx_i \left[\sum_{j=1}^{n} h_j e_j \right] \tag{12.4}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \, dx_i[e_j] \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) h_i \tag{12.5}$$

12.4. Esempio (il differenziale): Sia $f \in C^{k+1}(A; \mathbf{R})$ con $k \geq 0$. Allora

$$df := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i$$

è una forma differenziale lineare di classe C^k in A dove si ha

$$df[h] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i = \langle \nabla f, h \rangle, \quad h \in \mathbf{R}^n$$

12.5. Esempio: Esistono forme ω t.c. $\omega \neq df$ per qualche f; per esempio

$$\omega = 3x^2 \, dx - xy \, dy$$

non è il differenziale di nessun f differenziablile su tutto $\mathbf{R}^2$.

12.6. Osservazione: Data una forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \, dx_i$, si può associare in modo naturale un campo vettoriale $F(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$; cioè il vettore dei coefficienti di ω. Si ha sempre allora

$$\omega(x)[h] = \langle F(x), h \rangle, \quad h \in \mathbf{R}^n$$

Questa osservazione suggerisce come si può ottenere informazione globale su ω lungo una curva regolare.

12.7. Definizione: *Sia $\omega \in C^0(A; (\mathbf{R}^n)^*)$ una forma differenziale lineare su A aperto connesso. Sia γ una curva regolare a tratti e orientata con sostegno in A. Si chiama* <u>*integrale di ω lungo γ*</u> *la quantità:*

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega[T] \, ds = \int_\gamma \langle F, T \rangle \, ds \tag{12.6}$$

dove T è il campo di versori tangenti lungo γ e F è il campo dei coefficienti di ω.

N.B. Data $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una parametrizzazione di γ si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle F(\varphi(t), \varphi'(t) \rangle \, dt \tag{12.7}$$

dove F è sempre il campo dei coefficienti di ω.

Il seguente teorema traduce nel linguaggio delle forme differenziali il Teorema 11.7 sulle proprietà dell'integrale di linea per campi vettoriali.

12.8. Teorema (Proprietà di $\int_\gamma \omega$): *Siano $\omega, \zeta \in C^0(A; (\mathbf{R}^n)^*)$ due forme differenziali lineari su $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso con campi vettoriali F, G associati. Sia γ una curva regolare orientata con sostegno $\Gamma \subset A$ e sia $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una sua parametrizzazione. Allora*

a) $\int_\gamma \omega$ *è independente dalla scelta di* $\varphi \in [\gamma]^\circ$

b) $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$

c) $\int_\gamma (\alpha\omega + \beta\zeta) = \alpha \int_\gamma \omega + \beta \int_\gamma \zeta \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

d) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$

Quindi **a) - d)** *valgono anche per γ regolare a tratti e orientata.*

C'è molto libertà nel calcolo dell'integrale di linea di una forma differenziale quando la forma appartiene alla seguente classe.

12.9. Definizione: *Una forme differenziale lineare $\omega \in C^0(A; (\mathbf{R}^n)^*)$ in A aperto si chiama <u>esatta in A</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists f : A \to \mathbf{R}$ di classe C^1 t.c. $\omega = df$. In tal caso, f è detta <u>primitiva di ω</u> in A.*

N.B. Se F è il campo dei coefficienti di ω si ha $\nabla f = F$ e quindi f è una funzione potenziale per F in A; cioè F è un campo conservativo. Quindi abbiamo la seguente vesione del Teorema 11.13 sui campi conservativi.

12.10. Teorema (sulle forme esatte): *Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso e $\omega \in C^0(A; (\mathbf{R}^n)^*)$. Allora le seguente affermazioni sono equivalenti fra loro:*

a) *ω è esatta in A*

b) $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ *per ogni copia γ_1, γ_2 regolari equiorientate da P_0 a P_1 con sostegno in A*

c) $\int_\gamma \omega = 0$ *per ogni γ regolare chiusa con sostegno in A*

12.11. Osservazione: Si ha anche l'analogo della Proposizione 11.14; cioè se f è una primitiva per ω esatta in A aperto connesso, allora **a)** l'integrale di ω lungo una curva regolare a tratti orientata è la differenza della primitiva calcolato agli estremi del sostegno; **b)**tutte le primitive sono della forma $f + c$ con $c \in \mathbf{R}$.

12.12. Esercizio: Calcolare $\int_\gamma \omega$ se $\omega = y\,dx - x\,dy$ e γ è la curva con parametrizzazione $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$. È vero che ω è esatta in $\mathbf{R}^2$?

13 Forme differenziali esatte e chiuse

13.1. Domanda: Esistono delle condizioni necessarie/ sufficienti affinchè una forma differenziale sia esatta? (Oppure, in modo equivalente, F sia un campo conservativo?).

Una condizione necessaria è fornita dalla seguente proprietà.

13.2. Definizione: *Sia* $\omega = \sum_{i=1}^n F_i(x)\,dx_i \in C^1(A; (\mathbf{R}^n)^*)$ *con* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *aperto. Si dice che* *ω è chiusa in A* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$ *si ha:*

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}, \; \forall x \in A \quad foralli \neq j. \tag{13.1}$$

13.3. Teorema (Forme esatte sono chiuse) *Sia* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *aperto. Sia* $\omega \in C^1(A; (\mathbf{R}^n)^*)$ *una forma differenziale esatta in* A*. Allora* ω *è chiusa in* A.

13.4. Osservazione (fondamentale): Per $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto (e connesso), **non** è vero il contrario. Esistono forme chiuse ma non esatte.

13.5. Esempio: La forma differenziale

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$$

è una forma di classe $C^\infty(A; (\mathbf{R}^n)^*)$ chiusa ma non esatta su $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

13.6. Osservazione: Il problema nell'esempio è il "buco" nel dominio. Vedremmo che ω chiusa in A "senza buco" implica ω esatta in A; più precisamente, questo sarà dimostrato per A stellato oppure *semplicamente connesso*.

13.7. Esercizio: Considerare la forma differenziale ω di Esempio 13.5: **a)** Verificare che $f(x, y) = \arctan(y/x)$ è una primitiva per ω in $A = \{(x, y) : \; x > 0\}$; **b)** "Ritrovare" f tramite integrazione di ω lungo segmenti paralleli agli assi.

13.8. Definizione: *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Si dice che* <u>*A è stellato*</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ *$\exists x_0 \in A$ t.c. $[x_0, x] \subset A$ per ogni $x \in A$.*

N.B. A volte si dice che <u>*A è stellato rispetto ad x_0*</u>.

13.9. Esempi:

1. A convesso è stellato rispetto ogni $x_0 \in A$.
2. A un cono chiuso è stellato rispetto a $0 \in A$.

13.10. Teorema: *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto e stellato rispetto a $x_0 \in A$. Sia $\omega \in C^1(A, (\mathbf{R}^n)^*)$ una forma chiusa in A. Allora:*

a) *ω è esatta in A*

b) *La primitiva di ω che si annula in x_0 è la funzione $f(x) := \int_{[x_0,x]} \omega$*

La dimostrazione sfrutta il seguente risultato utile

13.11. Lemma: *Sia $g = g(x,t) : A \times [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 in x e C^0 in t. Allora la funzione definita da*

$$G(x) := \int_a^b g(x,t)\, dt \tag{13.2}$$

è di classe $C^1(A)$ e vale

$$\frac{\partial G}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_j}(x,t)\, dt \quad j = 1, \dots n. \tag{13.3}$$

Ogni palla è stellata rispetto il suo centro, e quindi abbiamo un corollario importante del Teorema 13.10.

13.12. Corollario: *Sia $\omega \in C^1(A, (\mathbf{R}^n)^*)$ una forma chiusa in A aperto. Allora ω è* <u>*localmente esatta*</u>*; cioè per ogni $x_0 \in A$ e per ogni $r_0 > 0$ t.c. $B_{r_0}(x_0) \subset A$ esiste $f \in C^2(B_{r_0}(x_0))$ t.c. $\omega = df$ in $B_{r_0}(x_0)$.*

13.13. Osservazione: il teorema 13.10 vale anche per un dominio A <u>*semplicamente connesso*</u>; cioè per un A per cui tutti i cammini chiusi in A sono deformabili in modo continuo ad un cammino costante dove la deformazione rimane sempre in A. Più precisamente per un A

1. In dimensione $n = 2$, per ogni γ semplice chiusa con sostegno Γ in A, Γ è il bordo di un dominio (la chiusura di un aperto) tutto contenuto in A.

2. In dimensione $n \geq 2$, per ogni γ semplice chiusa con sostengo $\Gamma \subset A$ e fissato $x_0 \in \Gamma$ e $\varphi : [a,b] \to A$ con $\varphi(a) = \varphi(b) = x_0$ esiste un omotopia $H : [0,1] \times [a,b] \to A$ contiuna t.c.

$$H(0,t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [a,b]$$

$$H(1,t) = x_0, \ \forall t \in [a,b]$$

$$H(s,a) = x_0 = H(s,b) \ \ \forall s \in [0,1]$$

13.1 Altre formule per le primitive

13.14. Proposizione: (Rettangoli) *Sia* $\omega = \sum_{i=1}^n F_i(x)\,dx_i \in C^1(A, (\mathbf{R}^n)^*)$ *con* $A = \Pi_{i=1}^n (a_i, b_i)$ *un rettangolo aperto. Se* ω *è chiusa in* A *e fissato* $x_0 \in A$*, allora la primitiva di* ω *che si annulla in* x_0 *è la funzione*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega \tag{13.4}$$

dove γ_i *è parallela all'asse* x_i *in modo tale che* $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ *congiunge* x_0 *ad* x*.*

13.15. Proposizione: (Coni e forme omogenee) *Sia* A *un cono aperto (cioè per ogni* $x \in A$*,* $tx \in A$ *per ogni* $t > 0$*) e sia* $\omega = \sum_{i=1}^n F_i(x)\,dx_i \in C^1(A; (\mathbf{R}^n)^*)$ *con* F_i *omogeneo di grado* $\alpha \neq -1$ *in* A *(cioè* $F_i(tx) = t^\alpha F_i(x)$ *per ogni* $x \in A, t > 0$*). Se* ω *è chiusa in* A *allora* ω *è esatta in* A *e una funzione primitiva è data dalla funzione*

$$f(x) = \frac{\langle F(x), x \rangle}{\alpha + 1} \tag{13.5}$$

La dimostrazione sfrutta il seguente fatto che è interessante in se stesso.

13.16. Lemma: (Formula di Eulero) *Sia* $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *con* A *un cono aperto. La funzione* f *è omogenea di grado* α *in* A *se e solo se*

$$\langle \nabla f, x \rangle = \alpha f(x), \quad x \in A \tag{13.6}$$

13.2 Campi vettoriali conservativi e irrotazionali

Ricordando la correspondenza fra una forma differenziale e il campo vettoriale di coefficienti

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, dx_i \quad \longleftrightarrow \quad F = (F_1, \ldots, F_n) \tag{13.7}$$

abbiamo la seguente classe di campi in correspondenza con le forme chiuse.

13.17. Definizione: *Sia $F \in C^1(A, \mathbf{R}^n)$ un campo vettoriale su $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Si chiama F irrotazionale in A $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\partial F_i/\partial x_j = \partial F_j/\partial x_i$ in A.*

In particolare possiamo affermare

1. F conservativo in $A \quad \Rightarrow \quad F$ irrotazionale in A.
2. F irrotazionale in $A \quad \Rightarrow \quad F$ localmente conservativo in A.
3. F irrotazionale in A stellato $\quad \Rightarrow \quad F$ conservativo in A.

e possiamo notare la correspondenza (13.4) dice anche

4. ω esatta $\quad \longleftrightarrow \quad F$ conservativo
5. ω chiusa $\quad \longleftrightarrow \quad F$ irrotazionale

13.3 Esercizi ed applicazioni

13.18. Esercizio: Sia $\omega = d(x^2y + y^3/3)$. Verificare che $f(x,y) = \int_{\gamma(x,y)} \omega$ dove $\gamma(x,y) = [(0,0),(x,y)]$ fornisce una primitiva di ω.

13.19. Esercizio: Sia $\omega = e^z\, dx + \cos y\, dy + xe^z, dz$. Stabilire se ω è esatta in $\mathbf{R}^3$. Nel caso affermativo, calcolare la primitiva che si annulla nell'origine.

13.20. Esercizio: Sia $\omega = g(x,y,z)\, dx + (x^2 + 2yz)\, dy + (y^2 - z^2)\, dz$ con $g \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$.

a) Trovare una condizione sufficiente su g affinchè ω sia esatta in $\mathbf{R}^3$.

b) Determinare esplicamente le funzioni "ammissibili" g.

c) Determinare le primitive di ω che si annullino sull'asse x.

13.21. Esercizio: La forma $\omega = 2xy + \, dx + (x^2 + 2yz)\, dy + (y^2 - z^2)\, dz$ una forma omogenea di grado 2. È esatta in $\mathbf{R}^3$? Trovare tutte le primitive nel caso affermativo.

13.22. Esercizio: La forma differenziale

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

in $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è omogenea di grado -1. È chiusa in A? È esatta in A?

