

COMPITINO N.1 DI ANALISI MATEMATICA III - 19/11/04

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

- a. Enunciare il Teorema di Dini delle funzioni implicite per funzioni $\Phi : A \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e dare la definizione di *vincolo regolare* in \mathbf{R}^3 . Indicare **brevemente** cosa dice il Teorema di Dini al riguardo.
- b. Sia $\Gamma = \Phi^{-1}(0)$ l'insieme di livello di $\Phi(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xyz + 1$. Verificare che Γ è un vincolo regolare.
- c. Trovare gli estremi locali di $f|_{\Gamma}$ dove Γ è il vincolo della parte **b** e $f(x, y, z) = z - 3$. Gli estremi locali sono estremi globali?

Esercizio 2.

- a. Dare la definizione di *curva rettificabile* e *lunghezza di una curva parametrizzata* in \mathbf{R}^3 e discutere **brevemente** la dipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione φ .
- b. Sia γ la curva con parametrizzazione $\varphi : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t, t) & t \in [0, 2\pi] \\ (1, 0, 4\pi - t) & t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

Verificare che γ è rettificabile e calcolare la sua lunghezza. Trovare la sua parametrizzazione rispetto la lunghezza d'arco.

- c. Sia $F \in C^0(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ e γ la curva della parte **b**. È vero che:

$$F \text{ conservativo} \Rightarrow \int_{\gamma} \langle F, T \rangle ds = 0?$$

Giustificare la risposta.

- d. Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \langle F, T \rangle ds$ dove γ è la curva della parte **b** e

$$F(x, y, z) = (y, -x, -yz).$$

F dovrebbe/potrebbe essere conservativo?

N.B. È concessa **UN'ORA e 45 MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.