13.23. Osservazione: (Equazioni differenziali esatte) Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{13.8}$$

dove $P, Q \in C^1(A, \mathbf{R})$ con $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto e $Q \neq 0$ su A. Diciamo che (13.8) è un'equazione <u>*esatta in A*</u> se

$$P_y = Q_x \quad \text{in } A \tag{13.9}$$

Questo perchè (13.9) dice che $\omega = P\,dx + Q\,dy$ è chiusa in A e quindi localmente esatta in A. Quindi per ogni $(x_0, y_0) \in A$, esiste un intorno $\mathcal{U}_0 = B_{r_0}((x_0, y_0))$ nel quale esiste $f \in C^2(\mathcal{U}_0)$ t.c. $\omega = df$ in $\mathcal{U}_0$. Quindi la soluzione generale dell'equazione (13.8) è fornita in modo implicito come

$$f(x,y) = c \tag{13.10}$$

dove $c \in \mathbf{R}$ è una costante arbitraria .

13.24. Esercizio: Trovare la soluzione generale in forma implicita dell'equazione

$$y' = -\frac{y + 2xy^3}{x + 3x^2y^2}$$

in un intorno di $(x_0, y_0) = (1, 0)$. La soluzione è esplicitabile come una funzione $y = y(x)$?

14 Integrali multipli secondo Riemann: un caso semplice

14.1. Obbiettivo: Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$ e $f : A \to \mathbf{R}$. Trovare una teoria di integrazione per la dimensione $n \geq 2$ che estenda quella nota per $n = 1$ dando senso ad una espressione

$$\int_A f(x)\,dx = \int \cdots \int_A f(x)\,dx_1 \ldots dx_n$$

e trovare un modo efficiente per calcolarlo.

N.B. Gli ingredienti principali sono:

1. Sarà necessario A *misurabile secondo Peano-Jordan* ed in tal caso risulterà

$$\int_A dx = |A| = \text{ misura di } A.$$

2. Quando A è limitato, sarà necessario *f integrabile secondo Riemann* e sarà vero

$$\int_A f(x)\, dx = |A|\ \bar{f}_{|A} = \text{ misura di } A \text{ per valor medio di } f$$

3. Quando A è illimitato, sarà necessario *f integrabile in senso generalizzato* e si troverà

$$\int_A f(x)\, dx = \lim_{A_k \to A} \int_{A_k} f(x)\, dx \quad \text{con} \quad \text{“}A_k \nearrow A''$$

14.1 Integrali doppi su rettangoli

Un primo caso facile è di prendere una funzione di due variabili su un rettangolo e riprodurre la costruzione unidimensionale di Analisi I.

1. Sia $A = Q = [a,b] \times [c,d]$ un *rettangolo chiuso limitato*.
2. Sia $f : Q \to \mathbf{R}$ una funzione *limitata*; cioè $\exists\ m, M$ t.c. $m \leq f(x,y) \leq M \quad \forall\ (x,y) \in Q$.
3. Si forma una *partizione* $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ di Q; cioè con

$$\mathcal{P}_1 := \{a = x_0 < x_1 < \ldots x_r = b\} \text{ partizione di } I := [a,b]$$

$$\mathcal{P}_2 := \{c = y_0 < y_1 < \ldots y_s = d\} \text{ partizione di } J := [c,d]$$

si pone

$$I_i := [x_{i-1}, x_i] \text{ e } |I_i| := \Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots r$$

$$J_j := [y_{j-1}, x_j] \text{ e } |J_j| := \Delta y_j := y_j - y_{j-1}, \quad j = 1, \ldots s$$

e poi $Q = \bigcup_{i,j=1}^{n} Q_{ij}$ dove

$$Q_{ij} := I_i \times J_j \text{ and } |Q_{ij}| := \Delta x_i \Delta y_j$$

Così si nota

$$|Q| = \sum_{i,j=1,\ldots r,s} |Q_{ij}| = (b-a)(d-c).$$

4. Si definiscono delle <u>*somme inferiore/superiore*</u> per ogni partizione $\mathcal{P}$ di Q

$$s(f,\mathcal{P}) := \sum_{i,j} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i,j} m_{ij} |Q_{ij}|$$

$$S(f,\mathcal{P}) := \sum_{i,j} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i,j} M_{ij} |Q_{ij}|$$

dove m_{ij}, M_{ij} sono inf, sup di f limitata su Q_{ij} e si ha

$$m \leq m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij} \leq M, \quad \forall (x,y) \in Q$$

e quindi per ogni parizione $\mathcal{P}$

$$m|Q| \leq s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq M|Q|$$

5. Si definisce <u>*l'integrale inferiore/superiore*</u> nel solito modo

$$\underline{\iint}_Q f(x,y)\, dxdy := \sup_{\mathcal{P}} [s(f,\mathcal{P})]$$

$$\overline{\iint}_Q f(x,y)\, dxdy := \inf_{\mathcal{P}} [S(f,\mathcal{P})]$$

Quindi per qualsiasi f limitata su Q esistono finiti gli integrali inferiore e superiore.

14.2. Definizione: *sia $f : Q \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione limitata su un rettangolo Q. Si dice che f è <u>integrabile secondo Riemann in Q</u> se*

$$\underline{\iint}_Q f(x,y)\, dxdy = \overline{\iint}_Q f(x,y)\, dxdy \tag{14.1}$$

In tal caso, si scrive $f \in \mathcal{R}(Q)$ e si denota con $\iint_Q f\, dxdy$ il valore in comune in (14.1).

14.3. Esempio: (Funzioni costanti) Sia $k \in \mathbf{R}$. La funzione $f : Q \to \mathbf{R}$ t.c. $f(x,y) \equiv k$ è integrabile e $\iint_Q f\, dxdy = k|Q|$.

14.4. Osservazione: (Interpretazione geometrica) Se $f \geq 0$ è integrabile secondo Riemann su Q allora $\iint_Q f\, dxdy$ è il volume del solido limitato dal piano xy e il grafico di f.

14.5. Esempio: (Funzione di Dirichlet) La funzione $f : Q = [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in Q \cap [\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}] \\ 0 & (x,y) \in Q \setminus [\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}] \end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann.

14.6 Domande: A questo punto ci interessono le risposte a tre domande:

1. Quale funzioni sono $\mathcal{R}(Q)$?
2. Come si calcola l'integrale?
3. Come si tratta il caso con $A \neq Q$?

14.7. Teorema: (Criterio di Cauchy) *Sia $f : Q \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ limitata con $Q = [a,b] \times [c,d]$. Allora $f \in \mathcal{R}(Q)$ se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \ \ \mathcal{P}_\epsilon : \ \ S(f, \mathcal{P}_\epsilon) - s(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon \tag{14.2}$$

N.B. La dimostrazione è uguale a quella di Analisi I in cui si usa le definizioni di estremo superiore/inferiore insieme con le definizioni di intergale inferiore/superiore.

14.8. Teorema: (Integrabilità di funzioni continue) *Sia $f : Q \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua con $Q = [a,b] \times [c,d]$. Allora $f \in \mathcal{R}(Q)$ ed inoltre abbiamo*

$$|Q| \min_Q \leq \iint_Q f \, dxdy \leq |Q| \max_Q f \tag{14.3}$$

ed esite $(x_0, y_0) \in Q$ t.c.

$$f(x_0, y_0) = \bar{f}_Q := \frac{1}{|Q|} \iint_Q f \, dxdy. \tag{14.4}$$

N.B. La dimostrazione è uguale a quella di Analisi I in cui si sfrutta il fatto che f è uniformemente continua su Q compatto.

14.2 Calcolo di integrali doppi su rettangoli

14.9. Osservazione: (Principio di Cavalieri-Lagrange) Sia $f : Q \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ t.c. $f \in C^0(Q)$ e $f \geq 0$. Allora è naturale pensare che il volume del solido Σ "sotto il grafico di f" si possa calcolare "affettando" in x; cioè

$$\mathrm{vol}(\Sigma) := \iint_Q f \, dxdy = \int_a^b A_1(x) \, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx \tag{14.5}$$

dove $A_1(x)$ è l'area sotto il grafico di $f(x,y)$ con x fissato. In modo analogo

$$\mathrm{vol}(\Sigma) := \iint_Q f \, dxdy = \int_c^d A_2(y) \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy \tag{14.6}$$

dove $A_2(y)$ è l'area sotto il grafico di $f(x,y)$ con y fissato. Gli integrali nelle parti destre delle formule (14.5) e (14.6) sono chiamati <u>*integrali iterati*</u> e suggeriscono un modo di ridure il conto degli integrali mulitipli ad integrali unidimensionali.

14.10. Teorema: (di Riduzione) *Sia $f \in \mathcal{R}(Q)$ con $Q = [a,b] \times [c,d]$.*

a) *Se $\forall\ y \in [c,d]$, $\exists$ finito $G(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$, allora $G \in \mathcal{R}([c,d])$ e vale*

$$\iint_Q f\,dxdy = \int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \tag{14.7}$$

b) *Se $\forall\ x \in [a,b]$, $\exists$ finito $H(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$, allora $H \in \mathcal{R}([a,b])$ e vale*

$$\iint_Q f\,dxdy = \int_a^b H(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \tag{14.8}$$

14.11. Osservazioni: (su ipotesi)

1. In generale, $f \in \mathcal{R}(Q)$ **non** implica che $G(y), H(x)$ esistano finiti; p.e. su $Q = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & x = 1/2 \wedge y \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   è integrabile su Q ma $H(1/2)$ non esiste.

2. Se $f \in C^0(Q)$ gli ipotesi di **a), b)** sono soddisfatti e quindi vale il seguente formula di <u>*scambio di limiti di integrazione*</u>

$$\iint_Q f\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{14.9}$$

14.12. Esempio: La funzione $f(x,y) = x \sin(xy)$ è integrabile su $Q = [0,1] \times [0,\pi]$ e l'integrale vale 1.

14.13. Esercizio: Sia $f(x,y) = ye^{xy}$ su $Q = [1,2] \times [-1,3]$. Verificare che $f \in \mathcal{R}(Q)$ e calcolare il valor medio di f su Q.

15 Integrali multipli secondo Riemann: generalizzazioni

Adesso cerchiamo di rispondere alla terza domanda in 14.6; cioè come si trattano gli integrali doppi su domini non rettangolare e come si tratta integrali in più variabili.

15.1 Integrali doppi su domini più generali

Consideriamo una funzione $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ limitata su un insieme Ω limitato non necessariamente nè aperto nè chiuso.

15.1. Definizione: *Si dice f integrabile secondo Riemann in Ω $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ esiste $Q = [a, b] \times [c, d]$ t.c. $\Omega \subseteq Q$ e si ha $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$ dove*

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \in Q \setminus \Omega \end{cases} \tag{15.1}$$

In tal caso, si scrive $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ e si definisce $\iint_\Omega f\, dxdy := \iint_Q \tilde{f}\, dxdy$.

15.2. Osservazione : L'integrale è ben definito nel senso che è indipendente dalla scelta di Q che contiene Ω. Si vede facilmente che se $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sono i prolungamenti di f in due rettangoli Q_1, Q_2 che contengono Ω, allora $\tilde{f}_1 \in \mathcal{R}(Q_1) \Leftrightarrow \tilde{f}_2 \in \mathcal{R}(Q_2)$ ed i loro integrali sono uguali.

15.3. Osservazione:

1. In particolare, siano Ω è aperto e limitato e f è continuo con *supporto compatto*; cioè

   $$f \in C_0^0(\Omega) := \{f \in C^0(\Omega) : \ \exists K \subset \Omega \text{ compatto t.c. } f = 0 \text{ su } \Omega \setminus K\}.$$

   Allora per ogni $Q \supset \Omega$, il prolungamento $\tilde{f} \in C^0(Q) \subset \mathcal{R}(Q)$.

2. Invece, se $f \in C^0(\Omega)$ allora $\tilde{f} \in C^0(Q \setminus \partial\Omega)$. Quindi se f è limitata e $\partial\Omega$ è "piccolo" e non "brutto" si può dire che $\tilde{f}$ è generalmente continua su Q e quindi ci si aspetta che $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$.

N.B. È qui che entra il concetto della misura di Peano-Jordan.

15.4. Definizione: *Un insieme $Z \subset \mathbf{R}^2$ limitato si dice di misura nulla (secondo Peano-Jordan) $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ rettangoli $Q_1, \dots, Q_{N(\epsilon)}$ t.c.*

i) $Z \subset \bigcup_{k=1}^{N(\epsilon)} Q_k$

ii) $\sum_{k=1}^{N(\epsilon)} |Q_k| < \epsilon$

e, in tal caso, si scrive $|Z|_2 = 0$.

15.5. Esempi: (Insiemi di misura nulla)

1. $Z = \{P_1, \ldots, P_m\}$ un insieme finito
2. $Z = [P_1, P_2]$ un segmento
3. Z un qualsiasi insieme t.c. $Z \subseteq \tilde{Z}$ con $|\tilde{Z}|_2 = 0$.
4. $Z = \bigcup_{j=1}^{m} Z_j$ con $|Z_j|_2 = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, m$.
5. $Z = \text{graf}(g)$ dove $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ è continua (o più generalmente $g \in \mathcal{R}([a, b])$).

15.6. Definizione: *Sia* $f : Q \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *limitata su* $Q = [a, b] \times [c, d]$. *Si dice che* f *è generalmente continua in* Q $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists\ Z \subset Q$ *t.c.* f *è continua in* $Q \setminus Z$.

N.B. Questa classe gioca il ruolo delle funzioni continue a tratti in una variabile.

15.7. Teorema: (Integrabilità di funzioni generalmente continua)

a) f generalmente continua in $Q = [a, b] \times [c, d] \ \Rightarrow\ f \in \mathcal{R}(Q)$

b) $f \in C^0(\Omega)$ limitata su Ω limitato con $|\partial\Omega|_2 = 0 \ \Rightarrow\ f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

15.8. Definizione: *Un insieme* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *limitato si chiama misurabile secondo Peano-Jordan se* $|\partial\Omega|_2 = 0$ *e la misura di* Ω *è la quantità*

$$|\Omega|_2 := \int\!\!\int_Q dxdy \tag{15.2}$$

15.9. Esempio: La funzione $f : Q = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{se} \quad y + x - 1 \le 0 \\ 0 & \text{se} \quad y + x - 1 > 0 \end{cases}$$

è generalmente continua e l'integrale di f su Q vale 1/24

15.10 Teorema: (Proprietà dell'integrale) *Siano* $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ *con* Ω *misurabile. Allora*

a) $\displaystyle\int\!\!\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\ dxdy = \alpha \int\!\!\int_\Omega f\, dxdy + \beta \int\!\!\int_\Omega g\, dxdy \ \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

b) $\displaystyle\int\!\!\int_\Omega f\, dxdy \le \int\!\!\int_\Omega g\, dxdy \quad \textit{se} \quad f \le g$.

c) $\left|\iint_\Omega f\,dxdy\right| \leq \iint_\Omega |f|\,dxdy$

d) $|\Omega|_2 \inf_\Omega f \leq \iint_\Omega f\,dxdy \leq |\Omega|_2 \sup_\Omega f.$

e) *Inoltre se* $f \in C^0(\Omega)$ *con* Ω *compatto e connesso, allora* $\exists\ (x_0, y_0) \in \Omega$ *t.c.* $f(x_0, y_0) = \bar{f}_{|\Omega}$.

f) *Se* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *con* Ω_i *misurabili e* $|\Omega_1 \cap \Omega_2|_2 = 0$ *allora* $f \in \mathcal{R}(\Omega_i), i = 1, 2$ *e*

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f\,dxdy = \iint_{\Omega_1} f\,dxdy + \iint_{\Omega_2} f\,dxdy$$

15.2 Calcolo di integrali doppi

Una classe importante di domini misurabili è la seguente

15.11. Definizione: *Sia* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *limitato. Si dice*

a) Ω *è* *normale rispetto all'asse y* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ *esistono* $\alpha, \beta \in C^0([a, b], \mathbf{R})$ *t.c.*

$$\Omega = \{(x, y)\ :\ a \leq x \leq b\ \wedge\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

b) Ω *è* *normale rispetto all'asse x* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ *esistono* $\gamma, \delta \in C^0([c, d], \mathbf{R})$ *t.c.*

$$\Omega = \{(x, y)\ :\ c \leq y \leq d\ \wedge\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

c) Ω *è* *normale* *se valgono* **a)** *oppure* **b)**.

N.B. A volte si dice *semplice* nel posto di normale.

15.12. Osservazioni: È evidente dalla definizione che

1. Ω normale è misurabile ($|\partial\Omega|_2 = 0$).
2. Ω normale e $f \in C^0(\overline{\Omega})$ implica $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.
3. Ω normale e $f \in C^0(\Omega^\circ)$ e limitata implica $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.
4. Ω normale e f generalmente continua in Ω implica $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

15.13. Teorema: (di riduzione per domini normali) *Sia* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *un dominio normale. Sia* $f \in C^0(\overline{\Omega})$ *oppure* $f \in C^0(\Omega^\circ)$ *e* f *limitata. Allora*

a) $\iint_\Omega f\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,dy\right) dx$ *se* Ω *è normale risp. y.*

b) $\iint_\Omega f\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$ *se* Ω *è normale risp.* x.

15.14. Esercizio: Calcolare se esiste

$$\iint_\Omega \frac{x}{1+y}\,dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1 \ \wedge x^2 \le y \le x\}$.

15.15. Esercizio: Calcolare se esiste $\iint_\Omega f\,dxdy$ dove $\Omega = [0,1] \times [0,2]$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \ 0 \le y < 2x^2 \\ 3x^2 - 2y & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \ 2x^2 \le y \le 2 \end{cases}$$

15.3 Integrali multipli in $\mathbf{R}^n$

Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ limitato e $f : \Omega \to \mathbf{R}$ limitata. Si ha una teoria analoga a quello del caso $n = 2$. In particolare.

1. Nel caso $\Omega = Q = \Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$ si definisce $f \in \mathcal{R}(Q)$ via somme inferiori/superiori.
2. Un *criterio di Cauchy* dà: $f \in C^0(\mathbf{Q}) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(Q)$.
3. Si definisce $f \in \mathcal{R}(\Omega) \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$ con $\Omega \subseteq Q$.
4. Si dice Ω *misurabile secondo Peano-Jordan* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $1 \in \mathcal{R}(\Omega)$ e la *misura di Peano-Jordan* è definita via $|\Omega|_n = \int \cdots \int 1\,dx_1 \cdots dx_n$.
5. Si ha Ω misurabile se e solo se $|\partial\Omega|_n = 0$ (vedi Definizione 15.16).
6. Si trova f *generalmente continua* in Ω misurabile implica $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

15.16. Definizione: *Sia* $Q = \Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$ *un rettangolo in* $\mathbf{R}^n$. *La misura (n-dimensionale) di* Q *è la quantità* $|Q|_n = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$. *Un insieme limitato* $Z \subset \mathbf{R}^n$ *si dice di misura (n - dimensionale) nulla secondo Peano-Jordan* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ *per ogni* $\epsilon > 0$ *esistono un numero finito* $N(\epsilon)$ *di rettangoli* Q_k *t.c.* $Z \subset \bigcup_{k=1}^{N(\epsilon)} Q_k$ *e* $\sum_{k=1}^{N(\epsilon)} |Q_k|_n < \epsilon$.

15.17. Esercizio: Per $n \ge 3$, formulare e verificare generalizzazioni degli Esempi 15.5.

15.4 Calcolo di integrali tripli

Ci sono almeno due metodi; per “fili” e per “strati”. Un primo risultato è il seguente che ha una dimostrazione analoga a quella del Teorema 14.10

15.18. Teorema: (di riduzione) *Sia $f \in \mathcal{R}(Q)$ dove $Q = [a,b] \times [c,d] \times [\alpha, \beta]$.*

a) *Se esiste finito $G(x,y) = \int_\alpha^\beta f(x,y,z)\, dz$ per ogni $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ allora $G \in \mathcal{R}([a,b] \times [c,d])$ e vale*

$$\iiint_Q f\, dxdydz = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\, dz \right) dxdy \tag{15.3}$$

b) *Se esiste finito $H(z) = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y,z)\, dxdy$ per ogni $z \in [\alpha,\beta]$, allora $H \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$ e vale*

$$\iiint_Q f\, dxdydz = \int_\alpha^\beta \left(\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y,z)\, dxdy \right) dz \tag{15.4}$$

N.B. Ovviamente ci sono formule analoghe di (15.3) e (15.4) con x oppure y nel posto di z.

Usando Teorema 15.18 e l'argomento usato in Teorema 15.13 si ha i seguenti due risultati.

15.19. Teorema: (di riduzioni per fili) *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ normale rispetto all'asse z; cioè esistano $\alpha(x,y), \beta(x,y) \in C^0(D, \mathbf{R})$ con $D \subset \mathbf{R}^2$ misurabile, chiuso t.c.*

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y), \quad (x,y) \in D\} \tag{15.5}$$

Sia $f \in C^0(\Omega)$. Allora $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ e vale

$$\iiint_\Omega f\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dxdy \tag{15.6}$$

N.B. Ovviamente c'è un risultato analogo per Ω *normale rispetto all'asse y (all'asse x)*. Inoltre, se D è un dominio normale (2-dimensionale) si può fare una riduzione nell'integrale su D in (15.6).

15.20. Teorema: (di riduzione per strati) *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ misurabile e contenuto fra gli iperpiani $z = a$ e $z = b$. Sia $f \in C^0(\overline{\Omega})$ (oppure $f \in C^0(\Omega^\circ)$ e f limitata). Allora $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ e vale*

$$\iiint_\Omega f\, dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D_z(h)} f(x,y,h)\, dxdy \right) dh \tag{15.7}$$

dove $D_z(h) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ (x,y,h) \in \Omega\}$.

N.B. Ovviamente c'è una versione affettando in x oppure y se il dominio Ω è contenuto fra iperpiani x oppure y costante.

15.21. Esercizio: Calcolare il volume del cono definito da $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 3$

15.22. Esercizio: Verificare che $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ e calcolare l'integrale $\iiint_Q f\,dxdydz$ se Ω è il cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ e

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & 0 \le z \le x^2 \\ 2 & x^2 \le z \le 1 \end{cases}$$

utilizzare l'integrazione sia per fili sia per strati.

15.23. Esercizio: Trovare una formula per il volume del solido Ω ottenuto dalla rotazione di

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \le f(x) \le y \le g(x), \quad a \le x \le b\}$$

attorno all'asse x (assumendo $f, g \in C^0([a,b], \mathbf{R})$, per esempio).

16 Cambiamento di variabili ed integrali generalizzati

Vogliamo trattare gli ultimi due problemi che rimangono per gli integrali multipli; cioè

1. In che modo possiamo cambiare variabili senza cambiare il valore dell'integrale?
2. In che modo possiamo trattare un integrale se Ω non è limitato o f non è limitata?

16.1 Cambiamento di variabili

16.1. Teorema: *Sia $\Phi : U^* \subseteq \mathbf{R}^n \to U \subseteq \mathbf{R}^n$ un diffeomorfismo di classe C^1 fra gli insiemi aperti U^*, U. Sia $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(U)$; cioè $f_{|K} \in \mathcal{R}(K)$ per ogni $K \subset U$ compatto, misurabile secondo Peano-Jordan. Allora $f \circ \Phi \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(U^*)$ e vale*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\Omega^*} (f\circ\Phi)(u)\,|J_\Phi(u)|\,du \ \ \forall\ \Omega \text{ misurabile con } \overline{\Omega} \subset U, \tag{16.1}$$

dove $J_\Phi = \det D\Phi$ è lo Jacobiano di Φ e $\Omega^* = \Phi^{-1}(\Omega)$.

N.B. Abbiamo usato la notazione compatta dovunque nella formula (16.1). In particolare: $x = (x_1, \dots x_n), u = (u_1, \dots u_n), dx = dx_1 \cdots dx_n, du = du_1 \cdots du_n$ e $\int$ rappresenta $\int \cdots \int_{n \text{ volte}}$.

La dimostrazione completa è un po' lunga e quindi ci limitiamo a qualche osservazione ed a degli esempi indicativi.

16.2. Osservazioni:

1. Essendo Φ un diffeomorfismo su U^*, abbiamo $J_\Phi(u) \neq 0$ per ogni $u \in U^*$. Inoltre, su $\Phi^{-1}(\overline{\Omega})$, abbiamo $|J_\Phi(u)| \geq c > 0$; cioè, J_Φ è strettamente staccato da zero sui compatti. Quindi, la restrizione ad Ω della funzione inversa $\Psi_{|\Omega} = \Phi^{-1}_{|\Omega}$ ha componenti (insiemi con loro derivate) limitati su Ω. In particolare, Ω^* è limitato. Si mostra che Ω^* è misurabile; cioè $|\partial\Omega^*|_n = 0$.

2. Se $f \in C^0(U)$, e, quindi, $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(U)$, abbiamo

$$(f \circ \Phi)(u)|J_\Phi(u)| \in C^0(U^*) \subset \mathcal{R}_{\text{loc}}(U^*).$$

3. Nel caso $f \equiv 1$ si ha

$$|\Omega|_n = \int_\Omega dx = \int_{\Omega^*} |J_\Phi(u)|\, du$$

   e quindi dà $|\Omega^*|_n$ nel caso $J_\Phi(u) \equiv \pm 1$. Questa è la condizione che Φ conservi la misura; altrimenti il fattore dello Jacobiano dà la “correzione”.

4. Una idea buona del perchè vale il teorema si vede concretamente nel seguente esempio.

16.3. Esempio: (Cambiamento lineare) Sia $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineare con matrice associata

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dove $\det M = ad - bc \neq 0$. Si verifica la formula (16.1) nel caso

$$\Omega^* = [0,1] \times [0,1] \ \text{ e } \ f \equiv 1 :$$

1. Φ è un diffeomorfismo di classe C^∞ e $J_\Phi = M$ quindi la (16.1) diventa

$$|\Omega|_2 = \iint_\Omega dxdy = \iint_{\Omega^*} |\det M|\, dudv = |\det M|\, |\Omega^*|_2 = |\det M| \tag{16.2}$$

2. L’immagine Ω è un parallelograma formato dai vettori $\vec{v} = (a, c)$ e $\vec{w} = (b, d)$. Ricordiamo le formule

$$|\Omega|_2 = \text{area}(\Omega) = ||\vec{v}||\, ||\vec{w}||\, \sin\theta \tag{16.3}$$

$$||\vec{v}||\, ||\vec{w}||\, \cos\theta = ab + cd \tag{16.4}$$

   Usando (16.3) e (16.4) si trova $|\Omega|_2^2 = (\det M)^2$ e quindi (16.2).

16.4. Esercizio: Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x + y < 1, \quad x > 0, \quad y > 0\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_\Omega \frac{\tan(x+y)}{x+y}\, dxdy$$

Suggerimento: Usare il cambiamento di variabili $u = x + y, v = x$.

Adesso vediamo la forma particolare della formula generale (16.1) nei casi più usati; cioè per i cambiamenti di variabili della sezione 5. Si trovano vari esercizi alla fine di questa sezione.

16.5. Esempio: (Coordinate polari) Ricordiamo che la mappa $\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0\}$ definita da

$$(x, y) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

è un diffeomorfismo di classe C^1. Quindi, per ogni misurabile $\Omega \subset \mathbf{R}^2 \setminus X$, dove $X = \{(x, y) : x \geq 0\}$, si ha

$$\iint_\Omega f(x, y)\, dxdy = \iint_{\Omega^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho d\theta \tag{16.5}$$

dove $\Omega^* = \Phi^{-1}(\Omega)$.

Appogiandosi solo sul Teorema 16.1, abbiamo bisogno di Φ un diffeomorfismo globale, e, nel esempio precedente, era necessario che $\Omega \cap X = \emptyset$. Possiamo anche usare coordinate polari quando $\Omega \cap X \neq \emptyset$? La risposta è sì.

16.6. Esempio: Per ogni $f \in \mathcal{R}(B_1(0, 0))$ si ha

$$\iint_{B_1(0,0)} f\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho d\theta.$$

L'idea è che possiamo scrivere $\Omega = B_1(0, 0)$ come un limite di $\Omega_\epsilon \leftrightarrow (\rho, \theta) \in (\epsilon, 1) \times (\epsilon, 2\pi - \epsilon)$. Possiamo applicare il cambiamento su Ω_ϵ e poi passare al limite. Queste considerazioni, si riptono nelle altre sistemi di Esempi 16.7, 16.8 sotto.

16.7. Esempio: (Coordinate cilindriche) Usando la mappa $\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$(x, y, z) = \Phi(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z),$$

per ogni $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ misurabile, si ha

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho\, d\rho d\theta dz \tag{16.6}$$

16.8. Esempio: (Coordinate sferiche) Usando la mappa $\Phi : [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$(x,y,z) = \Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi),$$

per ogni $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ misurabile, si ha

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\theta dz \tag{16.7}$$

16.2 Integrali multipli generalizzati

16.9. Problema: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Cosa vuol dire $\int_\Omega f\,dx$ nei casi

1. Ω **non** limitato?
2. f **non** limitata su Ω?

L'idea è di definire

$$\int_\Omega f\,dx := \lim_{j\to+\infty}\left(\int_{K_j} f\,dx\right), \tag{16.8}$$

se esite finito il limite, dove $\{K_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ è una successione di sottoinsiemi compatti e misurabili t.c.

$$f \in \mathcal{R}(K_j) \quad \text{per ogni } j \in \mathbf{N} \tag{16.9}$$

$$\text{“}K_j \uparrow \Omega\text{''} \quad \text{per} \quad j \to +\infty \tag{16.10}$$

N.B. 1) Nel caso f non limitata su Ω gli insiemi K_j stanno “fuori delle singolarità”.

2) Per trattare il problema di Ω illimitato, ci serve una classe di domini “buoni” ma eventualmente illimitati.

16.10. Definizione: *Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ eventualmente illimitato. Diciamo che Ω è <u>misurabile secondo Peano-Jordan</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, Q \subset \mathbf{R}^n$ rettangolo compatto abbiamo $\Omega \cap Q$ è misurabile secondo Peano-Jordan. In tal caso, definiamo $|\Omega|_n := \sup\{|\Omega \cap Q|_n \ : \ Q \subset \Omega\}$.*

N.B. Nella definizione abbiamo usato un referimento esplicito ai rettangoli (e quindi le coordinate cartesiane). Questo non è necessario. Si potrebbe definire invece Ω misurabile se e solo se $\Omega \cap E$ è misurabile per ogni E misurabile e limitato.

16.11. Esempi:

1. $\mathbf{R}^n$ è illimitato e misurabile con $|\mathbf{R}^n|_n = +\infty$
2. $\mathbf{R}^n_+ := \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$ è illimitato e misurabile e $|\mathbf{R}^n_+|_n = +\infty$.
3. $\forall\ x_0 \in \mathbf{R}^n, r > 0$, $\mathbf{R}^n \setminus B_r(x_0)$ è illimitato e misurabile e $|\mathbf{R}^n \setminus B_r(x_0)|_n = +\infty$.
4. $\forall\ a \in \mathbf{R}^n$, l'iperpiano $a^\perp = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle a, x\rangle = 0\}$ è illimitato e misurabile e $|a^\perp|_n = 0$.
5. Ogni grafico $\mathrm{graf}(g)$ con $g \in C^0(\mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{R})$ è illimitato misurabile e $|\mathrm{graf}(g)|_n = 0$

16.12. Definizione: *Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ eventualmente illimitato ma misurabile e $f : \Omega \to \mathbf{R}$ non negativa. Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato in Ω* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$

i) *$f \in \mathcal{R}(K)$ per ogni $K \subset \Omega$ compatto misurabile*

ii) *Esiste finito*

$$\int_\Omega f\, dx := \sup\left\{\int_K f\, dx \ : \ K \subset \Omega \text{ compatto, misurabile}\right\} \tag{16.11}$$

In tal caso, scriviamo $f \in \mathcal{ISG}(\Omega)$.

16.13. Osservazioni:

1. Usando $f \geq 0$, si può mostrare che: $f \in \mathcal{ISG}(\Omega)$ se e solo se esiste una succesione $\{K_j\}$ di insieme misurabili compatti t.c. $K_j \uparrow \Omega$ nel senso che

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \qquad \text{e} \qquad |\,\Omega - \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j\,|_n = 0$$

ed esiste finito il limite

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} f\, dx := \int_\Omega f\, dx$$

Il limite è lo stesso numero definito da (16.11).

2. È importante $f \geq 0$; per esempio, si consideri $f(x, y) = \sin x$ su $\mathbf{R}^2$ e si vede che esistano diverse successioni di domini K_j per cui il limite prende valori diversi (o addiritura il limite non esiste).

3. Nel caso generale (f con segno qualsiasi) si tratta f <u>*assolutamente integrabile (sommabile)*</u>; cioè si chiede $|f| \in \mathcal{ISG}(\Omega)$. Vedi Osservazione 16.16.

16.14. Esempio: Sia $\alpha > 0$. La funzione $f(x,y) = ||(x,y)||^{-\alpha} = (x^2+y^2)^{-\alpha/2}$ soddisfa

$$f \in \mathcal{ISG}(\mathbf{R}^2 \setminus B_1(0)) \Leftrightarrow \alpha > 2 \quad \text{e} \quad f \in \mathcal{ISG}(\overline{B}_1(0) \setminus \{0\}) \Leftrightarrow \alpha < 2$$

16.15. Osservazione: Nell'Esempio 16.14 possiamo anche dire $f \in \mathcal{ISG}(\overline{B}_1(0))$; qui per essere precisi si aggiusta la Definizione 16.12 nel modo seguente. Se f è limitata fuori un numero finito di punti S di Ω (oppure un insieme di misura nulla). Si prende $K \subset \Omega \setminus S$.

16.16. Osservazione: Per f di segno qualsiasi, si dice <u>*f sommabile in Ω*</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $|f| \in \mathcal{ISG}(\Omega)$.
In tal caso, si definisce l'integrale di f tramite

$$\int_\Omega f\,dx = \int_\Omega f_+\,dx - \int_\Omega f_-\,dx \tag{16.12}$$

dove si abbiamo usato la parte positiva e la parte negativa di f; cioè

$$f_+ := \max\{f,0\} \quad \text{e} \quad f_- := \max\{-f,0\}.$$

Si ha

$$|f| = f_+ + f_- \ ; \quad f = f_+ - f_- \ ; \quad 0 \leq \ f_\pm \leq |f|.$$

Quindi se $|f| \in \mathcal{ISG}(\Omega)$, un semplice confronto mostra che $f_+, f_- \in \mathcal{ISG}(\Omega)$ e (16.12) ha senso.

16.17. Esercizio: Analizzare l'esempio 16.14 nel caso $n = 3$; cioè con $f(x,y,z) = ||(x,y,z)||^{-\alpha}$.

16.18. Esercizio: Verificare che $f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$ sia integrabile in senso generalizzato in $\mathbf{R}^2$ e calcolare l'integrale.

16.19. Esercizio: Usando $K_T = [-T,T] \times [-T,T] \nearrow \mathbf{R}^2$ per $T \to +\infty$ nel calcolo dell'integrale nell'Esempio 16.14, mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

16.20. Esercizio: Sia $f : \Omega = [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{-1/2} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Mostrare che f è integrabile in senso generalizzato su Ω e calcolarne l'integrale.

16.3 Esercizi sul cambiamento di variabili

16.20. Esercizio: Calcolare il valor medio di $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ su

$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq z \leq 3\}$$

16.21. Esercizio: Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = \exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ su

$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x,y,z \geq 0\}.$$

16.22. Esercizio: Sia Ω un cono circolare retto con altezza h, raggio della base r, e asse di simmetria z. Assumiamo una densita di massa $m(x,y,z) = 1 - \mu z$ dove $\mu \in (0, 1/h)$. Calcolare:

a) La <u>*massa totale*</u> $m(\Omega) := \iiint_\Omega m(x,y,z)\, dxdydz$.

b) Il <u>*baricentro della massa*</u> $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := m(\Omega)^{-1} \iiint_\Omega (x,y,z) m(x,y,z)\, dxdydz$.

N.B. L'integranda nella parte **b** è un vettore e quindi si integra componente per componente.

16.23. Osservazione: Spesso nei conti l'uso di una simmetria nella funzione integranda rispetto al dominio è assai utile.

16.24. Esercizio: Verificare che

$$\iint_{B_1(0)} (x-y)\cos\left(x^2+y^2\right) dxdy = 0$$

17 I teoremi di Gauss-Green e Stokes nel piano

17.1. Obbiettivo: Per funzioni $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ trovare risultati analoghi al TFCI (Teorema Fundamentale del Calcolo Integrale):

a) $\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$

b) $\int_\gamma df = f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$

Abbiamo bisogno di una classe opportuna dei domini D; il bordo deve essere abbastanza regolare e di misura 2-dimensionale nulla.

17.2. Definizione: *Un insieme $D \subset \mathbf{R}^2$ si chiama <u>dominio normale regolare</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ vale*

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \ \alpha, \beta \in C^1([a,b], \mathbf{R})\} \tag{17.1}$$

oppure

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ c \leq y \leq d, \ \gamma(x) \leq y \leq \delta(x), \ \gamma, \delta \in C^1([c,d], \mathbf{R})\} \tag{17.2}$$

17.3. Osservazione: Sia D un dominio normale regolare. Allora

a) D è un dominio; cioè la chiusura di un aperto.

b) D è normale; cioè vale (17.1) $\vee$ (17.2) con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^0$.

c) D è semplicamente connesso.

d) Il bordo ∂D è regolare a tratti e genericamente $\partial D = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i$

17.4. Osservazione: Sia D un dominio normale regolare. Allora

a) Esiste un versore tangente T al bordo (tranne forse nei 4 punti angolosi)

b) Esiste un versore normale N al bordo (tranne forse nei 4 punti angolosi)

c) Esiste un'orientazione su ∂D; in particolare *l'orientazione positiva* è la scelta del percorso di ∂D che lascia l'interno D° "sulla sinistra". Si denota il bordo così orientato con $+\partial D$.

d) Questa scelta equivale una scelta continua di N; dalle due possibile scelte, chiamiamo ν il *versore normale esterno*.

17.5. Osservazione: Data una parametrizzazione $\varphi = (x(t), y(t)) : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ di $+\partial\Omega$ abbiamo

$$T(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{||(x'(t), y'(t)||} \quad \text{e} \quad \nu(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{||(x'(t), y'(t)||} \tag{17.3}$$

17.6. Teorema (formule di Gauss-Green) *Siano $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio normale regolare e $f \in C^1(D)$. Allora*

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \, dxdy = \int_{+\partial D} f \, dy \tag{17.4}$$

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} \, dxdy = -\int_{+\partial D} f \, dx \tag{17.5}$$

In particolare, se $F = (F_1, F_2) : D \to \mathbf{R}^2$ è un campo vettoriale di classe $C^1(D, \mathbf{R}^2)$ allora vale

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_{+\partial D} F_1 \, dx + F_2 \, dy \tag{17.6}$$

N.B. In (17.4) – (17.6) abbiamo l'uguaglianza di un'integrale doppio e di un'integrale di linea di una forma differenziale; quindi, possiamo usare uno per calcolare l'altro.

17.7. Osservazioni: (sulla dimostrazione)

1. È chiaro che (17.4) $\wedge$ (17.5) $\Rightarrow$ (17.6).

2. La formula (17.4) è "facile" per un dominio normale rispetto all'asse x - si integra prima in x; invece la formula (17.5) è "facile" per un dominio normale rispetto all'asse y - si integra prima in y.

3. Nei altri casi, ci sono due argomenti che funzionano: Uno è fatto nel libro [1] e si basa sulla definizione di una funzione ausiliare opportuna (l'integrale di $f\,dx$ oppure $f\,dy$. L'altro si basa sulla differenzazione di certi funzioni integrali simile al Lemma 13.11.

17.8. Lemma: *Siano $\alpha, \beta \in C^1([a,b], \mathbf{R})$ con $\alpha(x) \leq \beta(x)$ e $f = f(x,y)$ di classe C^1 in x per $x \in [a,b]$ e di classe C^0 in y per $y \in [\alpha(x), \beta(x)]$. Allora*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + [f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x)] \tag{17.7}$$

Inoltre sotto ipotesi analoghe vale

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + [f(\delta(y),y)\delta'(y) - f(\gamma(y),y)\gamma'(y)] \tag{17.8}$$

17.9. Definizione: Si chiama $D \subset \mathbf{R}^2$ un <u>dominio regolare</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $D = \bigcup_{k=1}^N D_k$ con $\{D_k\}_{k=1}^N$ una famiglia di domini normali regolari t.c. $D_k^\circ \cap D_j^\circ = \emptyset$ per ogni $j \neq k$.

17.10. Teorema: *Siano $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio regolare e $f, F_1, F_2 \in C^1(D)$. Valgono le formule di Gauss-Green* (17.4) $-$ (17.6).

17.11. Corollario: (Teorema della divergenza nel piano) *Siano $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio regolare $F \in C^1(D, \mathbf{R}^2)$. Allora*

$$\iint_D \operatorname{div} F\,dxdy = \int_{\partial D} \langle F, \nu\rangle\,ds \tag{17.9}$$

dove $\operatorname{div} F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$ *è la <u>divergenza di F</u>, ν è il versore normale esterno al bordo, ds è l'elemento di lunghezza d'arco.*

17.12. Corollario: (Teorema di Stokes nel piano) *Siano $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio regolare con l'orientazione positiva su ∂D e $w = F_1\,dx + F_2\,dy \in C^1(D, (\mathbf{R}^2)^*)$. Allora*

$$\iint_D d\omega = \int_{+\partial D} \omega \tag{17.10}$$

dove $d\omega := (\partial F_2/\partial x - \partial f_2/\partial y)\,dxdy$.

17.13. Osservazioni: I risultati possono essere enunciati in un linguaggio più riassuntivo:

1. Nella formula (17.6), la quantità $\partial_x F_2 - \partial_y F_1$ è il "componente verticale" del *rotore* del campo piano $F = (F_1, F_2, 0)$. Quindi l'integrale del rotore dà il lavoro effetuato lungo il bordo. Vedi Esercizio 17.14.

2. Nella formula (17.9), il *flusso uscente* dal bordo $\partial\Omega$ uguale l'integrale della divergenza di F. Vedi Esercizio 17.15.

3. La formula (17.10) è particolarmente semplice e bella. Rappresenta la risposta più elegante alla domanda 17.1.

17.1 Esercizi ed applicazioni

17.14. Esercizio: Calcolare il lavoro $\int_{+\gamma} \langle F, T\rangle\, ds$ dove $F = (x^2 + 2, 3y)$ e $+\gamma$ è il bordo orientato di $D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x, y \ge 0\}$.

17.15. Esercizio: Calcolare il flusso $\int_{\partial D} \langle F, \nu\rangle\, ds$ con F, D di Esercizio 17.14.

17.16. Esercizio: Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\, dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, \quad x, y, \ge 0\}$.

17.17. Esercizio: Mostrare direttamente le formule di Gauss-Green nel caso $D = [a, b] \times [c, d]$ (e con $f \in C^1(D, \mathbf{R}), F \in C^1(D, \mathbf{R}^2)$).

Per esercizio mostrare il seguente risultato

17.18. Proposizione:(l'area di un dominio regolare) *Sia* $D \subset \mathbf{R}^2$ *un dominio regolare. Allora*

$$\text{area}(D) = |D|_2 := \int\!\!\int_D dxdy = -\int_{+\partial D} y\, dx = \int_{+\partial D} x\, dy = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} x\, dy - y\, dx \qquad (17.11)$$

17.19. Esercizio: Calcolare $|B_r(0)|_2$ via (17.11).

17.20. Esercizio: Trovare una formula per l'area del dominio D con bordo orientato in forma polare $\rho = \rho(\theta) \in C^1([0, 2\pi])$ con $\rho(0) = \rho(2\pi)$.

Per eserczio mostrare il seguente risultato

17.21 Proposizione: (Integrazione per parti) *Siano $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio regolare e $f, g \in C^1(D)$. Allora*

$$\iint_D f \frac{\partial g}{\partial x}\, dxdy = \int_{+\partial D} f g\, dy - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g\, dxdy \tag{17.12}$$

$$\iint_D f \frac{\partial g}{\partial y}\, dxdy = -\int_{+\partial D} f g\, dx - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g\, dxdy \tag{17.13}$$

La seguente Proposizione fornisce una caratterizzazione della divergenza di un campo vettoriale C^1. Mostrare il risultato per esercizio.

17.22. Proposizione: (Caratterizzazione della divergenza) *Sia $F \in C^1(\Omega : \mathbf{R}^2)$ un campo vettoriale in $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto. Per ogni $x_0 \in \Omega$ si ha*

$$\mathrm{div} F(x_0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x_0)|_2} \int_{\partial B_r(x_0)} \langle F, \nu \rangle\, ds \tag{17.14}$$

Cioè la divergenza di F è il limite del flusso uscente da una palla per unità d'area.

18 Superfici regolari

18.1 Obbiettivo: Come abbiamo fatto per le curve ed integrali curvilinei, vogliamo;

1. Definire in senso preciso ed analitico cosa intendiamo per "superficie".

2. Dare un concetto di area per superfici "regolari" che si calcola tramite un integrale opportuno

3. Definire un modo di integrare funzioni scalari su una superficie ed analizzare le prime proprietà.

18.2. Definizione: *Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio connesso (la chiusura di un aperto connesso). Si chiama superficie regolare (parametrizzata) un'applicazione $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ t.c.*

(SR1) $\Phi \in C^1(D, \mathbf{R}^3)$

(SR2) $\Phi_{|D^\circ}$ *è invertibile.*

(SR3) $D\Phi(u, v)$ *ha rango 2 per ogni* $(u, v) \in D^\circ$

L'immagine $\Sigma = \Phi(D)$ si chiama sostegno della superficie.

N.B. È opportuno fare qualche commento sulla nostra definizione, che è ben fatta per motivi analitici. La nostra definizione, anche se non è la più naturale dal punto di visto geometrico, ha il preggio che possiamo sfruttare facilmente la nostra teoria di integrazione (quella di Riemann) in modo "globale", per avere una singola espressione integrale che rappresenta area, medie di funzioni, etc. In particolare, notiamo:

1. A volte si chiama Φ *porzione di una superficie regolare*, e spesso viene richiesta la iniettività di Φ su tutto D, non solo al interno D°.

2. A volte si chiama Φ un *carta globale*. Invece, se $P_0 \in \Sigma$ si chiama *carta locale* un'applicazione $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ biettiva da un intorno aperto $\mathcal{U}$ su un intorno $\Phi(\mathcal{U})$ di P_0. La carte locale è di *classe C^k* se φ e la sua inversa sono di classe C^k.

3. Le carte locali sono la base del concetto di una *varietà* di dimensione 2. Cioè, una buona definizione geometrica di *superficie* è un insieme localmente omoeomorfo/diffeormofo ad un aperto in $\mathbf{R}^2$ con regole di come si comporta le varie carte locali che hanno punti in commune nel loro dominio. Questa definizione, molto geometrico, ha il difetto che per fare i conti integrali uno deve incollare i pezzi locali insieme mediante una collezione di funzioni buoni, una *partizione di unità*.

4. Al altro estremo, a volte si chiama superficie di classe C^k qualsiasi $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ di classe C^k con D un insieme connesso. Questa è la generalizzazione a dimensione 2 del nostro concetto di cammino, ma come abbiamo avuto occasione da vedere, ci serve una struttura di regolarità in più per assucurare la esistenza di una retta tangente. La proprietà **(SR3)** gioca un ruolo analoga qui in dimensione 2.

18.2. Esempio: (il cilindro) Siano $r > 0$ e $h > 0$ fissati. La mappa $\Phi : D = [0, 2\pi] \times [0, h] \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$\Phi(\theta, t) = (r \cos\theta, r \sin\theta, t)$$

è una superficie regolare con sostegno un cilindro di altezza h e raggio r.

18.3. Osservazioni: Nell'Esempio 18.2 si vede:

1. Per ogni $(\theta_0, t_0) \in D^\circ$, i vettori $\Phi_\theta(\theta_0, t_0), \Phi_t(\theta_0, t_0)$ non si annullano e sono linearmente independenti

2. Le curve $\varphi(\theta) := \Phi(\theta, t_0)$ e $\psi(t) := \Phi(\theta_0, t)$ sono curve con sostegno su Σ che passano per $P_0 = \Phi(\theta_0, t_0)$. I loro vettori di velocità in P_0 sono $\Phi_\theta(\theta_0, t_0)$ e $\Phi_t(\theta_0, t_0)$. Essendo linearmente independenti, formano una base per lo <u>*spazio tangente*</u> $T_{P_0}\Sigma$

18.4. Esempio: (un grafico) Sia $g : D \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 su un dominio connesso D. Allora l'applicazione $\Phi(x, y) := (x, y, g(x, y))$ definisce una superficie regolare con sostegno $\Sigma = \mathrm{graf}(g)$. A volte viene chiamata superficie <u>*cartesiana*</u>.

18.5. Esempio: (la sfera) $\forall\ r > 0$, l'insieme di livello $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ è il sostegno della superficie regolare $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$\Phi(\theta, \varphi) := (r \cos\theta \sin\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\varphi).$$

N.B. In questi esempi vediamo i tre modi di rappresentare una "superficie" Σ: come parametrizzazione, come grafico, come insieme di livello.

18.1 Gli spazi tangenti e normali

Ricrdiamo la seguente operazione su vettori in $\mathbf{R}^3$. Dati $v, w \in \mathbf{R}^3$, il <u>*prodotto vettoriale*</u> di u e v è il vettore

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1) \tag{18.1}$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e $|M| = \det M$.

18.6. Proposizione: *Il prodotto vettoriale è un'applicazione bilineare* $\wedge : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *e soddisfa*

a) $w \wedge v = -v \wedge w$

b) $\langle v, v \wedge w\rangle = 0 = \langle w, v \wedge w\rangle$

c) $v \wedge w$ *(che è ortogonale al piano determinato da* v *e* w*) ha direzione determinato dalla "regola della mano destra"*

d) $||v \wedge w||$ *è uguale al area della parallelogramma determinato da* v *e* w.

18.7. Definizione: *Sia* Σ *il sostegno di una superficie regolare* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. *Sia* $P_0 = \Phi(u_0, v_0) \in \Phi(D^\circ)$. *Lo spazio tangente nel punto* P_0 *è l'insieme (spazio vettoriale)*

$$T_{P_0}\Sigma = \{\gamma'(0) \ : \ \gamma : [-\delta, \delta] \to \Sigma \text{ regolare con } \gamma(0) = P_0, \text{ qualche } \delta > 0\}.$$

Il piano tangente nel punto P_0 *è l'insieme (spazio affine)*

$$\Pi_{P_0}\Sigma = \{P_0 + v : v \in T_{P_0}\Sigma\}.$$

Lo spazio normale nel punto P_0 *è l'insieme (spazio vettoriale)*

$$N_{P_0}\Sigma = [T_{P_0}\Sigma]^\perp = \{w \in \mathbf{R}^3 : \langle w, v\rangle = 0 \ \forall v \in T_{P_0}\Sigma\}.$$

La retta normale nel punto P_0 *è l'insieme (spazio affine)*

$$R_{P_0}\Sigma = \{P_0 + w : w \in N_{P_0}\Sigma\}.$$

18.8. Proposizione: *Siano* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *una superficie regolare con sostegno* $\Sigma = \Phi(D)$ *e* $P_0 = \Phi(u_0, v_0) \in \Sigma$ *con* $(u_0, v_0) \in D^\circ$. *Allora*

a) $\{\Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0)\}$ *è una base per* $T_{P_0}\Sigma$.

b) $\Psi(s, t) = P_0 + s\Phi_u(u_0, v_0) + t\Phi_v(u_0, v_0)$ *per* $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ *è una parametrizzazione regolare di* $\Pi_{P_0}\Sigma$.

c) $\{\Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)\}$ *è una base per lo spazio normale* $N_{P_0}\Sigma$ *e quindi una parametrizzazione della retta normale è* $\nu(\tau) = P_0 + \tau(\Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0))$, $\tau \in \ R$

d) *Il piano tangente è data dall'equazione*

$$\langle(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)\rangle = 0$$

18.9. Esercizio: Trovare l'equazione del piano tangente e della retta normale nel punto $P_0 = (0, r, h/2)$ sul cilindro dell'Esempio 18.2.

18.10. Esercizio: Trovare l'equazione del piano tangente e della retta normale in un punto generico $P_0 = (x_0, y_), g(x_0, y_0))$ di una superficie cartesiana (vedi Esempio 18.4).

18.11. Esercizio: Ripetere l'Esercizio 18.8 per il punto $P_0 = (r, 0, 0)$ sulla sfera dell'Esempio 18.5.

18.2 L'area di una superficie regolare

18.12. Definizione: *Sia* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *una superficie regolare con dominio* D *regolare e connesso e con sostegno* Σ*. Si definisce l'area di* Σ *via*

$$A(\Sigma) := \iint_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv \tag{18.2}$$

N.B. Forse a questo punto sarebbe meglio scrivere $A(\Sigma;\Phi)$ oppure $A(\Phi(D))$ nel senso che forse l'area del sostegno dipenderà dalla parametrizzazione. Ovviamente ci sarà un concetto di parametrizzazioni equivalenti (vedi Definizione 19.1) per cui possiamo identificare Σ con $[\Phi]$ una classe di equivalenza di parametrizzazioni.

18.13. Osservazione: L'idea della definizione è:

1. Formiamo una partizione $\mathcal{P} = \{Q_{ij} = [u_i, u_i + \Delta u_i] \times [v_j, v_j + \Delta v_j]\}$ del dominio D di parametri.

2. Abbiamo $A(\Phi(Q_{ij})) \approx ||\Phi_u(u_i, v_j) \wedge \Phi_v(u_i, v_j)||\Delta u_i \Delta v_j$ per la parte **d)** di Proposizione 18.6.

3. Quindi $A(\Phi(D)) \approx \sum_{i,j} ||\Phi_u(u_i, v_j) \wedge \Phi_v(u_i, v_j)||\Delta u_i \Delta v_j \approx \iint_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv$

4. L'integrale esiste perchè $||\Phi_u \wedge \Phi_v||$ è continua su D misurabile secondo Peano-Jordan (perchè un dominio regolare). Inoltre, la somma in 3 approssima l'integrale per definizione.

18.14. Esempio: (il cilindro) Il cilindro di Esempio 18.2 con altezza h e raggio r ha area $2\pi rh$.

18.15. Esempio: (un grafico) L'area del grafico di $g \in C^1(D, \mathbf{R})$ con D un dominio regolare connesso è data dalla formula

$$A(\mathrm{graf}(g)) = \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dxdy \tag{18.3}$$

18.16. Esempio: (la sfera) La sfera di Esempio 18.5 con raggio r ha area $4\pi r^2 h$.

18.17. Esempio: (un cono retto) Sia

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in B_r(0)\}$$

Σ è un grafico di una funzione g ma g **non** è di classe C^1 nell'origine. D'altra parte, Σ è il sostegno della parametrizzazione regolare $\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho) \quad (\rho, \theta) \in [0, r] \times [0, 2\pi]$. Si ha $A(\Sigma) = \sqrt{2}\pi r^2$.

18.18. Esempio: (il toro) Siano r, R t.c. $0 < r < R$. La parametrizzazione

$$\Phi(t,\theta) = ((R + r\cos t)\cos\theta, (R + r\cos t)\sin\theta, r\sin t)\,, \quad (t,\theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

è regolare. Il sostegno è un toro con area $4\pi^2 rR$

19 Cambiamento di parametri ed integrali di superfici

In questo paragrafo, abbiamo i seguenti obbiettivi:

1. Esaminare la dipendenza del concetto di area di una superficie su una sua parametrizzazione;
2. Generalizzare il concetto di area ad insiemi con spigoli;
3. Definire l'integrale di una funzione scalare su una superficie regolare (a pezzi);
4. Introdurre il concetto di orientazione, e definire integrali di flusso per campi vettoriali su una superficie regolare (a pezzi).

19.1 Superfici equivalenti

19.1. Definizione: *Siano* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *e* $\Psi : D^* \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *due paramterizzazioni di una superficie regolare. Si dice* $\underline{\Phi \text{ è equivalente a } \Psi}$ $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, T : D^* \to D$ *diffeomorfismo di classe* C^1 *t.c.*

$$\Psi = \Phi \circ T \;\text{ e }\; \Phi = \Psi \circ T^{-1}$$

In tal caso, si scrive $\Phi \sim \Psi$. *Inolte si indica con* $[\Phi] = \{\Psi : \;\Psi \sim \Phi\}$.

19.2. Teorema: *Sia* $\Phi : D \to \mathbf{R}^3$ *una superficie regolare con* D *un dominio connesso e regolare. Sia* $T : D^* \to D$ *un diffeomorfismo di classe* C^1. *Allora:*

a) $\Psi = \Phi \circ T : D^* \to \mathbf{R}^3$ *è una superfice regolare con sostegno* $\Sigma = \Psi(D^*) = \Phi(D)$.

b) D^* *è regolare e abbiamo*

$$A(\Sigma,\Phi) := \iint_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv = \iint_{D^*} ||\Psi_s \wedge \Psi_t||\, dsdt := A(\Sigma,\Psi). \tag{19.1}$$

19.3. Osservazione: Sulla base del Teorema 19.2, possiamo definire *l'area di un sostegno di una superficie regolare* Φ via

$$A(\Sigma) = A(\Psi) \quad \forall \Psi \in [\Phi], \tag{19.2}$$

e possiamo definire *l'elemento d'area* rispetto le coordinate locali $(u, v) \in D = \mathrm{dom}(\Phi)$ via

$$d\sigma := ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv. \tag{19.3}$$

Cioè, l'elemento d'area è l'espressione che viene integrata su D per dare l'area di Σ rispetto la scelta di coordinate su Σ definita da Φ, ovvero,

$$A(\Sigma) := \int\!\!\int_{\Sigma} d\sigma. \tag{19.4}$$

19.4. Osservazione: Per avere le conclusioni di Teorema 19.2, si può indebolire l'ipotesi principale, cioè, $T : D^* \to D$ è un diffeomorfismo di classe C^1. Serve, in realtà, solo che T è un *cambiamento ammissibile di parametri*, ovvero,

(CP1) $T \in C^1(D^*, \mathbf{R}^2)$

(CP2) T *è iniettiva*

(CP3) $J_T \neq 0$ *su* $(D^*)^\circ$.

19.5. Osservazione: La biettività di T nella Definizione 19.1 e nel Teorema 19.3 potrebbe essere un po' scomoda in pratica. Per esempio $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, , 1/2 \leq z \leq 1\}$ è il sostegno di

$$\Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \quad \text{con} \quad (u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 3/4\}$$

ed è anche il sostegno di

$$\Psi(s, t) = (s \cos t, s \sin t, \sqrt{1 - s^2}) \quad \text{con} \quad (s, t) \in D^* = [0, \sqrt{3}/2] \times [0, 2\pi].$$

$(u, v) = T(s, t) = (s \cos t, s \sin t)$ non è biettiva sul bordo di D^*. Nonostante ciò, le due parametrizzazioni danno lo stesso area del sostegno in commune. Ovviamente si potrebbe tagliare da D^* una piccola striscia di ampiezza ϵ attorno $s = 0$ e $t = 2\pi$ dove T non è biettiva e poi il teorema si applica al dominio tagliato. Poi si passa al limite per $\epsilon \to 0^+$.

19.2 Superfici con spigoli

Per essere in grado di fare conti su oggetti semplici come cubi, coni, etc, ci serve la seguente estensione del concetto di area alle superficie con spigoli.

19.6. Definizione: *un sottoinsieme* $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ *si chiama (sostegno di) una* *superficie regolare a pezzi* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\Sigma = \bigcup_{j=1}^{N} \Sigma_j$ *dove*

i) $\Sigma_j = \Phi_j(D_j)$ *con* Φ_j, D_j *regolari*

ii) $\Sigma_j \cap \Sigma_k = \gamma_{jk}$ *una curva regolare a tratti (se non è vuoto).*

Per un tale Σ *si definisce* $A(\Sigma) = \sum_{j=1}^{N} A(\Sigma_j)$.

19.7. Esempio: Il bordo di un dominio Ω normale in $\mathbf{R}^3$ è una superficie regolare a pezzi; per esempio il bordo di un cilindro solido oppure di un cubo.

19.3 Integrali di fuzioni scalari su una superficie

19.8. Definizione: *Sia* Σ *una superficie regolare con una sua parametrizzazione* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *con* D *dominio regolare connesso; cioè* $\Sigma = [\Phi]$. *Sia* $f \in C^0(\Sigma)$. *Si chiama* *integrale di* f *su* Σ *la quantità*

$$\iint_\Sigma f\, d\sigma := \iint_D f(\Phi(u,v))\, ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv \tag{19.5}$$

19.9. Teorema: (Prime proprietà) *Sia* $\Sigma = \Phi(D)$ *il sostegno di una superficie regolare* Φ *con dominio regolare connesso* D. *Sia* $f \in C^0(\Sigma; \mathbf{R})$. *Allora:*

a) $\iint_\Sigma f\, d\sigma$ *è ben definito ed è independente da* $\Psi \in [\Phi]$.

b) *Si ha*

$$\left| \iint_\Sigma f\, d\sigma \right| \le A(\Sigma) \max_\Sigma |f|$$

ed esiste $P \in \Sigma$ *t.c.* $f(P) = \bar{f}_{|\Sigma}$.

c) $\iint_\Sigma (\alpha f + \beta g)\; d\sigma = \alpha \iint_\Sigma f\, d\sigma + \beta \iint_\Sigma f\, d\sigma \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\;\; f, g \in C^0(\Sigma)$.

19.10. Esercizio: Calcolare $\iint_\Sigma x/\sqrt{4z+1}\, d\sigma$ dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ con } [x^2 + y^2 - y \le 0] \wedge [y \ge 1/2 \vee x \ge 0]\}.$$

19.4 Orientazione e flussi di campi vettoriali

Prima di definire integrali dei componenti di un campo vettoriale su una superficie, ci serve una struttura di orientazione su una superficie regolare.

19.11. Definizione: *Una superficie $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ con sostegno Σ si chiama <u>orientabile</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ una scelta continua di versore normale ν su Σ.*

19.12. Esempi:

1. $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una *carte locale*; cioè $\mathcal{U}$ aperto, $\Phi \in C^1(\mathcal{U}, \mathbf{R}^3)$ t.c. Φ è iniettiva e $D\Phi(u, v)$ ha rango 2 per ogni $(u, v) \in \mathcal{U}$. Abbiamo $\nu = \pm(\Phi_u \times \Phi_v)/||(\Phi_u \times \Phi_v)||$

2. $\Sigma = \text{graf}(g)$ con $g \in C^1(D, \mathbf{R})$ è il sostegno di una superficie orientabile. Abbiamo $\nu = \pm(-g_u, -g_v, 1)/\sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2}$.

3. $\Sigma = \bigcup_{j=1}^{N} \Sigma_j$ regolare a pezzi ha gli interni delle sue faccie Σ_j° orientabili.

4. Il <u>*nastro di Möbius*</u> **non** è orientabile. Più generalmente, con un dominio D chiuso, dobbiamo stare attenti se Φ non è globalmente iniettiva.

19.13. Osservazioni.

1. Come si vede dagli esempi, quando c'è un'orientazione su Σ ci saranno due scelte $\pm\nu$.

2. Usiamo noi la convenzione seguente. Data $\Phi : D \to \mathbf{R}^3$ orientabile, si chiama <u>*orientazione* indotta da Φ</u> la scelta $\nu = \Phi_u \wedge \Phi_v/||\Phi_u \wedge \Phi_v||$ se D ha coordiate (u, v).

3. Dato un diffeomorfimo $T : D^* \to D$ di classe C^1 con $(u, v) = T(s, t)$, si vede che $\Psi(s, t) = \Phi(T(s, t))$ soddisfa

$$(\Psi_s \wedge \Psi_t)(s, t) = J_T(s, t)(\Phi_u \wedge \Phi_v)(T(s, t))$$

e quindi l'orientazione di Φ è quella di Ψ se e solo se $J_T > 0$. Nel caso $J_T < 0$, l'orientazione viene invertita.

4. Quindi ha senso parlare di una relazione di equivalenza

$$\Phi \overset{\circ}{\sim} \Psi \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \Psi = \Phi \circ T, \quad \text{con} \quad J_T > 0$$

dove $[\Phi]^\circ = \{\Psi : \Psi \overset{\circ}{\sim} \Phi\}$.

5. Nel caso $\Sigma = \partial\Omega$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare, si parla del versore <u>*esterno/interno*</u>.

19.14. Definizione: *Siano Σ (il sostegno di) una superficie orientabile con campo normale continuo ν e $F \in C^0(\Sigma, \mathbf{R}^3)$ un campo vettoriale su Σ. Si chiama flusso di F (attraverso Σ nella direzione ν) la quantità*

$$\text{flusso}(F) = \iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \tag{19.6}$$

N.B. È chiaro che:

1. Quando $\Sigma = \partial\Omega$ con Ω un dominio regolare, si parla del *flusso uscente/entrante* in corrispondenza con la normale esterna/interna.

2. Se $\Sigma = \bigcup_{j=1}^N \Sigma_j$ è il sostegno di una superficie regolare a pezzi, si spezza il conto sceglendo ν_j sull'interno delle faccie Σ_j

$$\iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \sum_{j=1}^N \iint_{\Sigma_j} \langle F, \nu_j \rangle \, d\sigma$$

19.15. Esercizio: Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (1,0,1)$ attraverso Σ orientata da $\Phi(u,v) = (u^2, \sqrt{2}uv, v^2)$ con $(u,v) \in D$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le u^2 + v^2 \le \sqrt{2}, \quad v \le u\}$.

19.16. Esercizio: Mostrare che

$$\iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_D \langle F(x,y,g(x,y)), (-g_x, -g_y, 1) \rangle \, dxdy$$

se $\Sigma = \text{graf}(g)$ con $g \in C^1(D, \mathbf{R})$ e $F \in C^0(\Sigma, \mathbf{R}^3)$.

20 Il Teorema della divergenza nello spazio

Qui e nella sezione 21 vogliamo trovare delle generalizzazioni dei Teoremi della divergenza e di Stokes per il caso di campi vettoriali, forme differenziali in $\mathbf{R}^3$. Per cominciare abbiamo bisogno di precisare un concetto opportuno di dominio ammissibile simile a quello usato per il Teorema di Gauss-Green nel piano.

20.1. Definizione: *Un insieme $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ si chiama dominio normale regolare $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ esistono un dominio regolare normale $D \subset \mathbf{R}^2$ (due dimensionale) e due funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(D, \mathbf{R})$ per cui valga almeno uno delle seguenti affermazioni*

$$(\mathbf{NR_3}) \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y), \quad (x,y) \in D\}$$

oppure

$$(\mathbf{NR_2}) \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \varphi_1(x,z) \le y \le \varphi_2(x,z), \quad (x,z) \in D\}$$

oppure

$$(\mathbf{NR_1}) \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \varphi_1(y,z) \le x \le \varphi_2(y,z), \quad (y,z) \in D\}$$

Più precisamete, si dice Ω è normale regolare rispetto l'asse z se vale $(\mathbf{NR_3})$*, etc.*

20.2. Teorema: (le formule di Gauss) *Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio normale regolare e $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$. Allora volgono*

$$(\mathbf{G_3}) \quad \iiint_\Omega \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} F_3 \langle e_3, \nu\rangle \, d\sigma$$

$$(\mathbf{G_2}) \quad \iiint_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} F_2 \langle e_2, \nu\rangle \, d\sigma$$

$$(\mathbf{G_1}) \quad \iiint_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} F_1 \langle e_1, \nu\rangle \, d\sigma$$

dove ν è il versore normale esterno al bordo $\partial\Omega$.

N.B. Si può scrivere $(\mathbf{G_1}) - (\mathbf{G_3})$ in una forma compatta con $(x,y,z) = (x_1,x_2,x_3)$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega} F_i \langle e_i, \nu\rangle \, d\sigma, \quad i = 1,2,3 \tag{20.1}$$

ed il seguente corollario è immediata.

20.3. Corollario: (Teorema della divergenza nello spazio) *Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio normale regolare e $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$. Allora*

$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \, d\sigma, \tag{20.2}$$

dove $\mathrm{div}F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$ *è la divergenza di F e ν è il versore normale esterno.*

20.4. Osservazioni: La dimostrazione delle formule di Gauss:

1. È "facile" per le coppie $(\mathbf{NR_i})$ e $(\mathbf{G_i})$.

2. Invece, per esempio, la formula (G_3) nel caso che valga solo $(\mathbf{NR_2})$ oppure $(\mathbf{NR_1})$ è "difficile" e richiede un nuovo lemma sulla derivazione di funzioni integrali con parametri (vedi Lemma 17.8).

3. Nel testo [1] vengono dimostati i risultati **solo** nel caso in cui valgono tutti e tre $\mathbf{NR_i}$, $i = 1, 2, 3$. (Domini normali rispetto tutte gli asse)

20.5. Lemma: *Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare normale rispetto l'asse z e $f \in C^1(\Omega, \mathbf{R})$. Allora la funzione integrale*

$$G(x,y) := \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \tag{20.3}$$

è di classe $C^1(D, \mathbf{R})$ e valgono

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\, dz + \left[f(x,y,\varphi_2(x,y)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) - f(x,y,\varphi_1(x,y)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) \right] \tag{20.4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\, dz + \left[f(x,y,\varphi_2(x,y)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) - f(x,y,\varphi_1(x,y)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \right] \tag{20.5}$$

dove $D \subset \mathbf{R}^2$ è il dominio per cui vale $(\mathbf{NR_3})$.

20.6. Osservazione: A questo punto abbiamo come domini ammissibili qualsiasi dominio normale regolare; per esempio:

1. Un cubo
2. Un cilindro.

Ma una sfera oppure un cono non sono esplicitabili come un dominio normale regolare. Quindi ci serve una classe più ampia di domini.

20.7. Definizione: *Un insieme Ω si chiama <u>regolare</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j$ dove*

i) *Ω_j è regolare normale (rispetto almeno un asse)*

ii) *$\Omega_j^\circ \cap \Omega_k^\circ = \emptyset$ per ogni $j \neq k$.*

Il risultato principale è la seguente versione del teorema.

20.8. Teorema (della divergenza) *Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare e $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$. Allora*

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma, \tag{20.6}$$

dove $\operatorname{div} F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$ *è la <u>divergenza</u> di F e ν è il versore normale esterno.*

20.9. Esempi: I seguenti domini sono regolari nel senso della Definizione 20.7 e quindi ammissibili per il Teorema della divergenza:

1. Una sfera
2. Un cono retto troncato; cioè $\Omega = \{(x, y, z) : \epsilon \leq z \leq h, \quad ||(x, y)|| \leq r\}$.

Notiamo infine che un cono non è regolare secondo la nostra definizione, ma vale comunque il Teorema della divergenza per un cono; si vede tramite un processo al limite.

20.1 Esercizi ed applicazioni

20.10. Esecizio: Mostrare direttamente il Teorema della divergenza per $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ e $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ un cubo.

20.11. Esercizio: Calcolare il flusso di $F(x, y, z) = (3y, x^2 \cos^5 z, z)$ uscente dal bordo del cilindro $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, \quad 0 \leq z \leq h\}$

20.12. Esercizio: Calcolare il valor medio di $\mathrm{div} F$ su $B_1(0) \subset \mathbf{R}^3$ se $F(x) = \sin(||x||^2)x$.

20.13. Esercizio: Calcolare il flusso di $F(x, y, z) = (x + y, z - y, x^3 y)$ uscente dalla superficie orientata con sostegno

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = x^2 + y^2, \quad ||(x, y)|| \leq 2\}$$

ed orientazione definita da $\langle \nu, e_3 \rangle < 0$.

N.B. Questa Σ non è il bordo di un dominio, ma è un pezzo di un bordo.

20.14. Esercizio: Calcolare il flusso di $F(x, y, z) = (y \exp(x + y), -x \exp(x + y), xy)$ uscente dal bordo di

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |y| \leq x \leq 2 - |x| \wedge 0 \leq z \leq x + y\}$$

Suggerimento: Potrebbe essere utile un cambiamento di variabile lineare in x, y nel calcolo dei integrali multipli.

20.15. Esercizio: Calcolare il flusso di $F(x, y, z) = (x^3, 4y^3, z)$ uscente dal bordo di

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 4\}$$

Suggerimento: Potrebbe essere utile un cambiamento di variabile (coordinate ellittiche) nel calcolo dei integrali multipli:

$$x = 2\rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \sqrt{2}\rho\cos\varphi.$$

20.16. Esercizio: (interpretazione della divergenza) Sia $F \in C^1(B_1(P), \mathbf{R}^3)$ con $P \in \mathbf{R}^3$. Mostrare

$$\mathrm{div}F(P) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r(P)|_3} \iint_{\partial B_r(P)} \langle F, \nu\rangle \, d\sigma \tag{20.7}$$

Cioè la divergenza è il flusso infinitesimale in P per unità di volume.

20.17. Esercizio: (Integrazione per parti) Siano $f, g \in C^1(\Omega, \mathbf{R})$ e $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ e Ω regolare (ammissibile per il Teorema della divergenza). Mostrare

$$\iiint_\Omega g\mathrm{div}\ F \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} g\langle F, \nu\rangle \, d\sigma - \iiint_\Omega \langle \nabla g, F\rangle \, dxdydz \tag{20.8}$$

$$\iiint_\Omega g\frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega} gf\langle e_i, \nu\rangle \, d\sigma - \iiint_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx_1dx_2dx_3, \quad i = 1, 2, 3. \tag{20.9}$$

20.18. Esercizio: Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare (ammissible per il Teorema della divergenza). Mostrare

$$\iint \partial\Omega\nu_i \, d\sigma = 0 \ \text{ dove } \ \nu_i = \langle \nu, e_i\rangle, \ i = 1, 2, 3. \tag{20.10}$$

$$\mathrm{vol}(\Omega) := |\Omega|_3 = \frac{1}{3}\iint \partial\Omega\langle (x, y, z), \nu\rangle \, d\sigma \tag{20.11}$$

Per i prossimi esercizi, che hanno molto da fare con il corso avanzato sulle funzioni armoniche, ricordiamo una definizione.

20.19. Definizione *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto. Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ si chiama* <u>*armonica in Ω*</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\Delta u(x) = 0$ *per ogni $x \in \Omega$ dove $\Delta := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ è il* <u>*Laplaciano*</u>.

20.20. Esercizio: Sia $f \in C^0(\overline{\Omega})$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ammissibile per il Teorema della divergenza. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una soluzione del *problema di Dirichlet* per *l'equazione di Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega \\ u = 0 \ \text{ su } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{20.12}$$

Mostrare la seguente identità

$$\iiint_\Omega ||\nabla u||^2 \, dxdydz = -\iiint_\Omega uf \, dxdydz. \tag{20.13}$$

Formula (20.13) viene chiamata *un'identità di energia.*

Suggerimento: Moltiplicare l'equazione differenziale per u ed integrare.

20.20. Esercizio: (Unicità per il problema di Dirichlet) Siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ due soluzioni del problema (20.12) con lo stesso f. Mostrare $u \equiv v$. **Suggerimento:** Quale problema risolve la differenza $w = u - v$?

20.21. Esercizio: Sia u armonica in $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Mostrare che il flusso del suo gradiente uscente dal bordo $\partial\Omega$ è nullo; cioè

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle \, d\sigma = 0$$

N.B. In modo equivalente, il valor medio della *derivata normale* al bordo $\partial_\nu u := \langle \nabla u, \nu \rangle$ deve essere nullo.

20.22. Esercizio: Siano $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione del *problema di Neumann* per l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega \\ \partial_\nu u = 0 \ \text{ su } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{20.14}$$

dove $\partial_\nu u$ è la derivata normale definita in Esercizio 20.19. Mostrare che f deve avere media nulla.

21 Il Teorema di Stokes nello spazio

21.1. Obiettivo: Mostrare per una superficie "buona" con bordo Σ e $F \in C^1(A, \mathbf{R}^3)$ con A un intorno di Σ si ha

$$\iint_\Sigma \langle \text{rot} F, \nu \rangle \, d\sigma = \int_{+\partial\Sigma} \langle F, T \rangle \, ds \tag{21.1}$$

dove ν definisce un'orientazione (positiva) su Σ e si sceglie un'orientazione (positiva) sul bordo $\partial\Sigma$ compatibile con ν in qualche senso. Si ricorda anche che il <u>*rotore*</u> di un campo $F \in C^1(A, \mathbf{R}^3)$ è il campo vettoriale definito da

$$\mathrm{rot}F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\partial_{x_2}F_3 - \partial_{x_3}F_2,\ \partial_{x_3}F_1 - \partial_{x_1}F_3,\ \partial_{x_1}F_2 - \partial_{x_2}F_1) \tag{21.2}$$

Per cominciare abbiamo bisogno di precisare per quali superfici possiamo mostrare il risultato. In parole povere, saranno le restrizioni ad un dominio regolare D (ammissibible per il Teorema di Gauss-Green) di superfici regolari in un intorno aperto di D con ulteriore regolarità (classe C^2). Più precisamente, abbiamo la seguente definizione.

21.2. Definizione: *Si chiama <u>superficie stokiana</u> un'applicazione* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *t.c.*

(SS1) *D è un dominio (chiusura di un aperto) connesso e regolare ($D = \bigcup_{j=1}^N D_j$ con D_j normale regolare e $D_j^\circ \cap D_k^\circ = \emptyset$ per ogni $j \neq k$)*

(SS2) *$\Phi \in C^2(D, \mathbf{R}^3)$ e $\Phi = \tilde{\Phi}_{|D}$ dove $\tilde{\Phi} \in C^1(\mathcal{U}, \mathbf{R}^3)$ con $\mathcal{U}$ aperto t.c. $D \subset \mathcal{U}$.*

(SS3) *Φ è iniettiva in D.*

(SS4) *$D\Phi(u, v)$ ha rango 2 per ogni $(u, v) \in D$.*

21.3. Esempi:

1. Restrizione di una carta locale di classe C^2; cioè $\Phi = \tilde{\Phi}_{|D}$ con D dominio regolare sottoinsieme di $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^2$ aperto con $\tilde{\Phi} : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^3$ un diffeormorfismo di classe C^2.

2. Il grafico di una funzione di classe C^2 su un dominio regolare; cioè $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$ con $(u, v) \in D$ un dominio regolare e $g \in C^2(\mathcal{U}, \mathbf{R})$ con $D \subset \mathcal{U}$.

3. Certe superfici con bordo (comuni ed importanti) come la le parte "laterale" di una semisfera, cilindro, cono retto **non** sono direttamente il sostegno di una superficie stokiana, ma sono "decomponibili" in superfici stokiane (vedi Definizione 21.8 e Teorema 21.9).

21.4. Osservazioni: Per ogni Σ sostegno di una superficie stokiana si può vedere che:

1. Σ è orientabile (perchè Φ è iniettiva con $D\Phi$ di rango 2 fino al bordo di D). Nel caso dell'Esempio 21.3.1, si può prendere la restrizione dell'orienzatione di $\tilde{\Phi}$. Una scelta continua di campo normale ν, "dipinge" un "lato" di Σ.

2. $\Phi : D \to \Sigma$ è una biezione con $\Phi : \partial D \to \partial\Sigma$. Denotiamo $\Gamma_j = \Phi(\gamma_j)$ per ogni componente γ_j del bordo di D.

3. $\partial\Sigma$ è orientabile essendo un unione di curve; basta scegliere un verso su ogni componente. L'orientazione *positiva* è quella che lascia il lato "dipinto" di $\Sigma^\circ = \Phi(D^\circ)$ sulla sinistra. in questo senso si chiede che le orientazioni su Σ e $+\partial\Sigma$ sono *compatibile*.

4. La scelta delle orientazioni su Σ e $\partial\Sigma$ può essere fatta un modo compatibile con l'orientazione positiva già definita su ∂D nel senso che: Si può prendere la parametrizzazione Φ t.c.

a) ν è nella direzione $\Phi_u \times \Phi_v$

b) Se $\varphi_j(t)$ una parametrizzazione di γ_j con l'orientazione di $+\partial D$, allora $(\Phi \circ \varphi)(t)$ è una parametrizzazione di $\Gamma_j \in +\partial\Sigma$.

21.5. Esercizio: Siano $D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : ||(u,v)|| \leq 1\}$ e $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ \ ||(x,y)|| \leq 1\}$. Trovare una parametrizzazione Φ con sostengo Σ e dominio D t.c.

i) $\langle \Phi_u \wedge \Phi_v, e_3 \rangle < 0$

ii) Φ conserva l'orientazione positiva da $+\partial D$ a $+\partial\Sigma$.

N.B. Il punto è che in practica, l'orientazione su Σ oppure $\partial\Sigma$ è nota. Si deve prendere l'orientazione compatibile sul altro oggetto e poi trasferire il conto nello spazio dei parametri D nel modo giusto.

21.6. Teorema: (di Stokes nello spazio) *Sia $\Phi : D \to \mathbf{R}^3$ una superficie stokiana con sostegno Σ. Sia $F \in C^1(A, \mathbf{R}^3)$ con A un intorno aperto di Σ. Allora*

$$\int\!\!\int_\Sigma \langle \mathrm{rot} F, \nu \rangle \, d\sigma = \int_{+\partial\Sigma} \langle F, T \rangle \, ds \tag{21.3}$$

dove $+\partial\Sigma$ ha l'orientazione compatibile con l'orientazione definita da ν su Σ.

Adesso parliamo di una generalizzazione molto utile nelle applicazioni.

21.7. Definizione: *Σ è il sostegno di una superficie ammissibile (per il teorema di Stokes)* $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\Sigma = \bigcup_{j=1}^N \Sigma_j$ *dove Σ_j è il sostegno di una superficie stokiana e $\Sigma_j^\circ \cap \Sigma_k^\circ = \emptyset$ per ogni $j \neq k$.*

21.8. Teorema: *Siano Σ il sostegno di una superficie ammissibile e $F \in C^1(A, \mathbf{R}^3)$ dove $A \subset \mathbf{R}^3$ è un intorno aperto di Σ. Allora vale la conclusione del Teorema di Stokes (formula* (21.3)*).*

21.9. Esempi: Superfici ammissibili per il Teorema di Stokes sono:

a) La semisfera come $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ||(x, y, z)|| = r, \quad z \geq 0\}$.

b) Un cilindro come $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ||(x, y)|| = r, \quad 0 \leq z \leq h\}$.

c) Un cono retto come $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = ||(x, y)||, \quad 0 \leq z \leq h\}$.

d) Un parte della buccia di un cubo come $\Sigma = \partial \mathcal{C} \setminus Q$ dove $Q = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)\}$.

21.10. Osservazione: A volte si chiama il Teorema 21.6 il <u>Teorema del rotore</u>. Invece, spesso per il <u>Teorema di Stokes</u> si intende il risultato equivalente nel linguaggio delle forme differenziali; cioè

$$\iint_\Sigma d\omega = \int_{+\partial\Sigma} \omega \tag{21.4}$$

dove $\omega = \sum_{i=1}^3 F_i(x)\, dx_i \in C^1(A, (\mathbf{R}^n)^*)$ è una forma differenziale lineare e l'integrale $\iint_\Sigma d\omega$ può essere definita come il membro sinistro della formula (21.3).

Più precisamente, $d\omega$ è il <u>*differenziale esterno*</u> di ω ed è una <u>*forma differenziale bilineare*</u> per cui c'è un concetto naturale di integrazione su una superficie orientata. Brevemente l'idea è il seguente.

1. Si denota con $\Lambda^2(\mathbf{R}^3)$ lo spazio di <u>*forme bilineari alternanti*</u> $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$; cioè oltre alla bilinearità B soddisfa

$$B(V, W) = -B(W, V), \quad \forall\ V, W \in \mathbf{R}^3$$

2. Questo spazio è 3-dimensionale e rispetto la base canonica $\{e_i\}_{i=1}^3$ per $\mathbf{R}^3$, una base per $\Lambda^2(\mathbf{R}^3)$ è fornita da

$$\{dx_i \wedge dx_j : 1 \leq i < j \leq 3\} = \{dx_1 \wedge dx_2,\ dx_1 \wedge dx_3,\ dx_2 \wedge dx_3\}$$

dove l'azione è definita da

$$(dx_i \wedge dx_j)[e_k, e_l] = dx_i[e_k]dx_j[e_l] - dx_i[e_l]dx_j[e_k] = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta il\delta_{jk}$$

e poi prolungata per bilinearità su $(V,W) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned}
(dx_i \wedge dx_j)[V,W] &= (dx_i \wedge dx_j)\left[\sum_{k=1}^{3} V_k e_k, \sum_{l=1}^{3} W_l e_l\right] \\
&= \sum_{k,l=1}^{3} V_k W_l (dx_i \wedge dx_j)[e_k, e_l] = \sum_{k,l=1}^{3} V_k W_l \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) \\
&= V_i W_j - V_j W_i
\end{aligned} \tag{21.5}$$

3. Per $A \subseteq \mathbf{R}^3$, una <u>*forma differenziale bilineare di classe C^k in A*</u> è un'applicazione $\alpha \in C^k(A, \Lambda^2(\mathbf{R}^3))$ e quindi ha la forma

$$\alpha = \sum_{1 \le i < j \le 3} \alpha_{ij}(x)(dx_i \wedge dx_j)$$

dove $\alpha_{ij} \in C^k(A, \mathbf{R})$.

4. Per Σ il sostegno di una superficie regolare e orientata da $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ si definisce

$$\iint_\Sigma \alpha := \iint_D \alpha(\Phi(u,v))[\Phi_u(u,v), \Phi_v(u,v)]\, dudv \tag{21.6}$$

Cioè si integra su D la funzione scalare prodotta dall'inserimento dalle due vettori tangenti Φ_u, Φ_v nella forma α.

5. Data una forma differenziale lineare $\omega \in C^{k+1}(A, (\mathbf{R}^3)^*)$, il differenziale esterno di ω è la forma differenziale bilineare definita da

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\left(\sum_{i=1}^{3} F_i\, dx_i\right) && (21.7) \\
&= \left(\partial_{x_1}F_2 - \partial_{x_2}F_1\right)(dx_1 \wedge dx_2) + \left(\partial_{x_1}F_3 - \partial_{x_3}F_1\right)(dx_1 \wedge dx_3) + \left(\partial_{x_2}F_3 - \partial_{x_3}F_2\right)(dx_2 \wedge dx_3) \\
&= (\mathrm{rot}F)_3\,(dx_1 \wedge dx_2) - (\mathrm{rot}F)_2\,(dx_1 \wedge dx_3) + (\mathrm{rot}F)_1\,(dx_2 \wedge dx_3) && (21.8)
\end{aligned}$$

6. Quindi combinando (21.6) e (21.7) e usando un conto basato su (21.5) si trova

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma d\omega &= \iint_D \left(\sum_{i=1}^{3} (\mathrm{rot}F)_i(\Phi(u,v))(\Phi_u \wedge \Phi_v)_i\right) dudv \\
&= \iint_D \langle \mathrm{rot}F(\Phi(u,v)),\ \Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\rangle\, dudv = \iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}F, \nu\rangle\, d\sigma
\end{aligned} \tag{21.9}$$

7. Ricordando

$$\int_{+\partial\Sigma} \omega := \int_{+\partial\Sigma} \langle F, T\rangle\, ds \tag{21.10}$$

si ha (21.4) è equivalente a (21.3) usando le formule (21.9) e (21.10).

21.1 Esercizi

21.11. Esercizio: Sia $F(x,y,z) = (x^2z, y, yz)$ Calcolare il flusso del rotore di F uscente dalla superficie Σ orientata dalla parametrizzazione

$$\Phi(u,v) = (v, u, u^2+v^2) \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2 : \; u^2+v^2 \leq 1$$

N.B. Formulazione alternativa: Calcolare il flusso di F uscente dalla superficie $\Sigma = \mathrm{graf}(g)$ orientata da $\langle \nu, e_3 \rangle < 0$ dove $g(x,y) = x^2+y^2$ per $0 \leq ||(x,y)|| \leq 1$.

21.12. Esercizio: Calcolare $\int_\gamma \langle F, T \rangle \, ds$ dove

$$F(x,y,z) = (0, Q(y,z), R(y,z)), \quad Q, R \in C^1(\mathbf{R}^2)$$

e γ è la curva orientata con sostegno uguale $S_1(0) \cap \Pi$ dove $S_1(0)$ è la sfera unitaria centrata nell'origine e Π è il piano definita dall'equazione $y + z = 0$ e con orientazione che lascia l'interno della palla $B_1(0)$ unitaria alla sinistra.

21.13. Esercizio: Calcolare l'integrale $\int_\gamma y^2 \, dx + xy \, dy + xz \, dz$ dove γ è la curva orientata con sostegno

$$\{(x,y,z) : x = z \wedge x^2+y^2 = 2x\}$$

ed orientazione antioraria rispetto al piano xy.

21.14. Esercizio: (interpretazione del rotore) Sia $F \in C^1(B_1(P), \mathbf{R}^3)$ con $P \in \mathbf{R}^3$. Sia $\nu \in \mathbf{R}^3$ un versore. Mostrare che il componente del rotore nella direzione ν è dato dalla formula:

$$\langle \mathrm{rot} F(P), \nu \rangle = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|D_r(P)|_2} \int_{+\partial D_r(P)} \langle F, T \rangle \, ds \tag{21.11}$$

dove $D_r(P)$ è il disco di raggio r con centro P ortogonale alla retta passando per P nella direzione ν. Cioè il componente nella direzione ν del rotore è la circuitazione infinitesimale del campo F in P per unità di area.

References

[1] N. Fusco, P. Marcellini, e C. Sbordone - *Analisi Matematica Due*, Liguori Editore, Napoli, 1996.

[2] K. R. Payne - *Richiami di Analisi Matematica II*, Dipartimento di Matematica, Università di Milano, disponibile in rete alla pagina:
`http://www.mat.unimi.it/users/payne/anIII04-05.html`

[3] M. Salvatori e M. Vignati - *Appunti di Analisi Matematica II*, Dipartimento di Matematica, Università di Milano, disponibile in rete alla pagina:
`http://www.mat.unimi.it/users/mauras/appunti.html`.